

УДК 532.592

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ХВИЛЕПОДІБНИХ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ РІДИНИ З УРАХУВАННЯМ МОЖЛИВОГО ВИКРИВЛЕННЯ ПОТОКУ У ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ В ЇХ ПОЧАТКОВОМУ ПЕРЕРІЗІ

О. А. РЯБЕНКО

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

Получено 12.03.2005

Зроблено аналіз існуючих неоднозначностей та суперечностей у трактуванні термінів “солітон”, “самотня” і “одиначна хвиля”. Показано, що для однозначного описання білякритичних течій, крім числа Фруда, в їх початковому перерізі необхідно враховувати також ступінь можливого викривлення потоку у вертикальній площині в тому ж перерізі. Побудована математична модель хвилеподібних білякритичних течій з врахуванням можливого викривлення потоку в їх початковому перерізі. Для умов поставленої задачі отримано загальний, а також частинний розв'язок для випадку гідростатичного розподілу тиску по глибині у початковому перерізі розглядуваних явищ.

Сделан анализ существующих неоднозначностей и противоречий в толковании терминов “солитон”, “уединенная” и “одиначная волна”. Показано, что для однозначного описания околоскритических течений, кроме числа Фруда, в их начальном сечении необходимо учитывать также степень возможного искривления потока у вертикальной плоскости в том же сечении. Построена математическая модель волнообразных околоскритических течений с учетом возможного искривления потока в их начальном сечении. Для условий поставленной задачи получено общее, а также частное решение для случая гидростатического распределения давления по глубине в начальном сечении рассматриваемых явлений.

The analysis is made of existing indeterminacies and contradictions in treating terms “soliton”, “solitary” and “single wave”. It is shown that for the non-ambiguous description of near-critical flows, besides Froude number, in their initial intersection it is necessary to take into account also the degree of possible flow curvature in the vertical plane in the same intersection. A mathematical model is built of wavelike nearcritical flows considering the possible flows curvature in their initial intersection. For the conditions of the problem set we obtained the general and also partial solution for case of the hydrostatic distribution of pressure in the initial intersection of phenomena discussed.

## ВСТУП

В останні десятиріччя у таких галузях науки, як математика, фізика, гідромеханіка, гідравліка, гідротехніка, гідрометеорологія, океанографія, газодинаміка, астрофізика, біологія, солітоніка та інші, при розгляді різноманітних хвиль і хвильових процесів (як сказано в [1] – від елементарних частинок до чорних дір і рукавів галактик) стосовно різних середовищ – рідини, плазми, газу, атмосфери, твердих тіл, напівпровідників, надпровідників, ліній зв'язку, нервових волокон, кровоносних судин і т. п. – досить часто використовують поняття “солітон”, “самотня хвиля”, “одиначна хвиля” [1 – 6]. При цьому автори в різних галузях науки трактують ці терміни неоднозначно, вкладаючи в них різний зміст.

Потрібно констатувати, що єдиного загальноприйнятого визначення вищевказаних термінів (так само як і терміну “хвиля”) до нинішнього часу ще не вироблено [4 – 6]. На жаль, до сих пір також не встановлені однозначні критерії, які б могли у якісному та кількісному відношеннях розрізнити

вказані поняття, провести чітку границю між ними.

Необхідно підкреслити, що розглядуване питання має велике наукове та практичне значення і виходить за рамки чисто термінологічної постановки проблеми, адже воно нерозривно пов'язане з питанням про умови існування різних типів згадуваних хвильових явищ. По суті, саме ці умови визначають тип конкретного явища, утворюваного в межах реальних споруд, його основні геометричні характеристики (максимальну і другу спряжені глибини, довжину хвиль та ін.), від яких безпосередньо залежить прийняття необхідних розмірів споруд у процесі їх проектування.

Стосовно цієї проблеми наука накопичила величезну кількість фактичного теоретичного і експериментального матеріалу, часто розпорошеного серед різних її галузей, який конче потребує глибокого всестороннього аналізу, осмислення та відповідних узагальнень. У процесі вироблення єдиної загальноприйнятої позиції у цьому питанні позитивну роль могли б (і повинні!) відіграти відповідні хвилі на воді, які відносно легко можна отри-

мувати, спостерігати в лабораторних і натурних умовах. При цьому різні типи таких хвиль можна одержувати як нерухомими в просторі з усталеним у часі рухом води, так і рухомими з неусталеним рухом води. Тут доречно згадати, що саме на воді Дж. С. Рассел [7] вперше виявив і дослідив рухому самотню хвилю, яку іноді називають гідродинамічним солітоном Рассела [8, 9].

У даній роботі ставиться мета розробити на основі проведених теоретичних і експериментальних досліджень математичну модель хвилеподібних білякритичних течій, в якій би в явній формі враховувалось можливе викривлення потоку у вертикальній площині в їх початковому перерізі. Такий підхід є оригінальним і надзвичайно важливим для правильного розуміння хвилеподібних явищ, що утворюються не тільки у воді, а й в інших середовищах.

## 1. ЕКСПЕРИМЕНТИ З УСТАЛЕНИМИ БІЛЯКРИТИЧНИМИ ТЕЧІЯМИ

Лабораторні дослідження усталених у часі білякритичних течій стосовно умов плоскої задачі проводилися у великому дзеркальному лотку з прямокутною формою поперечного перерізу гідротехнічної лабораторії Національного університету водного господарства та природокористування. Довжина лотка – 39.0 м, ширина – 1.0 м, висота – 1.7 м на початковій ділянці довжиною 5.0 м і 1.0 м – на подальшій частині. Перша частина лотка, довжиною 23.1 м, встановлена на стаціонарних опорах і має постійний поздовжній похил 0.000487, а друга частина, довжиною 15.9 м, влаштована на металевій фермі таким чином, що її нахил можна змінювати. Дно лотка – бетонне із ретельно зазализненою поверхнею.

Досліджувані білякритичні течії утворювалися за схемою витікання води з-під затвора, конфігурацію нижньої частини якого можна було змінювати. В проведених експериментах застосовувалися чотири типи такої конфігурації, описані в [10], причому два з них мали плавний обрис нижньої частини, що дозволило позбавитися вертикального стиснення потоку за затвором.

У процесі виконання досліджень було використано шість положень затвора на нерухомій частині лотка. При цьому віддаль від вихідного краю затвора до кінцевого перерізу нерухомої частини лотка відповідно становила: *I* – 17.85 м, *II* – 16.37 м, *III* – 10.87 м, *IV* – 4.90 м, *V* – 1.90 м.

Обриси вільної поверхні потоку визначалися за допомогою тестера. На установці для вимірюван-

ня осередненого тиску на дно по осі лотка було влаштовано дві групи п'езометрів загальною кількістю 95 шт. Приймальні створи п'езометрів розташовувались, в основному, з інтервалом 5.0 см, лише шість останніх приймальних створів другої групи були розміщені з інтервалом 10 см. Вихідний край затвора у *II* положенні розташовувався над приймальним отвором п'езометра *N2* першої групи, а у *V* та *VI* положеннях – відповідно над приймальними створами п'езометрів *N6* та *N26* другої групи. При цьому віддаль між крайніми приймальними отворами п'езометрів першої та другої груп становила 11.42 м.

З метою отримання необхідних типів білякритичних течій в якомога більш повному діапазоні їх основних характеристик у проведених експериментах змінювалися наступні п'ять параметрів дослідів: 1) витрата; 2) висота підняття затвора; 3) тип конфігурації нижньої частини затвора; 4) довжина робочої ділянки лотка з нерухомим дном (тобто використовувалися шість вищезгаданих положень затвора); 5) глибина нижнього б'єфу. При цьому глибину нижнього б'єфу регулювали як за допомогою клапанного затвора, так і шляхом зміни похилу його кінцевої частини.

Основні параметри дослідів при вивченні білякритичних течій з хвилястою поверхнею знаходилися в таких межах: витрата  $Q = 27.0 - 284.0$  л/с, максимальна глибина під вершиною найвищої хвилі  $h_B = 5.8 - 40.0$  см, причому характеристики потоку в початковому перерізі досліджуваних явищ були такими – глибина  $h_1 = 4.0 - 26.0$  см, коефіцієнт негідростатичності  $s_1 = 1.00 - 1.12$ , число Фруда  $Fr_1 = 0.46 - 4.53$ .

Проведені експерименти з усталеними в часі білякритичними течіями, коли утворювані хвилі були нерухомими в просторі, виявили ряд наступних унікальних явищ, які суперечать існуючим традиційним поглядам і вимагають всестороннього осмислення та пошуків відповідних пояснень.

1. Якщо затвор підняти на певну висоту  $h_{\text{п}}$ , то поступово змінюючи значення витрати  $Q$ , можна добитися такого руху води, при якому глибина відкритого потоку в перерізі, вибраному безпосередньо за затвором, буде дорівнювати критичній глибині, підрахованій за формулою

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}},$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт кінетичної енергії;  $q$  – питома витрата;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Суть даного парадоксу полягає в тому, що питома енергія перерізу, знайдена за формулою

$$E = h + \frac{\alpha v^2}{2g},$$

при  $h = h_k$  дорівнює мінімальному значенню  $E = E_{\min}$ , хоча потік не зупиняється, а продовжує рухатися, витрачаючи певну енергію на цей рух. Форма вільної поверхні потоку та параметри двох дослідів із  $h_{\text{Ц}} = h_k$  наведені в [11].

2. Досліди з кноїдальними хвилями, безстрибовим вальцевим спряженням б'єсів та одиночною хвилею [10 – 15], проведені при числах Фруда  $Fr_1 < 1$ , показали, що експериментальні значення другої спряженої глибини  $h_2^e$  цих явищ та максимальної глибини  $h_B^e$  білякритичних течій з хвилястою поверхнею є більшими за початкову глибину  $h_1$ , тобто

$$h_2^e > h_1, \quad (1)$$

$$h_B^e > h_1. \quad (2)$$

В той же час, теоретичні значення вказаних величин  $h_2^T$  і  $h_B^T$ , підраховані для значень  $Fr_1 < 1$  за відомими формулами Беланже

$$\eta_2 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_1} - 1 \right) \quad (3)$$

та Рассела – Буссінеска

$$\eta_B = \frac{h_B}{h_1} = Fr_1, \quad (4)$$

вимагають протилежних співвідношень:

$$h_2^T < h_1, \quad (5)$$

$$h_B^T < h_1. \quad (6)$$

Невідповідність порівнюваних нерівностей (1), (5) та (2), (6) свідчить, що при виведенні теоретичних залежностей (3) і (4) не враховані якісь важливі особливості вищеназваних явищ, що не дозволяє використовувати зазначені формули для всього класу білякритичних течій.

3. Проведені експерименти [10, 12, 13] підтвердили як класичну позицію щодо існування хвилястого стрибка при числах Фруда  $Fr_1 = 1 - 3$ , так і діаметрально протилежну точку зору А. Н. Мельникова [16] про можливість утворення досконалого гідравлічного стрибка з поверхневим вальцем в області цих самих чисел Фруда. І хоча в дослідях А. Н. Мельникова та в його трактовці отриманих результатів далеко не все виявилось коректним [17, 18], проте реальний факт існування при

одних і тих самих числах Фруда двох якісно відмінних між собою явищ – досконалого і хвилястого стрибків – вимагає чіткого фізичного пояснення.

4. Проведені нами експерименти з нерухомими білякритичними явищами [10 – 15] та аналіз результатів дослідів різних авторів із хвилями переміщення [19 – 21] дозволили виділити ряд типів нерухомих (рис. 1) та рухомих (рис. 2) хвильових явищ з однією хвилею. Проте накопиченої інформації та існуючих критеріїв виявляється недостатньо для виявлення серед вказаних явищ тих, які можна ідентифікувати як самотню хвилю чи солітон.

Зазначимо, що показані на рис. 1 нерухомі одиночні хвилі класифіковані за чотирма ознаками: 1 – за станом потоку, на поверхні якого утворюється хвиля, 2 – за законом розподілу тиску по глибині в початковому перерізі хвилі, 3 – за наявністю хвоста, 4 – за наявністю донної перешкоди.

## 2. АНАЛІЗ НЕОДНОЗНАЧНОСТЕЙ ТА СУПЕРЕЧНОСТЕЙ В ТРАКТУВАННІ ТЕРМІНІВ “СОЛІТОН”, “САМОТНЯ” І “ОДИНОЧНА ХВИЛЯ”

Існуючі неоднозначності і суперечності в трактуванні вказаних термінів (іноді дещо формальні та несуттєві, а часом досить істотні) склалися внаслідок одночасного бурхливого розвитку наукового напрямку динаміки хвиль і хвильових процесів у різних галузях науки, наявності специфічних прийомів і способів вивчення окремих питань, використовуваних у цих галузях, а також певної неузгодженості отриманих результатів між собою. Ці неоднозначності і суперечності можна звести до наступного.

1. Термін “самотня хвиля” був даний Дж. С. Расселом [7] (автор використав вирази “solitary wave of translation” – самотня хвиля перенесення, “great solitary wave” – велика самотня хвиля) як назва особливого типу одиночних хвиль **на воді**. Проте в подальшому цей термін стали застосовувати для відповідних явищ не тільки стосовно води, а і **для інших середовищ**, у тому числі і нерідинних.

Цю неоднозначність у принципі можна вважати неістотною, якщо вказувати тип середовища, стосовно якого розглядається досліджуване явище. Разом з цим потрібно мати на увазі, що в математиці використовувані диференціальні рівняння можуть відноситися одночасно до кількох типів середовищ або взагалі можуть бути абстраговані від конкретного типу середовища. В таких випадках

тип середовища повинен відігравати вирішальну роль при визначенні серед множини математичних розв'язків, що мають чіткий фізичний зміст і можуть бути реалізованими в конкретних умовах даного середовища.

2. Термін “самотня хвиля” спочатку був застосований як назва особливого типу хвиль у вигляді **одиначного підвищення** кривої вільної поверхні хвилі над поверхнею незбуреної рідини. Але цю назву використовують також і для відповідної хвилі у вигляді **одиначного пониження** (западни) кривої вільної поверхні відносно поверхні незбуреної рідини, тобто дзеркального відображення поперечного типу хвиль. В роботі [8] самотню хвилю підвищення називають “солітон”, а відповідну хвилю пониження – “антисолітон”.

Тут необхідно зауважити, що стосовно можливості тривалого існування самотньої хвилі пониження на поверхні рідини висловлюють вагомі сумніви. Дж. В. Буссінеск взагалі відкинув розв'язок у вигляді самотньої хвилі пониження як фізично неможливий [22]. Проте це ще не дає підстави повністю виключати з аналізу самотню хвилю пониження. Суть проблеми полягає в тому, що при вивченні відповідних диференціальних нелінійних хвильових і еволюційних рівнянь у частинних похідних та їхніх розв'язків, що описують самотні хвилі, під змінною величиною, яка входить у ці залежності, звичайно розуміють не тільки глибину хвилі, а й інші параметри розглядуваного явища. Такі параметри можуть характеризувати відхилення від рівноважного значення різних величин як дійсних – глибини, висоти, швидкості, щільності, потенціалу і таке ін. [8], так і комплексних змінних [9]. При цьому для певних параметрів, що характеризують досліджуване явище, використовуваний розв'язок може мати вигляд хвилі підвищення, а для інших – хвилі пониження. Так, для самотньої хвилі на воді залежність  $h = f(x)$  зміни глибини по довжині має вигляд хвилі підвищення, а залежність  $v = q/h = \phi(x)$  зміни швидкості по довжині – самотньої хвилі пониження (тут  $q$  – питома витрата).

3. Назва “самотня хвиля” була запропонована для рухомого у просторі явища певного типу – **одиначної хвилі переміщення**. Разом з цим цю назву застосовують також і стосовно відповідної **одиначної нерухомої хвилі**, вільна поверхня якої займає незмінне положення в просторі. Утворення таких нерухомих самотніх хвиль описано для води [14, 23], плазми [4] та магнітної рідини [9].

Цю суперечність можна відкинути, якщо рухому самотню хвилю розглядати у так званий перманентний період її існування, коли хвиля переміщу-

ється з постійною швидкістю і незмінним профілем вільної поверхні, внаслідок чого у рухомій системі координат, яка рухається у тому ж напрямку і з тією ж швидкістю, що і хвиля переміщення, таке явище виглядає нерухомим з усталеним у часі рухом рідини. Характерно, що така рухома перманентна і нерухома самотні хвилі описуються однією і тією ж залежністю [24], що дає підставу розглядати ці явища з єдиних позицій. Аналіз диференціальних рівнянь, які описують рухому і нерухому самотні хвилі, дано в [24].

4. При розгляді різноманітних хвильових явищ, характерною ознакою яких є те, що кількість хвиль дорівнює одиниці, часто використовують такі назви цих явищ, як **“одиначна хвиля”** і **“самотня хвиля”**, хоча умови застосування цих термінів, їх відмінності та сукупність вимог до них залишаються ще нез'ясованими в повній мірі.

Тут необхідно підкреслити, що вирази “solitary wave” та “onde solitaire” перекладаються на українську відповідно з англійської та французької мов і як “одиначна”, і як “самотня” хвилі (для порівняння наведемо відповідні російські вирази – “одиначная” і “уединенная” волни). В той же час, наявність ряду особливостей самотньої хвилі не дозволяє розглядати вирази “одиначна хвиля” та “самотня хвиля” як синоніми. Сказане в даному пункті прекрасно ілюструють рис. 1 і 2, про що вже говорилося у п. 4 попереднього параграфа.

5. **Самотню хвилю** на воді, яку дослідив і описав Дж. С. Рассел, часто повністю ототожнюють з **солітоном** [8, 9]. Але при більш загальному трактуванні цих термінів у них вкладають неоднаковий зміст [5, 8, 25, 26].

Типовими в цьому відношенні є такі висловлювання: “Всі солітони є самотніми хвилями, але зворотнє очевидно неправильно” [5], “Під солітоном неправильно розуміють просто самотню хвилю” [8]; “Солітонами називають тільки ті самотні хвилі, які...” [25]. С. Бардос [26] вважає, що коли сімейство розв'язків відповідних диференціальних рівнянь має нескінченний набір швидкостей, то для розв'язків потрібно використовувати термін “солітон”, а якщо набір можливих швидкостей є скінченим, то розв'язки потрібно називати “самотніми хвилями”. Застосування зазначених термінів ще більше урізноманітнюється для випадків просторової задачі, а також при використанні солітонних рівнянь у таких галузях науки, як нелінійні задачі фізики твердого тіла і квантової теорії поля [4, 5, 27]. Наведені приклади в тлумаченні термінів “самотня хвиля” і “солітон” свідчать про необхідність встановлення чітких критеріїв, що можуть ідентифікувати розглядувані явища та розрізнити

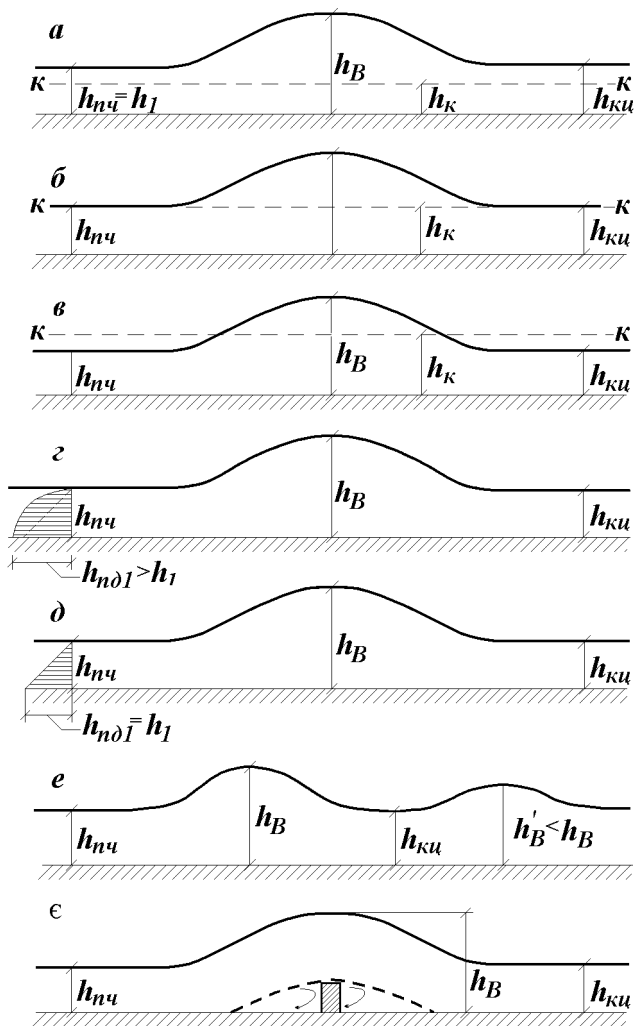


Рис. 1. Типи одиночних нерухомих хвиль на воді: а – одиночна хвиля в спокійному потоці; б – одиночна хвиля в критичному потоці; в – одиночна хвиля з негідростатикою в початковому перерізі; г – самотня хвиля в бурхливому потоці з гідростатикою в початковому перерізі (нерухомий гідродинамічний солітон); е – одиночна чи самотня хвиля з хвостом; ж – одиночна хвиля над донною перешкодою

їх між собою у відповідних випадках.

6. Назви “самотня хвиля” і “солітон” спочатку були дані особливій одиночній хвилі, профіль вільної поверхні якої має **симетричну дзвоноподібну форму** (такий профіль звичайно описують залежностями з квадратом гіперболічного секанса). Але в подальшому ці терміни стали застосовувати також і до інших одиночних хвиль чи імпульсів, форма профілю яких істотно відрізняється від описаної.

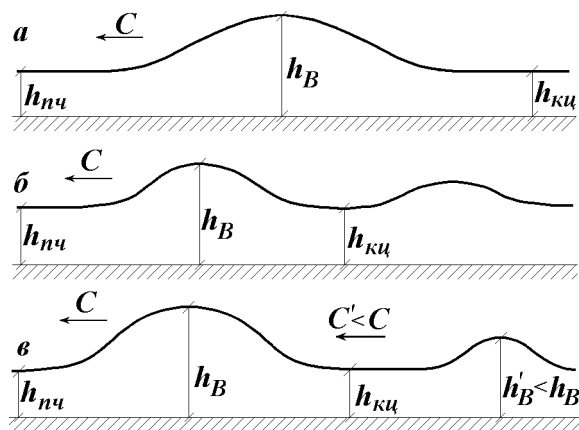


Рис. 2. Типи одиночних рухомих хвиль на воді: а – самотня хвиля (рухомий гідродинамічний солітон); б – одиночна хвиля з хвостом; в – самотня хвиля з відірваним хвостом

Для ілюстрації сказаного на рис. 3 показані форми хвильових імпульсів деяких солітонів. Типи а, б відповідають розв'язкам рівняння Кортевега – де Фріса для довгих хвиль на мілкій воді [2, 8], в, г – рівнянню  $\sin - \text{Гордон}$  для хвильових імпульсів у нелінійній оптиці [9], д – модифікованому рівнянню Кортевега – де Фріса [1, 8, 9]. Характерно, що в залежності від вихідних умов можливо утворення кількох типів брізерів різної форми [9].

Резюмуючи сказане в даному параграфі, необхідно підкреслити, що неоднозначності та суперечності, наведені в пунктах 1, 2, 3 і 6 є несуттєвими і вимагають лише чіткого зазначення характерних ознак розглядуваного явища – типу середовища, наявності чи відсутності переміщення хвиль у просторі, типу використовуваних диференціальних рівнянь, форми профілю хвиль і т.п. Разом з цим неоднозначності, вказані в пунктах 4 і 5, що стосуються трактування термінів “одиночна хвиля”, “самотня хвиля” і “солітон”, вимагають встановлення критеріїв, які можуть ідентифікувати дане явище і відрізнити його від інших. Крім того, розглядувана проблема потребує також чіткого встановлення умов існування кноїдальних хвиль, адже саме із загального розв'язку відомих диференціальних рівнянь Кортевега – де Фріса, Серра та ін. у вигляді кноїдальних хвиль отримують самотню хвилю як частинний розв'язок цих рівнянь.

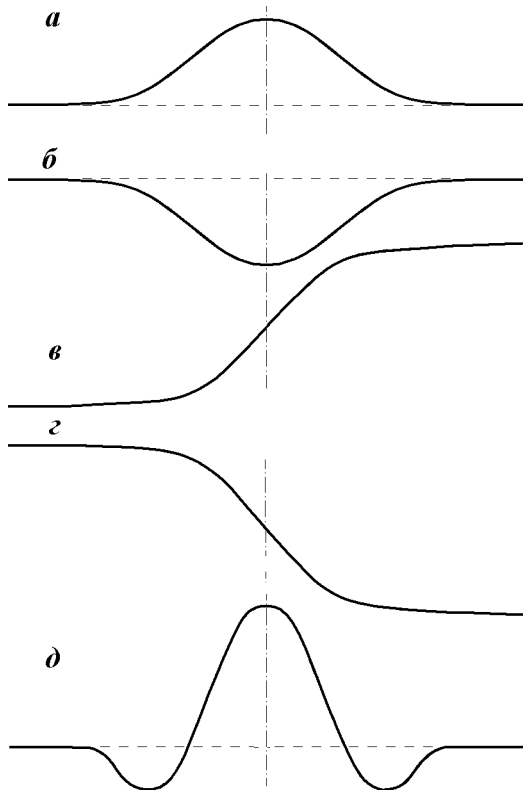


Рис. 3. Типи солітонів:

*а* – самотня хвиля підвищення (солітон); *б* – самотня хвиля пониження (антисолітон); *в* – кінк;  
*г* – антикінк; *д* – брізер (дублет)

### 3. ВИБІР ВИЗНАЧАЛЬНИХ ФАКТОРІВ ДЛЯ ОПИСАННЯ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ

Для коректного описання різних типів білякритичних течій необхідно встановити повний перелік визначальних факторів, які однозначно описують формування розглядуваних явищ, їх характеристики та умови існування. Складність цієї проблеми полягає в тому, що характерні параметри білякритичних течій (глибина, швидкість, енергія та ін.) є близькими до критичних значень, внаслідок чого такі течії мають ряд особливостей, які якісно відрізняють їх від звичайних безнапірних потоків, описуваних теорією плавного- та повільнозмінного руху [15].

Звичайно вважається, що всі потоки рідини з вільною поверхнею однозначно описуються числом Фруда, яке складають за характерними пара-

метрами розглядуваних явищ і часто відносять до їх початкового перерізу. Для нерухомих у просторі явищ це число виражають такою залежністю:

$$Fr_1 = \frac{V_1^2}{gh_1},$$

а для хвиль переміщення:

$$Fr_1 = \frac{c_1^2}{gh_1},$$

де  $V_1$  – швидкість потоку в початковому перерізі досліджуваного явища;  $h_1$  – глибина в тому ж перерізі (глибина незбуреного потоку);  $c$  – швидкість руху хвиль переміщення.

Проте в якій мірі зазначена теза справедлива також і для білякритичних течій залишається нез'ясованим. Існуючі погляди на питання про умови існування різних типів білякритичних течій рідини є надзвичайно суперечливими. Розглянемо основні з цих суперечностей.

1. Деякі автори [17] вважають, що число Фруда  $Fr_1 = 1$  є граничним, що розділяє області існування самотньої і кноїдальних хвиль. При цьому робиться висновок, що кноїдальні хвилі можуть утворюватися лише при  $Fr_1 < 1$ , а самотня хвиля – тільки при  $Fr_1 > 1$ . На відміну від цього інші вчені доказують, що кноїдальні хвилі можуть існувати при числах Фруда  $Fr_1$  як менших, так і більших одиниці [28 – 29].

2. Досить часто кноїдальні хвилі розглядають у вигляді крутих хвиль переміщення, що рухаються у просторі з певною швидкістю  $c$ . Теоретичні та експериментальні дослідження свідчать, що такі хвилі переміщення можуть існувати лише при числах Фруда  $Fr_1 > 1$  [30 – 31]. Цьому положенню суперечить вищезгадана точка зору про можливість утворення кноїдальних хвиль при числах Фруда  $Fr_1 < 1$ .

3. Звичайно вважається, що самотня хвиля утворюється в межах чисел Фруда  $Fr_1$  від одиниці до деякого значення  $Fr_1^B$ . Різні вчені отримують різні значення верхньої межі  $Fr_1^B$  існування самотньої хвилі: В. В. Сміслов [32] – 2.0, А. А. Турсунов [19] – 4.22. В роботі [19] при розгляді залежностей К. О. Фрідрікса і Д. Г. Хайерса [33], що описують самотню хвилю, наводиться значення  $Fr_1^B = 6.35$ . Але тут необхідно підкреслити, що ця величина отримана не безпосередньо при розгляді питання про умови існування даного явища, а в певній мірі формально на основі визначення меж існування окремих параметрів самотньої хвилі, використаних авторами роботи [33].

Якісною стороною розглядуваної суперечності є те, що деякі характеристики самотньої хвилі при

певних значеннях числа Фруда  $Fr_1$  виходять за межі фізичного існування цих характеристик. Так, В. В. Сміслов [32] показав, що при  $Fr_1 > 2$  глибина  $h_B$  під вершиною самотньої хвилі, підрахована за класичною формулою (4), перевищує значення питомої енергії потоку в початковому перерізі  $E_1$ , що суперечить природі гідравлічних явищ. Іншим прикладом невідповідності розрахункових і реальних характеристик, пов'язаної з умовами існування самотньої хвилі, може слугувати наступна формула А. А. Турсунова профілю вільної поверхні самотньої хвилі [19]:

$$\eta = \frac{h}{h_1} = 1 + \frac{1}{2} F_1^2 \left( 1 - \right.$$

$$\left. - \exp \left\{ -4 \ln F_1 \operatorname{sch}^2 \xi \left[ 1 + \frac{3}{2} \ln F_1 (3 \operatorname{sch}^2 \xi - 2) \right] \right\} \right), \quad (7)$$

де

$$\xi = \frac{x}{h_1} \sqrt{\frac{3}{2} \ln F_1}; \quad F_1 = \sqrt{Fr_1}.$$

Розрахунки за формулою (7), описані в [34, 35], показали, що при  $Fr_1 \geq 2.20$  профіль вільної поверхні хвилі наближається до поверхні незбуреного потоку не зверху, а знизу, тобто має вигляд симетричного брізера (див. рис. 3, д), що відповідає реальному профілю самотньої хвилі.

4. В ряді робіт [19, 36] при одному і тому самому значенні числа Фруда  $Fr_1$  (звичайно згадується діапазон  $Fr_1 \approx 1.5 - 4.2$ ) допускається існування не одного якогось явища, а кількох типів білякритичних течій, і зокрема – самотньої хвилі, хвилястого стрибка, стрибка – хвилі, недосконалого стрибка у вигляді зруйнованої хвилі та інших, що суперечить тезі про однозначність описання безнапірних потоків числом Фруда.

У доповнення до наведених суперечностей щодо умов існування різних типів білякритичних течій необхідно додатково зупинитися на такій обставині. Існуючі теоретичні роз'язки відомих рівнянь Кортевега – де Фріса, Серра та інших у вигляді самотньої і кноїдальних хвиль виражаються через їх максимальну  $h_B$  і мінімальну  $h_1$  глибини, а також інші параметри (питому витрату  $q$ , число Фруда  $Fr_1$  тощо). Якщо при цьому координатні осі розмістити тиким чином, що вертикальна  $oh$  проходить через вершину першої хвилі в напрямку від дна до вершини, а горизонтальні  $0x$  та  $-0x$  проходять по дну вздовж потоку (див. рис. 4), то при розгляді нерухомих і рухомих перманентних білякритичних явищ профіль самотньої хвилі можна описати формулою [17, 32]:

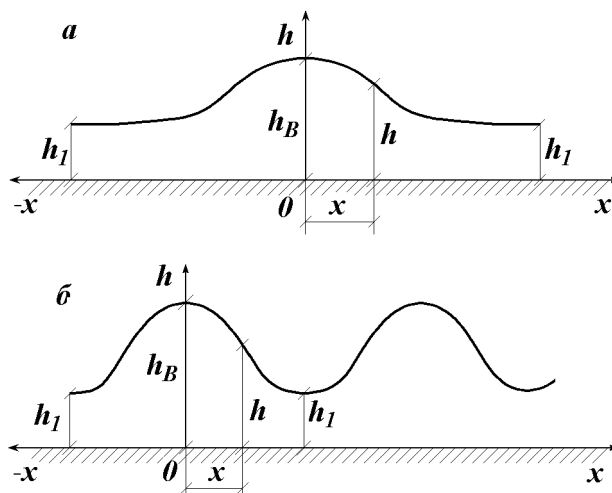


Рис. 4. Схеми білякритичних течій з хвилястою поверхнею:  
а – самотня хвиля; б – кноїдальні хвилі

$$h = h_1 + (h_B - h_1) \operatorname{sch}^2 \left[ \sqrt{\frac{3g}{q^2} (h_B - h_1) \frac{x}{2}} \right],$$

а профіль кноїдальних хвиль – такою залежністю [17, 19, 28, 29]:

$$h = h_1 + (h_B - h_1) \operatorname{cn}^2 \left( \frac{x}{\Delta}, k \right),$$

де  $\Delta$  і  $k$  – параметри, описувані наступними виразами:

$$\Delta = \sqrt{\frac{4h_B h_1 p}{3(h_B - p)}}, \quad k^2 = \frac{h_B - h_1}{h_B - p}, \quad p = \frac{c_c^2 h_c^2}{gh_B h_1},$$

де  $c_c$  і  $h_c$  – відповідно середні швидкість і глибина.

Тут необхідно підкреслити, що даний спосіб описання хвиль через їх максимальну  $h_B$  та мінімальну  $h_1$  глибини є цілком коректним і широко застосовується для описання синусоїдальних, трохоїдальних та інших типів хвиль. Проте цей спосіб має два істотних недоліки.

1. В більшості реальних випадків гідротехнічної практики максимальна глибина  $h_B$  хвилеподібних потоків апріорі є невідомою, причому визначення її є однією з головних задач розрахунків параметрів потоку та пов'язаних з ними відповідних розмірів гідротехнічних споруд, адже саме максимальна глибина  $h_B$  таких потоків визначає відмітки бровок каналів, низа прогінних балок мостів, висоту безнапірних тунелів, труб, галерей тощо.

2. Граничні умови в початковому перерізі розглядуваних явищ виявляються нерозкритими,

внаслідок чого вплив можливого викривлення потоку в їх початковому перерізі на формування явищ, їхні основні характеристики та умови існування залишається нев'ясненим.

Як видно з наведеної інформації, існуючі методи описання білякритичних течій є недосконалими, а число Фруда  $Fr_1$  в їх початковому перерізі не може однозначно описати ці течії.

В проведених дослідях особлива увага приділялася перевірці поставленої під сумнів традиційної точки зору, що в початковому перерізі хвилястого і досконалого стрибків, одиночної і самотньої хвиль та інших типів білякритичних течій потік завжди є паралельноструминним, а розподіл тиску по глибині підпорядковується гідростатичному закону. При наявності донних п'єзометрів ступінь відхилення від гідростатики в довільному перерізі потоку зручно оцінювати за допомогою коефіцієнтів негідростатичності  $s = h_{п.д.}/h$ , гідродинамічного тиску  $k = F_{e.г.д.т.}/F_{e.г.с.т.}$  та потенціальної енергії  $\beta = E_{пот}/h$ , де  $h_{п.д.}$  – значення п'єзометричного тиску на дні, виражене у висоті водяного стовпа,  $F_{e.г.д.т.}$  та  $F_{e.г.с.т.}$  – площі епюр відповідно гідродинамічного та гідростатичного тиску,  $E_{пот}$  – питома потенціальна енергія,  $h$  – глибина потоку. У випадку параболічного закону розподілу гідродинамічного тиску по глибині вказані коефіцієнти зв'язані між собою такими залежностями [12]:

$$\beta = \frac{1 + 2s}{3}; \quad k = \frac{4s - 1}{3}; \quad \beta = \frac{1 + k}{2}, \quad (8)$$

причому для гідростатичного розподілу тиску по глибині коефіцієнти  $s, k, \beta$  дорівнюють одиниці. Проведені дослідження [10 – 15] дозволили встановити, що вказана точка зору не відповідає дійсності. Фактично у багатьох випадках (а для деяких типів білякритичних течій – завжди) в початковому перерізі розглядуваних явищ потік є викривленим у вертикальній площині із ввігнутою кривою вільної поверхні, внаслідок чого розподіл тиску по глибині в зазначеному перерізі не підпорядковується гідростатичному закону.

Зроблений висновок добре ілюструють результати двох пар методичних дослідів, відображених на рис. 5 та в табл. 1. Ці досліді підібрані таким чином, що в кожній парі відповідно є однаковими витрати  $Q$ , початкові глибини  $h_1$  досліджуваних явищ, числа Фруда  $Fr_1$ , але різними значення другої спряженої глибини  $h_2$  (яка змінювалася в дослідях шляхом зміни глибини нижнього б'єфу) та ступінь викривлення потоку, а відповідно і ступінь відхилення від гідростатичного розподілу тиску в

початковому перерізі.

З інформації, наведеної на рис. 5 і в табл. 1, видно, що хоча в порівнюваних парах дослідів числа Фруда  $Fr_1$  є однаковими, проте обриси кривої вільної поверхні та п'єзометричної лінії, а відповідно і геометричні характеристики досліджуваних явищ (максимальна і друга спряжена глибини, висота і довжина хвиль та інші) істотно відрізняються між собою, причому в дослідях другої пари різними є навіть типи явищ.

Тиким чином, на основі отриманих даних можна зробити висновок, що для однозначного описання білякритичних течій в додаток до числа Фруда  $Fr_1$  в їх початковому перерізі необхідно враховувати ще й ступінь викривлення потоку у вертикальній площині або пов'язану з цим викривленням ступінь відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску в зазначеному перерізі, яку можна оцінювати за допомогою коефіцієнтів  $s_1, k_1, \beta_1$ .

#### 4. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ХВИЛЕПОДІБНИХ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ З ВРАХУВАННЯМ МОЖЛИВОГО ВИКРИВЛЕННЯ ПОТОКУ В ЇХ ПОЧАТКОВОМУ ПЕРЕРІЗІ ТА ОТРИМАНІ ЗАГАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Для описання хвильових явищ використовують різноманітні математичні моделі, основані на різних вихідних схемах. І. Т. Селезов [37] зазначає, що існує не менше 12 прийнятних математичних моделей хвильового руху рідини. Проте в жодній з існуючих цих моделей не враховується у явному вигляді можливе викривлення потоку у вертикальній площині в початковому перерізі хвилеподібних білякритичних течій.

Головна ідея запропонованої математичної моделі полягає у вираженні характеристик хвилеподібних білякритичних течій (див. рис. 6) через параметри потоку в їх початковому перерізі  $1-1$ , в якому потік може бути або ввігнутим ( $d^2h/dx^2 > 0$ ), або паралельноструминним ( $d^2h/dx^2 = 0$ ).

З метою вирішення поставленої задачі скористаємося рівнянням Серра питокої енергії довільного перерізу  $E_{пер} = E$  для різко змінного руху, виведеного стосовно умов плоскої задачі із диференціального рівняння Ейлера руху рідини з врахуванням нахилу та кривизни елементарних струминок у вертикальній площині [38]:

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} + \frac{q^2}{3gh} \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{q^2}{6gh^2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2.$$

Зауважимо, що в роботі [38] відповідна залежність стосовно тих же умов отримана також і для



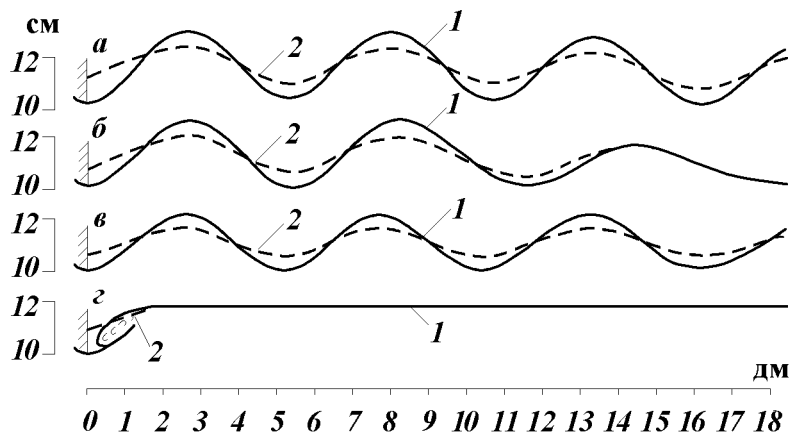


Рис. 5. Криві вільної поверхні 1 та п'езометричні лінії 2 для двох пар дослідів: а, б – з кноїдальними хвилями; в, г – з безстрибковим вальцевим спряженням б'єфів

Табл. 1. Основні характеристики дослідів, зображених на рис. 5

Номер дослідів	$Q$ , л/с	$h_1$ , см	$Fr_1$	$S_1$	$h_2$ , см	$h_B$ , см	Тип явища
а	96.6	10.0	0.96	1.06	11.6	13.2	кноїдальні хвилі
б	96.6	10.0	0.96	1.04	11.4	12.7	кноїдальні хвилі
в	92.5	10.0	0.88	1.05	11.3	12.6	кноїдальні хвилі
г	92.5	10.0	0.88	1.11	12.35	-	безстрибкове вальцеве спряження б'єфів

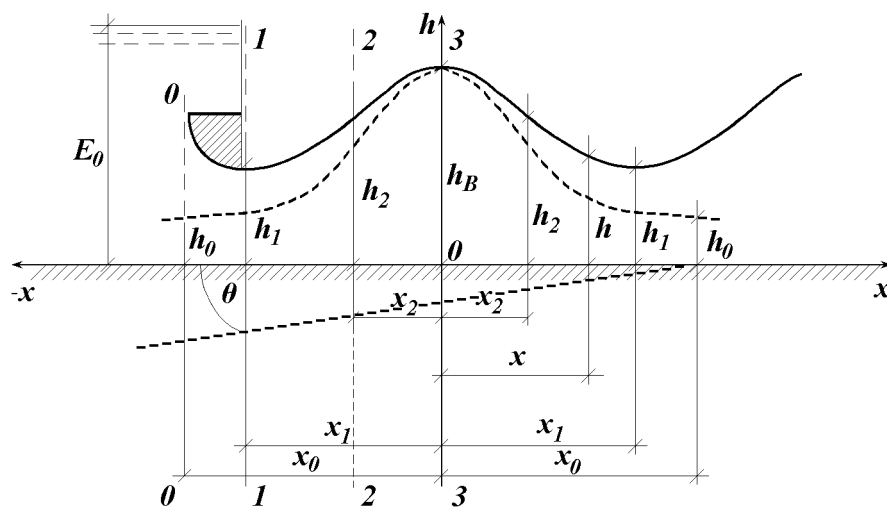


Рис. 6. Розрахункова схема хвильоподібних білякритичних течій

функції імпульсу (стрибкової функції)  $M$ .

Спеціальні дослідження потоків з криволінійною поверхнею [39, 40] дозволили встановити, що

у перерізах, проведених через екстремальні точки з максимальними і мінімальними глибинами, розподіл гідродинамічного тиску по глибині виявляє-

ться близьким до параболічного закону, для якого коефіцієнти  $s, k, \beta$  зв'язуються між собою співвідношеннями (15). Наявність цих залежностей дозволяє досить просто оцінювати експериментальним шляхом фактичне значення гідродинамічного тиску в зазначених перерізах потоку лише за показом донного п'єзометра  $h_{п.д.}$ , значення якого в сукупності із виміряною глибиною  $h$  у розглядуваному перерізі дозволяє швидко визначити потрібні коефіцієнти  $s, k, \beta$ . При цьому питому енергію  $E_1$  для перерізу 1 – 1 можна знаходити таким чином:

$$E_1 = \beta_1 h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2} = \frac{4s_1 - 1}{3} h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2}.$$

Математичну постановку задачі виразимо через питому енергію довільного перерізу  $E$  у вигляді наступної системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} E &= h + \frac{q^2}{2gh^2} + \frac{q^2}{3gh} \frac{d^2 h}{dx^2} - \\ &- \frac{q^2}{6gh^2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2, \\ \frac{dE}{dx} &= i - \frac{q^2}{C^2 h^3}, \\ \frac{dq}{dx} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

де  $i = \sin \Theta$  – похил дна;  $C$  – коефіцієнт Шезі.

Параметри потоку для характерних перерізів при вибраному положенні координатних осей можна визначити таким чином:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } x &= 0, \quad h = h_B, \quad \frac{dh}{dx} = 0, \\ \frac{d^2 h}{dx^2} &< 0, \quad E = E_B, \quad M = M_B; \\ \text{б) } x &= x_2, \quad h = h_2, \quad \frac{dh}{dx} > 0, \\ \frac{d^2 h}{dx^2} &= 0, \quad E = E_2, \quad M = M_2; \\ \text{в) } x &= x_1, \quad h = h_1, \quad \frac{dh}{dx} = 0, \\ \frac{d^2 h}{dx^2} &> 0, \quad E = E_1, \quad M = M_1; \\ \text{г) } x &= x_0 = \infty, \quad h = h_0, \quad \frac{dh}{dx} = 0, \\ \frac{d^2 h}{dx^2} &= 0, \quad E = E_0, \quad M = M_0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Індекси “0”, “1”, “2”, “3” в цих виразах і далі означають, що використані величини взяті відповідно для перерізів 0 – 0, 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3. Глибини в перерізах 1 – 1, 2 – 2 називаються першою і другою спряженими глибинами відповідно. При цьому вважається, що в перерізі 2 – 2 розподіл тиску по глибині наближено відповідає гідростатичному закону.

В результаті розгляду системи рівнянь (9) для граничних умов, визначених виразами (10), в роботі [24] виведено наступне узагальнене диференціальне рівняння профілю вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій, записане в розмірній (11) та безрозмірній (12) формах:

$$\left( \frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{3g}{q^2} \left\{ -h^3 + \left( 2\beta_1 h_1 + \frac{q^2}{gh_1^2} \right) h^2 - \right. \\ \left. - \left[ (2\beta_1 - 1) h_1^2 + \frac{2q^2}{gh_1} \right] h + \frac{q^2}{g} \right\}, \quad (11)$$

$$\left( \frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{3}{Fr_1} \left[ - \left( \frac{h}{h_1} \right)^3 + (2\beta_1 + Fr_1) \left( \frac{h}{h_1} \right)^2 - \right. \\ \left. - (2\beta_1 - 1 + 2Fr_1) \frac{h}{h_1} + Fr_1 \right]. \quad (12)$$

В роботі [24] знайдено також корені поліному правої частини рівнянь (11), (12), встановлено фізичний зміст цих коренів, здійснено інтегрування диференціальних рівнянь (11), (12) та отримано їх загальний розв'язок у вигляді наступної системи:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{h}{h_1} = 1 + (\eta_B - 1) \text{cn}^2 \left( \frac{x}{\Delta}, k \right), \\ \Delta &= 2h_1 \sqrt{\frac{\eta_B Fr_1}{3(\eta_B^2 - Fr_1)}}, \\ k &= \sqrt{\frac{\eta_B(\eta_B - 1)}{\eta_B^2 - Fr_1}}, \\ \eta_B &= \frac{1}{2} \left[ \frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 + \right. \\ &\left. + \sqrt{\left( \frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 \right)^2 - 4Fr_1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

На основі розробленої математичної моделі стосовно загального випадку, коли коефіцієнт негідростатичності  $s_1 \geq 1$ , автором виведено наступну залежність для визначення другої спряженої глибини  $h_2$  всього класу білякритичних течій:

$$\eta_2 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4s_1 - 1}{3} + 2Fr_1} \times$$

$$\times \cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{3\sqrt{3}\alpha_{02}\text{Fr}_1}{\sqrt{\left(\frac{4s_1-1}{3} + 2\text{Fr}_1\right)^3}} \right] \right\}, \quad (14)$$

де  $\alpha_{02}$  – коефіцієнт кількості руху в перерізі з другою спряженою глибиною, а також формулу для знаходження максимальної глибини  $h_B$  білякритичних течій з хвилястою поверхнею (це остання залежність в системі рівнянь (13)).

Відмітною особливістю залежностей (11), (12) та залежностей (13), (14) є те, що характеристики потоку в них однозначно (з точністю до значень коефіцієнтів Коріоліса та Буссінеска) виражаються через параметри потоку в початковому перерізі розглядуваних явищ – глибину  $h_1$ , число Фруда  $\text{Fr}_1$ , коефіцієнт негідростатичності  $s_1$ , причому розглядається загальний випадок можливо викривлення потоку у вертикальній площині в початковому перерізі білякритичних течій, тобто коли коефіцієнт негідростатичності  $s_1 \geq 1$ .

## 5. РОЗВ'ЯЗКИ ПОСТАВЛЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЧАСТИННОГО ВИПАДКУ ГІДРОСТАТИЧНОГО РОЗПОДІЛУ ТИСКУ ПО ГЛИБИНІ В ПОЧАТКОВОМУ ПЕРЕРІЗІ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ

У частинному випадку наявності в початковому перерізі розглядуваних явищ паралельнострумінного руху з гідростатичним розподілом тиску по глибині потоку вищеописана математична модель хвилеподібних білякритичних течій та отримані на її основі загальні розв'язки істотно спрощуються внаслідок рівності одиниці коефіцієнтів  $s_1, k_1, \beta_1$ . При цьому диференціальні рівняння (11) і (12) приймають відповідно такий вигляд:

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3g}{q^2} \left[ -h^3 + \left(2h_1 + \frac{q^2}{gh_1^2}\right) h^2 - \left(h_1^2 + \frac{2q^2}{gh_1}\right) h + \frac{q^2}{g} \right], \quad (15)$$

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3}{\text{Fr}_1} \left[ -\left(\frac{h}{h_1}\right)^3 + (2 + \text{Fr}_1) \left(\frac{h}{h_1}\right)^2 - (1 + 2\text{Fr}_1) \frac{h}{h_1} + \text{Fr}_1 \right]. \quad (16)$$

Розкривши круглі дужки і згрупувавши відповідним чином отримані члени, вдається істотно спростити диференціальні рівняння (15), (16) і звести їх до наступних виразів, зручних для інтегрування:

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3g}{q^2} (h - h_1)^2 \left(\frac{q^2}{gh_1^2} - h\right), \quad (17)$$

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3}{\text{Fr}_1} \left(\frac{h}{h_1} - 1\right)^2 \left(\text{Fr}_1 - \frac{h}{h_1}\right). \quad (18)$$

Зауважимо, що диференціальні рівняння (17), (18) отримали в свій час Г. Ламб, І. Іваса та інші вчені [41, 42], хоча вони вивели їх з інших вихідних умов.

Інтегрування диференціальних рівнянь (17), (18) дає відому формулу профілю вільної поверхні самотньої хвилі [24]:

$$\eta = \frac{h}{h_1} = 1 + (\text{Fr}_1 - 1) \text{sch}^2 \left[ \sqrt{\frac{3(\text{Fr}_1 - 1)}{\text{Fr}_1}} \frac{x}{2h_1} \right]. \quad (19)$$

Цей вираз співпадає з відповідними розв'язками Г. Ламба, Н. Н. Моїсєєва і А. М. Тер-Крикорова, В. Г. Веземського, В. В. Сміслова [17, 32, 41].

Частинний розв'язок (19) можна отримати також безпосередньо із загального розв'язку системи рівнянь (13), поклавши  $s_1 = 1$ . В такому випадку залежність (13) зводиться до формули (4), модуль еліптичних функцій  $k = 1$ , параметр  $\Delta$  перетворюється до виразу

$$\Delta = 2h_1 \sqrt{\frac{\text{Fr}_1}{3(\text{Fr}_1 - 1)}},$$

а еліптичний косинус вироджується в гіперболічний секанс

$$\text{cn} \left( \frac{x}{\Delta}, 1 \right) = \text{sch} \frac{x}{\Delta}.$$

При цьому загальний розв'язок у вигляді системи рівнянь (13) зводиться до однієї-єдиної формули (19) профілю самотньої хвилі.

Для встановлення всього комплексу умов існування самотньої хвилі, описуваної формулою (19), в додаток до умови

$$s_1 = 1, \quad (20)$$

використаної в цьому пункті, необхідно визначити область існування чисел Фруда  $\text{Fr}_1$  в її початково-

му перерізі. З цією метою скористаємось формулою Рассела – Буссінеска (4), дійсною для даного випадку. Аналіз цієї формули показує, що вона справедлива лише при виконанні умови

$$Fr_1 > 1, \quad (21)$$

адже при числах Фруда  $Fr_1 \leq 1$  максимальна глибина потоку  $h_B \leq 1$ , що не відповідає умовам поставленої задачі (див. рис. 6).

Таким чином, існування самотньої хвилі, описуваної залежністю (19), можливо лише при одночасному виконанні умов (20) і (21).

На закінчення даного пункту зазначимо, що загальна формула (14) спряжених глибин білякритичних течій в частинному випадку при  $s_1 = 1$  та коефіцієнтах кількості руху  $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 1$  приймає вигляд

$$\eta_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2Fr_1} \times \\ \times \cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{3\sqrt{3}Fr_1}{\sqrt{(1 + 2Fr_1)^3}} \right] \right\},$$

що тотожний формулі Беланже (3), виведеній для досконалого гідравлічного стрибка. Крім того, загальна формула для визначення максимальної глибини хвилеподібних білякритичних течій (де остання залежність у системі рівнянь (13) у випадку гідростатичного розподілу тиску по глибині в її початковому перерізі, тобто при  $s_1 = 1$ , як це вже було зазначено вище, зводиться до відомої формули (4) Рассела – Буссінеска для самотньої хвилі.

## ВИСНОВКИ

1. Проведені експериментальні дослідження усталених білякритичних течій та аналіз накопиченої інформації про такі течії і білякритичні хвилі переміщення показали, що в початковому перерізі розглядуваних явищ можливе викривлення потоку у вертикальній площині, неврахування якого може призвести до хибних результатів. І саме завдяки наявності чи відсутності такого викривлення можна пояснити природу суперечливих явищ, описаних у першому параграфі.

2. Для розкриття існуючих суперечностей і неоднозначностей в трактуванні термінів „солітон”, „самотня” і „одиначна” хвилі необхідно встановити критерії, які можуть ідентифікувати дане явище і враховувати можливе викривлення потоку у

вертикальній площині в початковому перерізі цих явищ.

3. Використовуваний метод описання самотньої та кноїдальних хвиль через максимальну  $h_B$  і мінімальну  $h_1$  їх глибини є недосконалим, адже в більшості випадків гідротехнічної практики максимальна глибина потоку  $h_B$  апіорі є невідомою, а визначення її є однією з головних задач виконуваних розрахунків. Крім того, граничні умови в початковому перерізі розглядуваних явищ при цьому методі є нерозкритими, внаслідок чого вплив можливого викривлення потоку в цьому перерізі на формування явищ, їхні характеристики та умови існування залишаються невиясненими.

4. Побудована математична модель хвилеподібних білякритичних течій рідини, виведені узагальнені диференціальні рівняння профілю вільної поверхні цих течій (11), (12) та отримані розв'язки враховують у явному вигляді характеристики потоку в початковому перерізі цих течій, в тому числі і можливе викривлення потоку у вертикальній площині.

1. *Lamb G. L.* Elements of soliton theory.– New York: John Wiley, 1980.
2. *Newell A. C.* Solitons in mathematics and physics.– Soc. for Ind. and Appl. Math.: University of Arizona, 1985.– p.
3. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питяевский Л. П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи.– М.: Наука, 1980.– 320 с.
4. *Петвиашвили В. И., Похотелов О. А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере.– М.: Энергоатомиздат, 1989.– 200 с.
5. *Rajaraman R.* Solitons and instantons.– Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1982.
6. *Селезов И. Т.* Волновые процессы в гидродинамических и упругих средах // Прикладная гидромеханика.– 2000.– **2** (74), **N 4**.– С. 99–118.
7. *Russel J. S.* Report on waves // Report of British Association for the Advancement of Science.– London, 1844.– P. 311–390.
8. *Lonngren K., Scott A. C., eds.* Solitons in Action.– New York: Academic Press, 1978.
9. *Bullough R. K., Caudrey P. J., eds.* Solitons.– New York: Springer-Verlag, 1980.
10. *Riabenko A. A.* Conditions favorable to the existence of an undulating jump // Hydrotechnical Construction. Translated from Russian. – Consultants Bureau, New York.– December 1990 – June 1991.– **24**, **N 12**.– P. 762–770.
11. *Рябенко А. А.* О распределении давления по глубине потока за затворами с плавным очерганием нижней части // Гидравлика и гидротехника. – К.: Техніка.– 1974.– **18**.– С. 139–144.
12. *Рябенко А. А.* Экспериментальные исследования сопряженных глубин околоскритических течений // Гидравлика и гидротехника.– К.: Техніка.– 1977.– **25**.– С. 70–78.

13. Рябенко А. А. Экспериментальные исследования максимальной глубины околоскритических течений с волнообразной поверхностью // Гидравлика и гидротехника. - К.: Техніка.- 1985.- **41**.- С. 45–50.
14. Рябенко А. А. Условия существования уединенной волны // Гидравлика и гидротехника.-К.: Техніка.- 1989.- **49**.- С. 35–41.
15. Riabenko A. A. Types, characteristics and conditions of existence of near-critical flows Hydrotechnical Construction. Translated from Russian // Consultants Bureau, New York.- May–November 1992.- **26**, N 5.- P. 269–275.
16. Мельников А. Н. Несовершенный прыжок воды в прямоугольном призматическом русле с горизонтальным дном // Труды НИИИ.- 1958.- **6**.- С. 509–526.
17. Вережемский В. Г. О прыжке и сужении бурного потока: Автореф. Дис. канд.техн.наук.- МГМИ: М., 1967.- 14 с.
18. Смыслов В. В. Высота волнистого прыжка и критерий перехода его к совершенному гидравлическому прыжку // Изв. вузов. Строительство и архитектура.- 1964.- N 2.- С. 102–106.
19. Турсунов А. А. Околоскритическое состояние безнапорных потоков воды // Изв. ВНИИГ.- 1969.- **90**.- С. 201–224.
20. Эшмурадов Ю. Исследование процессов формирования положительных волн перемещения в каналах.- Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.14.9: Л., 1975.- 21 с.
21. Нышанов Е. Волны перемещения в машинных каналах.- Автореф. дис. канд. техн.наук: 05.14.09: К., 1988.- 24 с.
22. Bjussinesq J. Th'eorie de l'intumescence liquide, appellee onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire // Compt. Ren. Acad. Sci. Paris.- **72**.- 1871.- P. 755–759.
23. Смыслов В. В. Об остановившейся волне в бурном потоке жидкости // Изв. вузов. Энергетика.- 1964.- N 3.- С. 104–110.
24. Riabenko A. A. Free surface profile of wavelike near-critical flows and solitary solutions of some differential equations // Int. Journ. Fluid Mech. Research.- 2001.- **28**, N 6.- P. 834–856.
25. Kodama U., Ablowitz M. J. Perturbation of solitons and solitary waves // Stud. Appl. Math.- 1981.- **64**, N 3.- P. 225–245.
26. Bardos C. Ordes solitaires et solitons // Boll. Umone mat. ital.- 1979.- A 16, N 1.- P. 21–47.
27. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.- К.: Наукова думка, 1981.- 284 с.
28. Littman W. On the existence of periodic waves with near critical speed // Comm. Pure Appl. Math.- **10**.- 1957.- P. 241–269.
29. Wiegel R. L. A presentation of cnoidal wave theory for practical application // Journal of Fluid Mechanics.- **7**, part 2.- Feb. 1960.- P. 273–286.
30. Чугаев Р. Р. Гидравлика.- Л.: Энергоиздат, 1982.- 672 с.
31. Chow V. T. Open channel hydraulics.- McGraw-Hill: New York, 1959.- 204 p.
32. Смыслов В. В. Исследование уединенной волны с помощью одномерной теории // Гидравлика и гидротехника. - К.: Техніка.- **9**, 1970.- С. 21–25.
33. Friedrichs K. O., Hayers D. H. The existence of solitary waves // Comm. Pure Appl. Math.- **7**.- 1954.- P. 517–550.
34. Заиров Х. И. О профиле уединенной волны в призматическом русле // Сб. научных трудов СА-НИИРИ, Ташкент.- 1974.- **140**.- С. 136–144.
35. Riabenko A. A. Representation of a wave jump and group of translation waves as a combination of a solitary wave and cnoidal waves // Hydrotechnical Construction. Translated from Russian.-Consultants Bureau, New York.- May–November 1998.- **32**, N 5.- P. 246–252.
36. Слисский С. М. Гидравлические расчеты высоконапорных гидротехнических сооружений.- М.: Энергоатомиздат, 1986.- 304 с.
37. Селезов И. Т., Сидорчук В. Н., Яковлев В. В. Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа.- К.: Наукова думка, 1983.- 208 с.
38. Serre F. Contribution a letude des 'econlements permanents et variables dans les canaux // La Houille Blanche.- 1953.- № 3.- P. 374–388.
39. Смыслов В. В. Теория водослива с широким порогом.- К.: Изд-во АН УССР, 1956.- 184 с.
40. Khafagi A., Hammad S. Z. Velocity and Pressure Distribution in Curved Stream - Line Flov // Water and Water Engineering.- 1954.- March.- P. 106–115.
41. Lamb H. Hydrodynamics.- Donver: New York, 1932.
42. Iwasa Y. Analytical Consideration on Cnoidal and Solitary Waves // Memoirs of Facul. of Engineering, Kyoto University.- 1955.- **17**, N 3.- P. 264–276.