

ПРОГРАМНЕ СЕРЕДОВИЩЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ КОМПОЗИТІВ З МІЖФАЗОВОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Abstract: Features of designing and implementation of the software environment intended for computer modelling of linear and nonlinear dynamic problems of composites with interphase interaction are considered. Functionality of the created application package, its structure and algorithm are described. The results of numerical realization of dynamic problems, found by means of the developed environment, for a representative element of one composite system, are given.

Key words: computer modelling, dynamic problem, application package, composites, interphase interaction.

Анотація: Розглянуто особливості проектування та реалізації програмного середовища, призначеного для комп'ютерного моделювання лінійних і нелінійних задач динаміки композитів з міжфазовою взаємодією. Описано функціональне наповнення створеного пакета прикладних програм, його структуру та алгоритм роботи. Наведено результати чисельної реалізації динамічних задач для представницького елемента однієї композитної системи, отримані за допомогою розробленого середовища.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, динамічна задача, пакет прикладних програм, композити, міжфазова взаємодія.

Аннотация: Рассмотрены особенности проектирования и реализации программной среды, предназначенной для компьютерного моделирования линейных и нелинейных задач динамики композитов с межфазным взаимодействием. Описано функциональное наполнение созданного пакета прикладных программ, его структуру и алгоритм работы. Приведены результаты численной реализации динамических задач для представительского элемента одной композитной системы, полученные с помощью разработанной среды.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, динамическая задача, пакет прикладных программ, композиты, межфазное взаимодействие.

1. Вступ

В останні десятиріччя розвиток науки і техніки багато в чому пов'язаний з дослідженням динамічних процесів у деформівних тілах з анізотропією і неоднорідністю фізико-механічних властивостей. Точні розв'язки систем диференціальних рівнянь гіперболічного типу з умовами спряження, якими описуються коливання неоднорідних пружних середовищ, вдається отримати лише для окремих частинних випадків. Задачі для систем лінійних або нелінійних динамічних рівнянь з коефіцієнтами загального вигляду, а також в областях довільної форми, розв'язати за допомогою точних методів досить складно або навіть неможливо. Тому найбільш ефективно досліджувати такі задачі чисельними методами із застосуванням сучасних комп'ютерних технологій.

Ефективне використання можливостей комп'ютерного моделювання для реалізації динамічних моделей у значній мірі залежить від програмного забезпечення, яке повністю автоматизує процес формулювання та розв'язання задачі. Останнім часом для чисельного дослідження прикладних задач, окрім спеціалізованих програмних засобів, широко застосовують універсальні математичні системи. Серед таких систем найбільш поширеними та популярними є Maple, MathCad, Mathematica, MATLAB, Scilab. За своєю функціональністю їх можна поділити на дві категорії: пакети, призначені для чисельних обчислень (наприклад, MATLAB, Scilab), та системи символічних або аналітичних обчислень (Mathematica, Maple, АНАЛИТИК [1] тощо). Розв'язування динамічних задач за допомогою аналітичних методів пов'язане зі значними обчислювальними труднощами, тому для моделювання таких задач краще застосовувати пакети, призначені для чисельних обчислень. Проте навіть такі універсальні системи не завжди відповідають усім вимогам, необхідним для розв'язання тієї чи іншої конкретної задачі. Так, жодний з відомих нам

математичних пакетів не має засобів для розв'язування динамічних задач з умовами спряження неідеального контакту. У зв'язку з цим актуальною є розробка програмного середовища для моделювання задач динаміки композитів з урахуванням міжфазової взаємодії компонентів.

2. Вимоги до програмного середовища моделювання динамічних задач композитів з міжфазовою взаємодією

Основні вимоги до програмного середовища для комп'ютерного моделювання задач динаміки композитів з міжфазовою взаємодією визначаються як загальними вимогами до застосованих алгоритмів та їх реалізації, так і специфікою самих математичних моделей задач механіки композитів з міжфазовими утвореннями.

На даний час найбільш розповсюдженими методами дискретизації задач механіки є метод скінченних різниць; спектральний метод; метод скінченних елементів (МСЕ); метод граничних елементів. У роботі [2] проведено порівняльний аналіз ефективності наведених методів. У лінійних динамічних задачах механіки твердого тіла МСЕ найбільш розповсюджений, у той час, як використання методу граничних елементів для розв'язання даних задач знаходиться на другому місці. Для нелінійних задач механіки МСЕ є найбільш ефективним і домінуючим. Він може застосовуватись при дослідженні скінченних деформацій фізично нелінійних анізотропних середовищ будь-якої геометричної форми при довільних крайових умовах [3].

З урахуванням вищезазначеного, а також результатів порівняльного аналізу [2], на нашу думку, найефективнішим методом розв'язування задач динаміки композитів з міжфазовою взаємодією є МСЕ. Головними його перевагами при розв'язуванні динамічних задач механіки композитів у порівнянні з іншими перерахованими чисельними методами є [4]:

- ефективність застосування до нелінійних задач;
- можливість розв'язання задач у неоднорідних середовищах, що складаються з декількох компонентів з відмінними характеристиками;
- легкість дискретизації областей складної форми;
- відсутність обмежень на розміри скінченних елементів, що дозволяє при необхідності здійснювати укрупнення або подрібнення скінченно-елементної сітки в околі геометричних особливостей;
- універсальність програмної реалізації та можливість повної автоматизації знаходження розв'язку задачі.

Ефективність програмного забезпечення для моделювання за МСЕ залежить від таких основних факторів [5]: застосування ефективних скінченних елементів, вибір відповідного математичного апарата (алгоритмів), використання можливостей математичного забезпечення комп'ютера. Для отримання результатів високої точності необхідно використовувати ефективні чисельні методи, а також достатньо дрібні скінченно-елементні сітки. Це призводить до великих обсягів проміжних і кінцевих результатів обчислень, а отже збільшення часу виконання розрахунків. У зв'язку з цим реалізацію обчислювальних методів треба проводити з особливою ретельністю для мінімізації числа виконуваних операцій та оптимального використання пам'яті комп'ютера [5].

Програмне середовище для моделювання задач динаміки композитів з міжфазовою взаємодією повинно реалізовувати основні етапи розв'язування задач за допомогою МСЕ:

- 1) побудова геометричної моделі представницького елемента композитного матеріалу;
- 2) вибір рівняння та задання його коефіцієнтів, які являють собою фізико-механічні властивості компонентів композиту;
- 3) постановка крайових і початкових умов, а також умов спряження на межах міжфазового утворення;
- 4) побудова скінченно-елементної сітки;
- 5) знаходження розв'язку початково-крайової задачі;
- 6) візуалізація результатів.

Важливим аспектом є також забезпечення гнучкості програмного забезпечення, зручного інтерфейсу користувача, насамперед з точки зору підготовки вхідних даних та їх введення в програму, можливості ефективного виведення проміжної інформації та кінцевих результатів.

3. Математичні моделі задач динаміки композитів з міжфазовими утвореннями

Розглянемо функціональне наповнення зазначеного програмного середовища, а саме математичні моделі динамічних задач композитів з міжфазовою взаємодією компонентів.

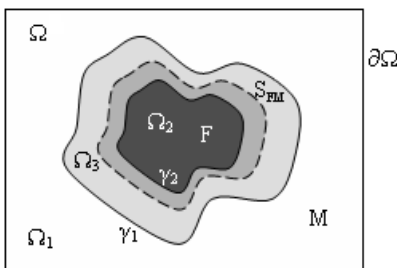


Рис. 1. Схема представницького елемента композитної системи

Приймається, що композитний матеріал моделюється кусково-однорідним середовищем, представницький елемент якого складається з трьох областей: матриці $M (\Omega_1)$, яка з'єднується з армуючим волокном $F (\Omega_2)$ за допомогою міжфазового перехідного утворення $S_{FM} (\Omega_3)$ (рис. 1). Постановки всіх задач виконуються на рівні такого представницького елемента.

Зміщення точок (x_1, x_2) кожної з трьох областей Ω_k ($k = 1, 2, 3$) під дією зовнішніх сил протягом часу t описується наступною системою рівнянь динамічної рівноваги [6]:

$$\begin{aligned} \mu_k \Delta u_1 + (\lambda_k + \mu_k) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_1(x_1, x_2, t) &= \rho_k \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \mu_k \Delta u_2 + (\lambda_k + \mu_k) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_2(x_1, x_2, t) &= \rho_k \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $u_1(x_1, x_2, t)$, $u_2(x_1, x_2, t)$ – компоненти вектора переміщень по координатних осях Ox_1, Ox_2 ; λ_k, μ_k – сталі пружності Ламе кожної із областей Ω_k ($k = 1, 2, 3$); ρ_k – густина середовища, зайнятого відповідною областю; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа; $f_1(x_1, x_2, t)$, $f_2(x_1, x_2, t)$ – компоненти вектора зовнішніх сил; t – час, $t \in (0, T]$.

Такі рівняння мають місце в кожній із областей Ω_k^T ($\Omega_k^T = \Omega_k \times (0, T]$, $k = 1, 2, 3$).

Слід зазначити, що спряження області $\overline{\Omega}_1$ з областю Ω_3 здійснюється по кривій γ_1 , відповідно $\overline{\Omega}_2$ з Ω_3 – по γ_2 .

Крайові та початкові умови задачі:

$$u_i = \varphi_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2 \text{ при } (x_1, x_2, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (2)$$

$$u_i(x_1, x_2, 0) = U_{i0}(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_i(x_1, x_2, 0)}{\partial t} = U_{i1}(x_1, x_2), \quad i = 1, 2 \text{ при } t = 0, (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}, \quad (3)$$

де $\varphi_i(x_1, x_2, t)$, $U_{i0}(x_1, x_2)$, $U_{i1}(x_1, x_2)$ – задані функції, $\partial\Omega$ – межа області представницького елемента Ω ; $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Окрім того, на межах міжфазового утворення S_{FM} задаються неоднорідні умови спряження [6]:

$$[u_n] = 0, \quad (x_1, x_2, t) \in \gamma_j \times (0, T], \quad (4)$$

$$\sigma_n = -p, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_j^- \cup \gamma_j^+, \quad t \in (0, T], \quad (5)$$

$$[\tau_s] = 0, \quad \{\tau_s\}^\pm = R[u_s], \quad (x_1, x_2, t) \in \gamma_j \times (0, T]. \quad (6)$$

Тут γ_j ($j = 1, 2$) – поверхні контакту міжфазової області з матрицею та волокном (рис. 1); u_n, u_s (σ_n, τ_s) – відповідно нормальна та дотична складові вектора переміщень (напружень); n – нормаль до $\partial\Omega_k$, де $\partial\Omega_k$ – межа області Ω_k ($k = 1, 2, 3$); $[\psi]$ – стрибок функції ψ на поверхні γ_j , $[\psi] = \psi^+ - \psi^-$; p – напруження (тиск) на поверхнях γ_j ; $R = const \geq 0$ (при $R = 0$ на поверхнях γ_j відсутнє тертя).

Реальні умови функціонування, отримання та експлуатації композитних систем вимагають дослідження задач про коливання цих систем у нелінійній постановці. Такі задачі є досить актуальними, проте до цього часу вони залишаються недостатньо вивченими.

Система рівнянь, що описує нелінійні коливання представницького елемента композитного середовища, має вигляд

$$\begin{aligned} \mu_k \Delta u_1 + [u_1, u_2] + f_1(x_1, x_2, t) &= \rho_k \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \mu_k \Delta u_2 + [u_1, u_2] + f_2(x_1, x_2, t) &= \rho_k \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $[u_1, u_2] = D_1^2 u_1 \cdot D_2^2 u_2 + D_2^2 u_1 \cdot D_1^2 u_2 - 2D_1 D_2 u_1 \cdot D_1 D_2 u_2$ ($D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$) – оператор, який

визначає нелінійність крайової задачі [7].

Система (7) доповнюється відповідними крайовими умовами (2), початковими умовами (3), а також умовами спряження (4)–(6) на межах міжфазового утворення. Отримана таким чином

початково-крайова задача динамічної рівноваги композитного середовища є неоднорідною та нелінійною. Єдиним ефективним способом її дослідження є чисельна реалізація з використанням сучасних програмних засобів.

4. Особливості реалізації програмного середовища моделювання динамічних задач композитів з міжфазовою взаємодією

Виходячи з розглянутих вище вимог, систему комп'ютерного моделювання задач динаміки композитів з міжфазовою взаємодією доцільно реалізувати у вигляді пакета прикладних програм, побудованих з використанням модульного принципу організації. Така організація програмного середовища надає можливості його модифікації та розширення – доповнення новими модулями для розв'язування нових класів задач.

Нами було розроблено пакет програм CSTool, призначений для моделювання наведених у п.3 лінійної та нелінійної динамічних задач композитів з урахуванням міжфазової взаємодії компонентів [8, 9]. Архітектура створеного програмного середовища цілком відповідає етапам розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними за допомогою МСЕ.

Структура пакета визначається його функціональністю і складається з таких підсистем (рис. 2):

- функціонально-графічний інтерфейс – інтерфейс користувача, призначений для формування вхідних даних, відображення скінченно-елементної сітки та візуалізації результатів обчислень;

- підсистема формування скінченно-елементної сітки – містить модулі для генерації сітки з нумерацією елементів та вузлів, а також модулі для її подрібнення;

- підсистема знаходження наближеного розв'язку задачі – набір модулів, що реалізують розв'язання початково-крайових задач для систем диференціальних рівнянь у частинних похідних. Включає в себе функції для розв'язування лінійних і нелінійних рівнянь.

У свою чергу функціонально-графічний інтерфейс можна розбити на такі підсистеми:

- підсистема формування вхідних даних – набір модулів, які реалізують визначення користувачем геометричної моделі (побудову областей), вибір системи диференціальних рівнянь та введення її коефіцієнтів, задання крайових, початкових умов та умов спряження;

- підсистема відображення скінченно-елементної сітки – набір функцій для візуального зображення сітки, згенерованої у підсистемі формування скінченно-елементної сітки;

- підсистема візуалізації розв'язку – набір модулів, призначених для графічного відображення отриманого розв'язку (у вигляді поля, поверхні розв'язку, ліній рівня).

Підсистема знаходження наближеного розв'язку задачі містить:

- модуль обчислення базисних функцій для кожного скінченного елемента;

- модуль побудови матриць жорсткості та маси окремих елементів;

- модуль формування глобальних матриці жорсткості та матриці маси, а також вектора вузлових сил;

- модуль розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР).

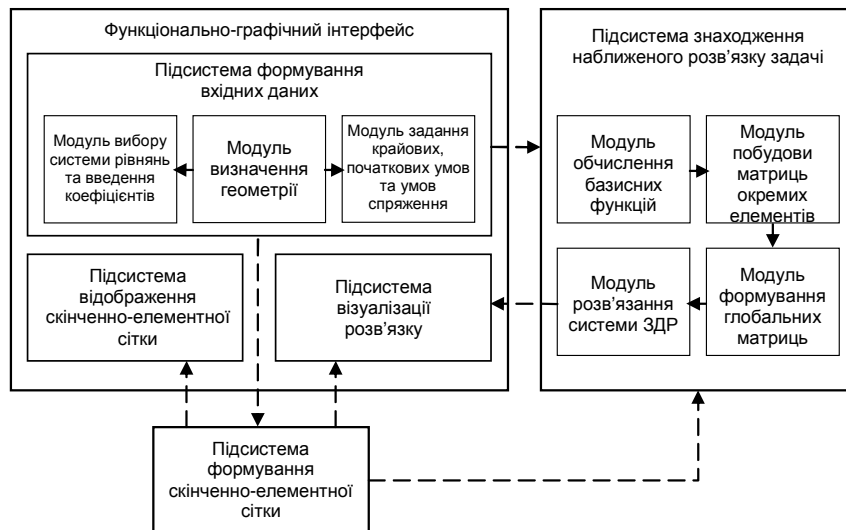


Рис. 2. Структура пакета програм CSTool

Всі програми розроблені на мові програмування середовища MATLAB та, у відповідності з концепцією пакетів прикладних програм (MATLAB Application Toolboxes), прийнятою у системі MATLAB, об'єднані в єдиний пакет для моделювання задач динаміки композитів з міжфазовою взаємодією. Це надає наступні переваги

розробленому середовищу моделювання:

- можливість сумісного використання з іншими пакетами розширення, що входять до складу MATLAB;
- можливість застосування функцій, написаних на мові програмування MATLAB як шаблонів для розробки нових додатків;
- можливість використання в рамках системи MATLAB на будь-якій обчислювальній платформі.

При розробці середовища комп'ютерного моделювання динамічних задач композитів з міжфазовою взаємодією як шаблон було взято пакет розширення PDE Toolbox системи MATLAB. Проте даний пакет PDE Toolbox зовсім не надає можливостей для моделювання розглянутих у п.3 початково-крайових задач для систем рівнянь динамічної рівноваги, а тим більше з умовами спряження. Тому для розв'язання задач такого типу нами здійснено модифікацію вже існуючих функцій даного пакета та розроблено нові функції. Суттєвим доповненням слід вважати такі реалізовані нами функції, призначені для:

- побудови дискретизованих варіантів систем лінійних та нелінійних рівнянь динамічної рівноваги;
- забезпечення можливості задання та врахування умов спряження на межах контакту областей, що складають композитну систему;
- введення подвійної нумерації вузлів на межах поділу областей після проведення їх триангуляції.

При практичній реалізації середовища моделювання використано ідеологію об'єктно-орієнтованого програмування [10].

Алгоритм роботи програми відповідає схемі обчислень за МСЕ і складається з таких основних етапів:

- 1) підготовка вхідних даних;
- 2) формування скінченно-елементної сітки;

- 3) обчислення наближеного розв'язку задачі;
- 4) обробка результатів обчислень.

На початку роботи програми відбувається створення елементів управління графічного інтерфейсу, а також ініціалізація необхідних об'єктів значеннями по замовчуванню. Після завершення створення графічного інтерфейсу програма переходить в режим очікування дій користувача, якому надається можливість визначення геометрії та задання всіх необхідних параметрів моделі: кількості диференціальних рівнянь; типу рівнянь та значення їх коефіцієнтів; крайових, початкових умов та умов спряження. Якщо користувач не задасть деякі з цих параметрів, їм надаються значення по замовчуванню.

Після введення параметрів моделі здійснюється триангуляція заданих користувачем областей з можливістю подальшого подрібнення сітки для отримання більш точних результатів моделювання. Якщо були задані умови спряження на межах контакту областей, вводиться подвійна нумерація вузлів на цих межах. На наступному етапі відбувається обчислення базисних функцій та формування матриць МСЕ з урахуванням умов спряження (якщо вони були задані) чи без урахування цих умов [11]. Далі відбувається розв'язування системи ЗДР, коефіцієнтами яких є отримані на попередньому етапі матриці. Для обчислення розв'язку застосовуються ітераційні методи. Після знаходження розв'язку здійснюється його візуалізація у вигляді поля, поверхні чи ліній рівня. Окрім того, існує можливість відображення розв'язку у різні моменти часу.

Програмне середовище моделювання динамічних задач композитів з міжфазовою взаємодією реалізоване у двох варіантах:

- у вигляді окремого MATLAB-додатку з графічним інтерфейсом користувача (створення графічного інтерфейсу обумовлено тим, що розроблена система позиціонується як додатковий спеціалізований пакет середовища MATLAB);

- у вигляді автономного додатку, який можна використовувати поза середовищем MATLAB як незалежний програмний продукт для операційної системи Windows XP.

Вимоги до програмного забезпечення для експлуатації цих двох середовищ є різними. Відповідний MATLAB-додаток був розроблений у пакеті MATLAB 7.0. Тому для його використання необхідно, щоб на комп'ютері був встановлений MATLAB 7-ї версії. Для функціонування автономного додатку наявність встановленого MATLAB 7.0 не вимагається. Для завантаження цього додатку на комп'ютері без MATLAB треба встановити Matlab Component Runtime – пакет файлів динамічно зв'язуваних бібліотек DLL (Dynamic Linked Library), які поставляються фірмою-розробником MATLAB – The MathWorks Inc. – і містять всі необхідні функції для запуску та роботи програми.

5. Результати комп'ютерного моделювання задач динаміки композитів з міжфазовою взаємодією компонентів

Наведемо деякі з результатів чисельної реалізації задач динамічної рівноваги для представницького елемента композитної системи. Комп'ютерне моделювання виконувалось в середовищі MATLAB за допомогою розробленого нами пакета CStool для моделювання динамічних задач композитів з міжфазовою взаємодією.

Чисельні дослідження проводились для волокнистого композитного матеріалу $Al - B$, що являє собою алюмінієву матрицю, армовану волокнами бора. Для представницького елемента, зображеного на рис. 1, безрозмірні значення пружних сталей і густини матриці (область Ω_1), армуючої компоненти (область Ω_2) та міжфазового утворення (область Ω_3) приймалися рівними відповідно $\mu_1 = 0,26$, $\lambda_1 = 0,51$, $\rho_1 = 0,027$, $\mu_2 = 1,7$, $\lambda_2 = 1,45$, $\rho_2 = 0,0263$, $\mu_3 = 0,98$, $\lambda_3 = 0,98$, $\rho_3 = 0,02665$. Для міжфазового прошарку наведені значення обраховувались за правилами теорії суміші значень матричного матеріалу та волокна.

Нами проведено значну кількість чисельних експериментів для різних випадків зовнішнього навантаження, крайових і початкових умов, умов спряження, а також характерних розмірів армуючої компоненти F та міжфазового утворення S_{FM} [8, 9].

На рис. 3 зображені поверхні розв'язку лінійної задачі динамічної рівноваги (1)–(6) для випадку однорідних крайових і початкових умов, неоднорідних умов спряження неідеального контакту та зовнішнього навантаження $f_1 = \sin(x_2)$, $f_2 = \sin(x_1)$.

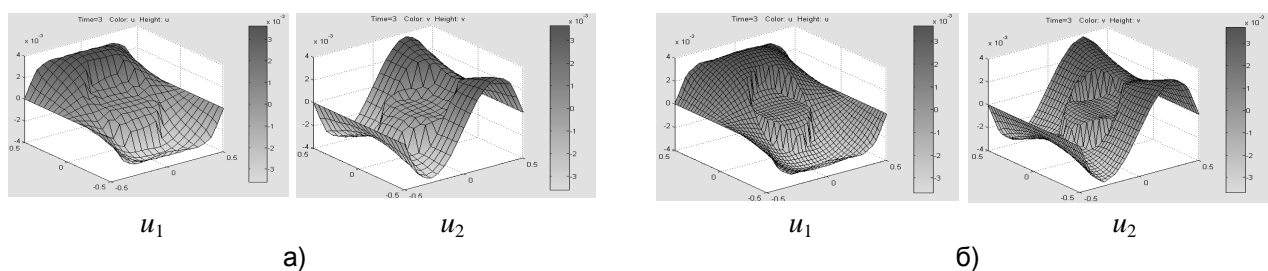


Рис. 3. Поверхні наближеного розв'язку лінійної задачі в момент часу $t = 3c$: а) діаметр волокна 0,4, ширина міжфазового утворення 0,05; б) діаметр волокна 0,4, ширина міжфазового утворення 0,01

Результати комп'ютерного моделювання нелінійної початково-крайової задачі (7) для різних моментів часу t зображені на рис. 4. Поверхні розв'язку наводяться тільки для компоненти u_1 , оскільки для u_2 вони мають аналогічний вигляд.

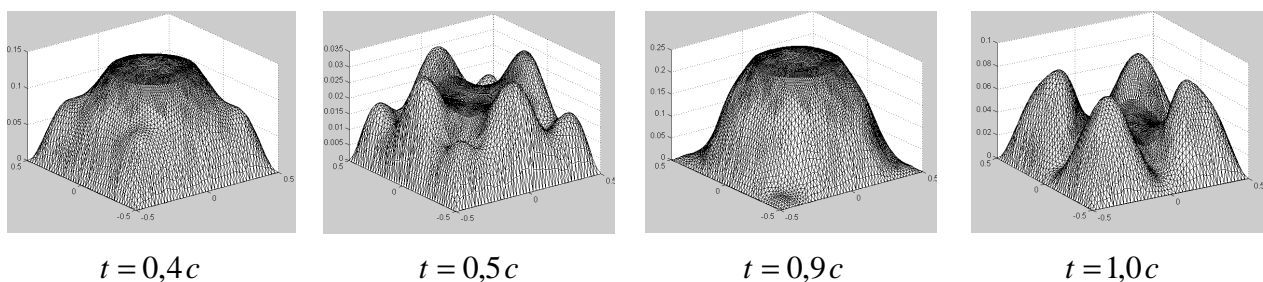


Рис. 4. Наближений розв'язок нелінійної задачі для діаметра волокна 0,4 та ширини міжфазового прошарку 0,05

При цьому приймалось, що на представницький елемент композитного середовища діє зовнішня сила $f_1 = e^{u_1 t}$, $f_2 = e^{u_2 t}$, а також задавались однорідні крайові, початкові умови та умови спряження ідеального контакту на межах міжфазового утворення.

6. Висновки

Розроблений пакет прикладних програм завдяки органічній сумісності зі стандартними засобами середовища MATLAB дозволяє значно розширити можливості цього середовища для розв'язування динамічних задач з умовами спряження. Створений програмний засіб надає можливості комп'ютерного моделювання МСЕ задач динаміки композитів з міжфазовою взаємодією компонентів. На даний момент програмний продукт дозволяє знаходити розв'язки лінійної та нелінійної динамічних задач композитних систем з умовами спряження.

За допомогою створеного програмного середовища здійснено комп'ютерний експеримент по моделюванню лінійних та нелінійних коливань представницького елемента композитної системи. Проведено аналіз отриманих поверхонь розв'язків, виявлено різноманітні механічні ефекти деформування композитної системи в цілому та в області міжфазового прошарку. Встановлено залежність форми, динаміки та амплітуди коливань від характерних розмірів армуючої компоненти і міжфазового утворення композитного середовища. При цьому очевидно стає важливістю комп'ютерного моделювання для виявлення та передбачення нетривіальних ефектів функціонування нелінійних систем.

Розроблений пакет прикладних програм може бути використаний з метою прогнозування поведінки композитних матеріалів та елементів конструкцій з них при здійсненні ними коливань під дією зовнішніх сил. Окрім того, даний програмний засіб можна застосовувати для вибору існуючих або створення нових композитів з наперед заданими властивостями для експлуатації при певних умовах, а також динамічного розрахунку композитних середовищ з урахуванням міжфазової взаємодії компонентів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. АНАЛИТИК-2007 / А.А. Морозов, В.П. Клименко, Ю.С. Фишман и др. // Математичні машини і системи. – 2007. – N 3–4. – С. 8 – 52.
2. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина / Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
3. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Пер. с англ.; под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Пер. с англ.; под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
5. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Пер. с англ. А.С. Алексева и др.; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
6. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наукова думка, 1998. – 615 с.
7. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
8. Коновалова О.Н. Математическое и компьютерное моделирование динамических процессов в композитных средах // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – Т. 44, № 5. – С. 127 – 134.
9. Середенко В.М., Коновалова О.М. Комп'ютерно-математичне моделювання задач динаміки міжфазової взаємодії в композитах // Вісник Київ. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 1. – С. 188 – 191.
10. Перевозчикова О.Л. Основи системного аналізу об'єктів і процесів комп'ютеризації. – К.: Видавничий дім "КМ Академія", 2003. – 432 с.
11. Kwon Y.W., Bang H. The finite element method using MATLAB (The mechanical engineering series). – CRC Press, 1997. – 527 p.

Стаття надійшла до редакції 06.05.2009