

Я.І. ВИКЛЮК

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ДИНАМІКА РОСТУ АТРАКТОРІВ МЕТОДОМ «ВИПАДКОВОГО ДОЩУ» ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Abstract: In this paper dynamics of main crystal fractal characteristics in attractor's neighborhood in the evolution of social-economic system was researched. Method of evaporation modeling during crystal grows process was offered. Analogy of main processes of crystal grows (evaporation, diffusion) in social-economic systems was substantiated. Mechanism of appearance of phenomenon stagnation and self-organization of the system in evolution process was researched.

Key words: fractal, attractor, fractal dimension, self-organization, stagnation, competitiveness.

Аноматія: Робота присвячена дослідженню динаміки основних фрактальних характеристик кристала в околі аттрактора у процесі еволюції соціально-економічної системи. Запропоновано метод моделювання випаровування у процесі росту кристала. Обґрунтована аналогія основних процесів, які спостерігаються у процесі росту кристала (випаровування, дифузія та ін.) в соціально-економічних системах. Досліджено механізм появи явища стагнації та самоорганізації системи у процесі еволюції.

Ключові слова: фрактал, аттрактор, фрактальна розмірність, самоорганізація, стагнація, конкурентоспроможність.

Аннотация: Работа посвящена исследованию динамики основных фрактальных характеристик кристалла в окрестности аттрактора в процессе эволюции социально-экономической системы. Предложен метод моделирования испарения в процессе роста кристалла. Обоснована аналогия основных явлений, которые наблюдаются в процессе роста кристалла (испарение, диффузия и др.) в социально-экономических системах. Исследован механизм стагнации и самоорганизации системы в процессе эволюции.

Ключевые слова: фрактал, аттрактор, фрактальная размерность, самоорганизация, стагнация, конкурентоспособность.

1. Вступ

Як відомо, проведення будь-яких розрахунків у машинобудуванні, будівництві, військовій, космічній техніці та інших технічних галузях здійснюється за допомогою математичного апарата теоретичної механіки. Економісти неодноразово намагались застосувати деякі положення теоретичної механіки, однак ці спроби були безрезультатними [1]. Розрахунки, проведені на цій основі, мали низький рівень адекватності та точності. Виходом з цієї ситуації може бути теоретична епіоніка – наука про взаємодію та вплив в нематеріальному світі речей [2, 3]. Як зазначено в даних роботах, епіоніка ділиться на три частини: статика, аноматика та динаміка.

Сьогодні з'являється все більше статей, присвячених застосуванню фізичних законів в задачах економіки, моделюванні поведінки соціуму та ін. Зокрема, робота [4] присвячена розгляду умов та принципів функціонування вищих навчальних закладів як самоорганізованих систем на основі трипараметричної моделі Лоренца. В роботі [5] екосистеми та соціально-економічні системи досліджуються за допомогою законів термодинаміки. Показано, що ці системи є термодинамічно відкритими. Для дослідження останніх використано закон зростання ентропії. Оцінці ентропії та ризиків при моделюванні поведінки соціально-економічної системи присвячена робота [6]. Методи моделювання управління містами за допомогою термодинамічних законів розглядалися у роботі [7].

У серії робіт [8–11] пропонується методологія аплікації фрактального росту кристалів для моделювання динаміки росту соціально-економічних систем різних рівнів. Ріст кристалів моделюється в нечіткому потенціальному полі.

Слід відзначити, що основний наголос в цих роботах ставиться на математичному апараті. Як функції правдоподібності виступають геометричні форми периферії та сегменти отриманих кристалів. Однак питання внутрішньої структури атракторів, фрактальна розмірність, стійкість, насиченість, яка моделюється за допомогою теорії «Випадкового дощу» (ВД) [10, 11], залишилися не дослідженими. Актуальність вивчення цих характеристик не викликає сумніву, адже саме атрактори є центрами інвестиційної привабливості та тяжіння для розвитку інфраструктури. І саме вони є основними джерелами фінансових надходжень як до самої системи, так і до бюджету країни.

Тому метою даної роботи є визначення часової динаміки фрактальної розмірності, насиченості, стійкості та внутрішньої структури атрактора в залежності від емпіричних параметрів моделі «Випадкового дощу».

2. Математична модель

Як було сказано вище, відповідно до методології, описаної в роботах [8–11], ріст фракталу моделюється в потенціальному полі, яке описується за допомогою математичного апарата нечіткої логіки.

У загальному випадку потенціал U записується у вигляді

$$U = F(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (1)$$

де a_i – вхідні параметри, F – функція, яка визначає вигляд потенціалу.

Вигляд функції та вибір алгоритму нечіткого виведення (Мамдані, Сугено, Цукамото та ін. [12]) залежить від механізму побудови нечітких продукційних правил, що використовуються в експертних і керівних системах, які за основу мають базу знань, сформовану фахівцями-експертами предметної області або отриману в результаті навчання нейромережі, навчальна множина якої, у свою чергу, базується на експериментальних даних у вигляді сукупності нечітких предикатних правил. В наших розрахунках ми використовували алгоритм Сугено з ґауссівськими функціями належності [13, 14]. Вибір цього алгоритму обґрунтований тим, що при наявності експериментальних баз знань доцільним стане використання гібридних нейронних мереж ANFIS (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System), в основі яких лежить метод Сугено.

Як вхідні параметри нечіткого потенціалу привабливості, ми вибрали відстань до найближчої дороги та відстань по дорозі до найближчого центру кристалізації [8].

Для розрахунку інтегрального просторового розподілу густини потенціального поля привабливості слід скористатися методами побудови просторового розподілу густини зарядів у кристалах [15].

Для моделювання росту центральної частини населених пунктів ми скористалися модифікованим методом ВД [16].

Модель ВД була запропонована Волдом та Сазерландом. У моделі ВД частинки рухаються випадково, визначеними траєкторіями. У роботі [16] показано, що найкраще узгодження з експериментом дає модель, в якій центр кластеризації розташовується в центрі досліджуваної області, а частинки (кандидати на агрегацію) починають рухатись з великого околу всередину кола. Кожна частинка стартувала з випадкової точки і рухалась по випадковій хорді, з'єднуючись при

зіткненні або з лінією основи, або з кластером, що зростає. Модель ВД породжує розгалужені сферичні структури.

У випадку існування n центрів кластеризації для кожного центру визначається його нормована вага w_i [17]. У випадку, якщо населений пункт має декілька центрів привабливості, вагові множники можуть розраховуватися як відносна кількість людей, які відвідали такі об'єкти за визначений період часу:

$$w_i = \frac{S_i}{\sum_{i=1,n} S_i}, \quad (2)$$

де S_i – кількість людей, які відвідали i -й об'єкт.

Згідно з алгоритмом ВД, частинка рухається по випадковій хорді до одного з центрів кластеризації. Центр кластеризації для кожної частинки вибирається випадковим чином, в залежності від величини нормованої ваги w_i [17]. Для уникнення появи порожніх областей [11] після агрегації частинки створюється її копія («прозора частинка»), що продовжує свій рух до центру, не реагуючи на кристалізовані частинки. Як тільки вона потрапляє в область, де в невеликому радіусі R немає агрегованих частинок (тобто частинка потрапила в порожню область), «прозорій частинці» присвоюється статус «звичайної частинки», і алгоритм акреції продовжується за класичними правилами.

Вплив потенціального поля враховується таким чином: початкове потенціальне поле регіону, що досліджується, нормується; імовірність агрегації визначається як імовірність настання двох незалежних подій, а саме: наявність поруч агрегованої частинки та «можливість» агрегації в заданій точці з боку нормованого потенціального поля $U(x, y)$. Агрегація частинок відбувалася лише у вузлах квадратної ґратки. Тому достовірність $P_a(x, y)$ перебування поруч з рухомою частинкою агрегованого кластера приймалась рівною 1, якщо в сусідній по грані з частинкою клітинці розташований агрегований атом; 0,5 – якщо агрегований атом розташований поруч по діагоналі; та 0,01 – в іншому випадку. Тоді імовірність агрегації частинки визначається як

$$P(x, y) = U(x, y) \cdot P_a(x, y). \quad (3)$$

Ненульова імовірність агрегації $P_a(x, y)$ в зоні, де в найближчому оточенні відсутні агреговані частинки, може бути обґрунтована такими міркуваннями: у фізичних кристалах агрегування відбувається тільки на атракторах. При моделюванні соціальних явищ під атрактором розуміється певний туристично-рекреаційний об'єкт, завод, обласний центр тощо, а як частинки виступають турбази, садиби, елементи інфраструктури, будівлі тощо. Як правило, новостворені об'єкти розташовуються в безпосередній близькості від наявних, аналогічно до фізичних кристалів. Однак досить часто спостерігається поява нових атракторів на відстані від кластера, що росте, наприклад, створення нового комплексу на базі вже побудованих будинків чи надання послуг зеленого туризму місцевими жителями.

Як було показано в роботах [16, 18–22], внутрішня структура фізичного кристала змінюється з часом. Це пов'язано з явищами випаровування, поверхневим натягом, теплопровідністю,

макроскопічною симетрією кристала, поверхневою дифузією тощо. Для соціальних структур деякі аналоги фізичних явищ є притаманними, а деякі ні. Зокрема, для явищ поверхневого натягу та дифузії досить важко знайти пояснення, адже дифузія будинків не можлива. З іншого боку, може спостерігатись дифузія рекреантів у середині модельованої системи. Аналогом теплопровідності можуть служити грошові потоки системи. Симетрія, як правило, пов'язана з хаосом і досліджується в роботі нижче. При моделюванні розвитку соціально-економічних об'єктів мікро-, мезо- та макрорівнів (розбудови туристично-рекреаційних систем, росту населених пунктів, формуванні інфраструктури регіону тощо) велику роль відіграє випаровування. Зрозуміло, що при створенні чи розбудові елементів великого бізнесу поруч активно розвиваються і розростаються різні сфери малого та середнього бізнесу. З часом деякі з них занепадають з різних причин, деякі навпаки – розвиваються та монополізують систему. Цей процес можна розглядати як аналог випаровування агрегованих частинок.

Змодельовати випаровування можна відповідно до такого алгоритму: якщо в ході росту атрактора «прозора» частинка потрапляє в область, оточену N_d агрегованими частинками, то з імовірністю p_d частинка випаровується:

$$p_d = 1 - d \cdot U(x, y), \quad (4)$$

де d – емпіричний коефіцієнт випаровування, N_d – рівень конкурентоспроможності.

Обґрунтувати це твердження можна відповідно до таких припущень: випаровування відбувається в області, де існує велика конкуренція, тобто є велика кількість близько розташованих об'єктів схожого бізнесу. Імовірність випаровування зменшується при наближенні до центру атрактора, тобто при збільшенні потенціального поля імовірність p_d спадає. Дійсно, в реальних системах шанс виживання об'єктів з однаковим рівнем конкуренції є більшим там, де більші грошові потоки і більша атрактивність, тобто, в околі атракторів, в області з високим потенціальним полем.

3. Комп'ютерний експеримент

При рості кристала одночасно спостерігаються як процеси агрегування, так і випаровування. Це, у свою чергу, впливає на стійкість атрактора, його симетрію та густину, а отже і на фрактальну розмірність. Для аналізу даних процесів у роботі моделювався ріст фракталу в симетричному потенціальному полі з центральним атрактором та одним під'їзним шляхом. Об'єктом дослідження слугувала центральна область навколо атрактора. Експеримент складався з двох етапів.

Етап 1. Дослідження залежності фрактальної розмірності, кількості агрегованих частинок від кількості ітерацій алгоритму

Як емпіричні параметри моделі виступали: імовірність агрегації частинки на відстані від атрактора P_{a0} ; відсутність чи наявність процесу випаровування при $N_d = 6$; тип випаровування – з урахуванням потенціального поля ($d = 1$) та без урахування; кількість ініційованих частинок (кількість ітерацій алгоритму) – N_{in} .

Характеристичними параметрами системи виступали:

1. Фрактальна розмірність Хаусдорфа-Безиковича [23] – D . Визначалась шляхом підрахунку агрегованих частинок у залежності від радіуса та кількості ініційованих частинок:

$$D(r) = \frac{\ln(A \cdot N(r) \cdot \pi)}{\ln(r)}, \quad (5)$$

де A – площа одиничної комірки, $N(r)$ – число зайнятих вузлів у колі радіуса r .

2. Динаміка росту загального числа агрегованих частинок – N_{ag} та рівень їх насичення – $N_{ag,inf}$.

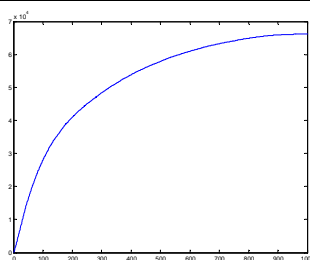
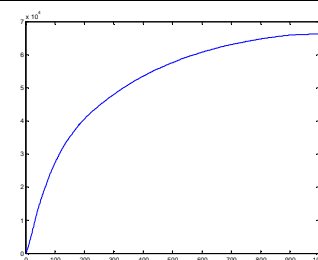
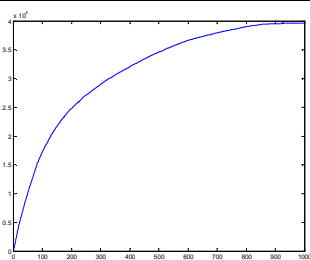
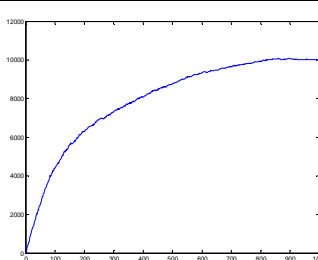
3. Динаміка росту числа частинок – N_c , що мають високий рівень конкуренції ($\geq N_d$), та рівень їх насиченості – $N_{c,inf}$.

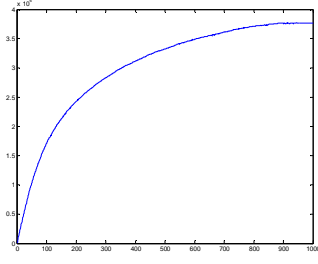
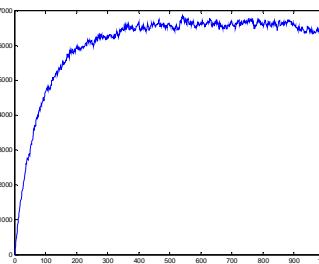
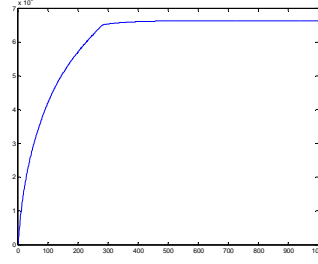
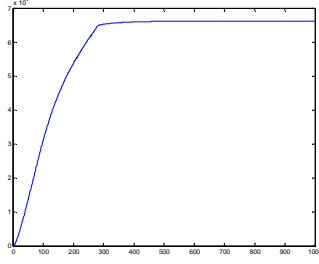
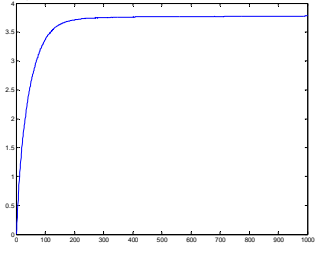
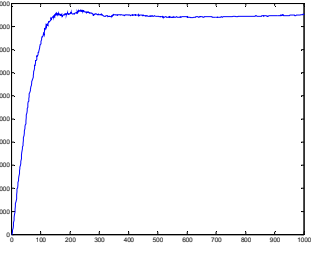
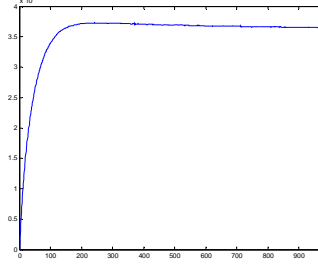
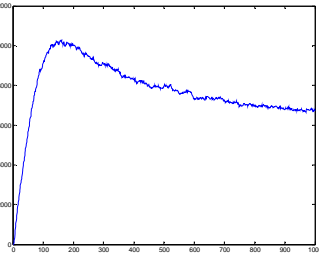
4. Відносна кількість частинок з високим рівнем конкуренції – $N_{c,inf} / N_{ag,inf}$.

Результати експерименту наведені в табл. 1.

Як видно з табл. 1, на початковому етапі росту кристала спостерігається різке зростання всіх показників, які досліджуються. Після досягнення рівня насичення в деяких з них починають спостерігатись флуктуації чи з'являється точка стагнації. Динаміка зміни фрактальної розмірності D не має характерних особливостей, після досягнення максимального значення D залишається незмінним, тому в таблиці наведено лише рівень насиченості.

Таблиця 1. Залежність динамічних характеристик моделі «ВД» від емпіричних параметрів

P_{a0}	Тип випаровування	Кількість ініційованих частинок	D	Загальна кількість агрегованих частинок – N_{ag} , рівень насичення – $N_{ag,inf}$	Кількість частинок з високим рівнем конкуренції (≥ 6) – N_c , рівень насичення – $N_{c,inf}$	$N_{c,inf} / N_{ag,inf}$
0	Відсутнє	250 000	2,5	 $N_{ag,inf} = 66198$	 $N_{c,inf} = 66185$	99,98%
0	Без урахування потенціального поля	250 000	2,38	 $N_{ag,inf} = 9593$	 $N_{c,inf} = 0012$	25,29%

0	З урахуванням потенціального поля	250 000	2,37	 $N_{ag,inf} = 37660$	 $N_{c,inf} = 6419$	17,04%
0,1	Відсутнє	100 000	2,5	 $N_{ag,inf} = 66248$	 $N_{c,inf} = 66248$	100,00%
0,1	Без урахування потенціального поля	100 000	2,35	 $N_{ag,inf} = 37791$ (стагнація) $N_{ag,st} = 36986$	 $N_{c,inf} = 9503$ (стагнація) $N_{c,inf} = 9406$	25,15% (стагнація) 25,43%
0,1	З урахуванням потенціального поля	100 000	2,35	 $N_{ag,inf} = 36496$ (стагнація) $N_{ag,st} = 36483$	 $N_{c,inf} = 6722$ (стагнація) $N_{c,inf} = 10502$	18,42% (стагнація) 28,79%

При відсутності випаровування кількість агрегованих частинок приблизно дорівнює кількості частинок з високим рівнем конкуренції $N_{c,inf}/N_{ag,inf} \approx 1$, а фрактальна розмірність $D = 2,5$. Це свідчить про те, що в цьому випадку кристал представляє собою рівномірно заповнений диск, де в

кожної частинки є 8 сусідів (випадок квадратної сітки). Отже, без урахування випаровування модель не є адекватною модельованій предметній області.

Як видно з графіків в табл. 1, припущення, що атрактори можуть виникати в порожніх областях ($P_{a0} = 0,1$), призводить до збільшення динаміки росту кристала в 10–30 разів. Абстрагуючи це на предметну область, можна стверджувати, що будь-яка монополізована система розвиватиметься значно повільніше, ніж та, в яку залучені різні види інвестицій.

Якщо змоделювати спонтанний процес випаровування для частинок, конкурентоспроможність яких складає $N_d = 6$, можна побачити, що фрактальна розмірність зменшиться: $D \approx 2,3$. Тобто отриманий фрактал має внутрішню структуру, що володіє певною симетрією. Як видно з табл. 1, четверта частина елементів інфраструктури знаходиться в умовах високої конкуренції. $N_{c,inf} / N_{ag,inf} \approx 0,25$ як в системах з високою монополією, так і у відкритих системах. В останніх спостерігається невелика точка стагнації в динаміці розвитку для кількості елементів з високою конкуренцією N_c . Тобто, абстрагуючи на предметну область, можна стверджувати, що неузгодженість інвестиційних проектів призводить до високого рівня конкуренції в системі, однак з часом деякі елементи бізнесу зникають і система виходить на рівень динамічної рівноваги, що призводить до явища «застою» системи.

Якщо процес випаровування залежить від потенціального поля згідно з (4), фрактальна розмірність залишиться практично без змін: $D \approx 2,3$. На противагу їй, динамічні характеристики системи сильно змінюються. А саме як в монополізованих, так і у інвестиційно відкритих системах спостерігаються сильні флуктуації кількості елементів з високою конкуренцією N_c . Крім того, присутня яскраво виражена точка стагнації: після досягнення максимуму кількість N_c поступово спадає. Як показали розрахунки, рівня насичення («застою») в даному випадку не спостерігається як для монополій, так і у відкритих системах. Зменшення N_c можна інтерпретувати як явище постійного зменшення рівня конкуренції в довго існуючих системах. Тобто, в процесі еволюції елементи системи, з одного боку, збільшують рівень своєї спеціалізації, з іншого – постійно зростає рівень монополізації. Отже, система, залишена сам на сам, монополізується. Рівень частинок з високою конкуренцією в цьому наблизенні складає $< 18\%$. Слід зазначити, що при зменшенні кількості частинок, які мають велику кількість найближчих сусідів у фракталі, загальна кількість агрегованих частинок не змінюється. Це можливо лише тоді, коли внутрішня структура фракталу збільшує свою симетрію. Тобто, це підтвердження того факту, що хаос породжує порядок – система самоорганізується. Явища самоорганізації відкритих систем дійсно спостерігаються в реальних системах і активно досліджуються науковцями [24].

Етап 2. Дослідження симетрії

Як показали розрахунки попереднього етапу, найбільше особливостей динамічних параметрів спостерігається для систем з випаровуванням, інтенсивність якого залежить від величини потенціального поля. Цей етап спрямований на дослідження симетрії найближчого околу атрактора в залежності від кількості ініційованих частинок N_{in} . Вхідними параметрами моделі є:

$P_{a0} = 0,1$, $N_d = 6$, тип випаровування з урахуванням потенціального поля ($d = 1$). На рис. 1 наведено основні результати розрахунків.

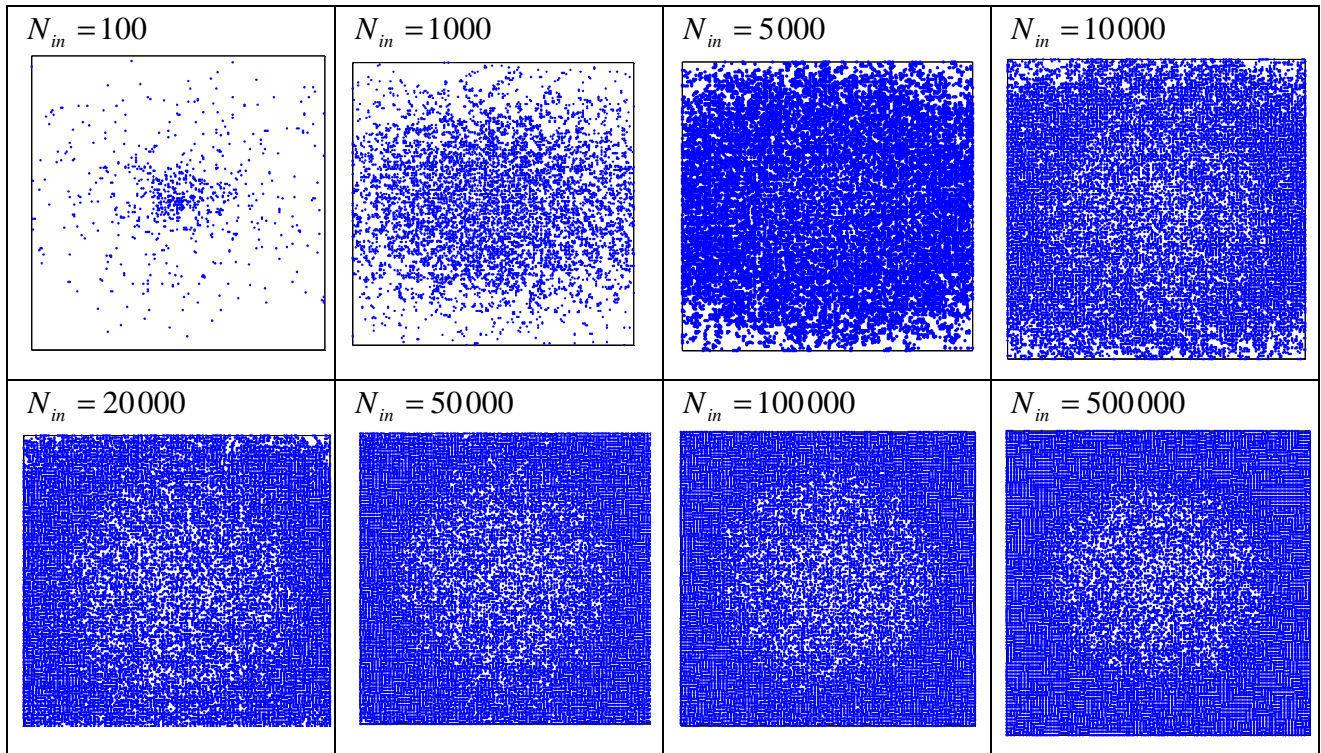


Рис. 1. Залежність структури атрактора від кількості ітерацій алгоритму

З рисунків видно, що на початку росту фракталу (100 частинок) найбільша густина агрегованих частинок спостерігається в центрі атрактора. По периметру з'являється велика кількість відокремлених агрегованих частинок, зумовлених ненульовою імовірністю агрегації – $P_{a0} = 0,1$. Як видно з табл. 1, точка стагнації з'являється тоді, коли кількість ініційованих частинок сягає 10 000 – 20 000. До цього моменту процеси агрегації переважають над випаровуванням. Як видно з рис. 1, внутрішня структура атрактора на цьому етапі має хаотичну структуру. При досягненні точки стагнації процеси випаровування урівноважують процеси агрегації. Це підтверджується тим фактом, що загальна кількість агрегованих частинок виходить на насичення (табл. 1). Як було показано вище, зменшення числа частинок, які мають велику кількість найближчих сусідів, пояснюється зміною симетрії. Дійсно, як видно з рис. 1, вже при 10 000 ініційованих частинок спостерігається розшарування частинок на дві зони. Перша – окіл атрактора носить хаотичний характер, друга – периферія, починає структуруватись. З'являються невеликі порожні області, що мають лінійну структуру, які в подальшому збільшуються і можуть інтерпретуватись як вулиці. При зростанні кількості ініційованих частинок границя поділу між хаотичною структурою стає виразнішою, а її радіус поступово зменшується.

4. Висновки

У роботі досліджено динаміку основних фрактальних характеристик кристала в околі атрактора у процесі еволюції системи.

Запропоновано метод моделювання випаровування у процесі росту кристала. Обґрунтована аналогія основних процесів, які спостерігаються у процесі росту кристала (випаровування, дифузія та ін.) в соціально-економічних системах.

У процесі комп'ютерних експериментів доведено, що явище випаровування є обов'язковим процесом у динаміці розвитку соціальних систем. Тому нехтування цим явищем призводить до неправильних результатів.

Доведено, що монополізована система розвивається значно повільніше інвестиційно та конкурентно відкритої. Розрахунки показали, що планування та втручання у процеси росту ТРС призводять до насичення системи, що в подальшому формує явище «застою».

Урахування процесу випаровування у вигляді (4) дозволило пояснити основні економічні явища, які спостерігаються в реальних соціально-економічних системах. Зокрема, у процесі еволюції спостерігається точка стагнації, після якої зменшується рівень загальної конкуренції відкритої системи при незмінній загальній кількості елементів. Отже, з часом спостерігається збільшення рівня спеціалізації та зростання монополії складових системи. Тобто система, залишена сам на сам, монополізується. З іншого боку, це є підтвердженням того факту, що система є самоорганізованою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ермошенко Н.Н. Украинский прорыв в экономической науке // Актуальні проблеми економіки. – 2008. – № 8 (86). – С. 250 – 253.
2. Каноны рынка и законы экономики / НАН Украины. Институт экономики и промышленности; И.И. Амоша, Е.Т. Иванов, Н.Д. Прокопенко и др. – Донецк, 2005. – Кн. 8: Экономическое проектирование. – 548 с.
3. Иванов Е.Т. Основы теоретической экионики / НАН Украины. Институт экономики и промышленности. – Донецк, 2006. – 376 с.
4. Буланичев В.А., Серков Л.А. Модельный подход к управлению вузами как самоорганизующимися системами // Нелинейный мир. – 2006. – № 3, Т. 4. – С. 137 – 143.
5. Шаронова Н.В., Козуля Т.В. Синергетика і прийняття управлінського рішення в умовах функціонування корпоративної екологічної системи // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2005. – № 2. – С. 31 – 36.
6. Сявавко М.С., Третяк О.М. Нечітко-інтервальні методи оцінки ризику та ентропії поведінки соціально-економічної системи // Економічна кібернетика. – 2006. – № 3–4 (39–40). – С. 53 – 61.
7. Яцишин Ю.В., Шаховська Н.Б. Модель управління містом на основі термодинамічних законів // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: інформаційні системи та мережі. – 2000. – № 406. – С. 239 – 247.
8. Виклюк Я.І. Метод сегментації соціально-економічних об'єктів у процесі фрактального росту в нечіткому потенціальному полі // Науковий вісник НЛТУ України. – 2008. – № 18.4. – С. 271 – 284.
9. Виклюк Я.І. Прогнозування геометричної структури населених пунктів методом модифікованої дифузної обмеженої агрегації в нечіткому потенціальному полі // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2008. – № 1. – С. 61 – 68.
10. Виклюк Я.І. Моделі фрактального росту кристалів в нечіткому потенціальному полі для прогнозування соціально-економічних процесів // Збірник наукових праць Севастопольського національного університету ядерної енергії та промисловості. – 2008. – № 2 (26). – С. 237 – 248.
11. Виклюк Я.І. Методологія прогнозування соціально-економічних процесів методами фрактального росту кристалів у нечіткому потенціальному полі // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2008. – № 2. – С. 153 – 162.
12. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.
13. Дьяконов В.П., Круглов В.В. MATLAB 6.5 SP1/1 SP2 + Simulink 5/6. Инструменты искусственного интеллекта и биоинформатики. Серия «Библиотека профессионала». – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2006. – 456 с.
14. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами Matlab. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.
15. Garcia A., Cohen M.L. First-principle ionicity scales // Phys. Rev. B. – 1993. – Vol. 47, N 8. – P. 4215 – 4225.
16. Фракталы в физике. Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике / Под ред. Л. Пьетронеро. – М.: Мир, 1988. – 670 с.

17. Томашевський В.М. Моделювання систем. – К.: Видавнича група BHV, 2005. – 352 с.
18. Mari Carmen Perez-Martin A., Jose J. Jimenez-Rodriguez, Jose Carlos Jimenez-Saez Shallow boron dopant on silicon An MD study // Applied Surface Science. – 2004. – N 234. – P. 228 – 233.
19. Numerical simulation of the production processes of layered materials / Gustavo J. Sibona, Sascha Schreiber, Ronald H.W. Hopp et al. // Materials Science in Semiconductor Processing. – 2003. – N 6. – P. 71 – 76.
20. Won Ha Moon, Ho Jung Hwang Atomistic study of elastic constants and thermodynamic properties of cubic boron nitride // Materials Science and Engineering. – 2003. – N B103. – P. 253 – 257.
21. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2 ч. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – Ч. 1. – 349 с.
22. Каплан И.Г. Введение в теорию межмолекулярных взаимодействий. – М.: Наука, 1982. – 311 с.
23. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Техносфера, 2006. – 488 с.
24. Захарченко В.І. Трансформаційні процеси у промислових територіальних системах України. – Вінниця: Гіпаніс, 2004. – 547 с.

Стаття надійшла до редакції 03.11.2008