

Можно заметить, что применение ферромагнитных каркасов даже с относительно невысокой относительной магнитной проницаемостью $\mu_k = 30\mu_0$ позволяет получить величину развиваемого электромагнитного момента $M_e = 100$ Нм и при скорости $n = 3000$ об/мин мощность такого ЭМПЭ составит свыше 30 кВт.

Таким образом, можно утверждать, что использование ферромагнитных каркасов толщиной, например, $\delta_k = 2$ мм, позволяет формировать структуры ЭМПЭ с повышенными значениями линейной токовой нагрузки и получать при этом весьма высокую индукцию магнитного поля в областях зазора и статорного каркаса. При этом за счет применения известного способа скоса пазов ферромагнитных каркасов можно добиться уменьшения уровня пульсаций электромагнитного момента.

1. *Афонин А. А.* Магнитные системы электромеханических преобразователей энергии с вариацией векторов намагниченности постоянных магнитов // Техн. электродинаміка. – 2004. – № 1. – С. 47–55.
2. *Afonin A., Kramarz W., Cierzniewski P.* Elektromechaniczne przetworniki energii z komutacją elektroniczną. – Szczecin: Wyd. Politechniki Szczecińskiej, 2000. – 242 s.
3. *Afonin A.* Permanent magnet brushless motors with innovative excitation systems // Proc. of the 6th Intern. Conf. on Electromechanical and Electrical Systems UEES'04. – Ukraine, 2004. – Vol. 1. – P. 27–38.
4. *Гребеников В. В.* Исследование магнитных полей в электрических машинах с различной ориентацией векторов намагниченности постоянных магнитов // Техн. электродинаміка. Тем. вип. “Проблеми сучасної електротехніки”. – 2004. – Ч. 5. – С. 47–50.

*Щецинский политехнический институт, Польша
Институт электродинамики НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 10.09.2007

УДК 621.3.(575)

© 2008

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О новых формулах средних значений напряжения, тока и мощности в электроцепи с управляемыми диодами

On the basis of the singular expansion of a jump-like function, the mean value of a sinusoidal voltage shifted by phase is obtained.

Управляемое напряжение постоянного тока, получаемое в результате двухполупериодного выпрямления переменного синусоидального напряжения сети с помощью управляемых диодов (тиристоров), широко используется в различных областях промышленности: гальваническое производство, зарядка аккумуляторных батарей, химическое производство, для источников управляемого постоянного напряжения и т. д.

В основном в указанных производствах технологические процессы формируются посредством действия среднего значения выпрямляемого и управляемого синусоидального напряжения $U(t) = U_a \sin \omega t$, где U_a — амплитуда; ω — круговая частота ($\omega = 2\pi f$, f — частота, Гц); t — время. При управлении выходного напряжения выпрямителя последнее $U_{\text{вых}}$ сдвигается относительно нуля на угол φ , т. е. на угол открывания управляемого диода. Вид такого напряжения приведен на рис. 1. Здесь же показано среднее напряжение $U_{\text{ср}}$.

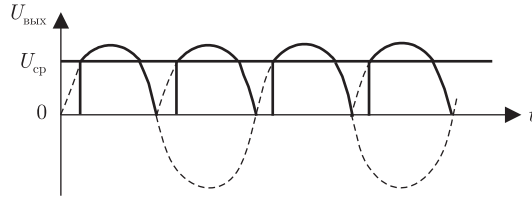


Рис. 1

Среднее напряжение определяется формулой

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_{\varphi/\omega}^{T/2} U_a \sin \omega t dt = \frac{-2U_a}{T\omega} \cos \omega t \Big|_{+\varphi/\omega}^{T/2} = \frac{U_a}{\pi} (1 + \cos \varphi), \quad (1)$$

где $T = 1/f$ — период колебаний синусоидального напряжения.

Как видно из (1), $U_{\text{ср}}$ является функцией угла φ и вида выпрямляемого переменного напряжения $U_a \sin \omega t$. При $\varphi = 0$ $U_{\text{ср}} = 2U_a/\pi$, т. е. соответствует классической формуле среднего значения синусоидального напряжения [1]. При $\varphi = \pi$ $U_{\text{ср}} = 0$. В случае однополупериодного выпрямителя $U_{\text{ср}} = (U_a/2\pi)(1 + \cos \varphi)$, что точно отражает физику процесса выпрямления и метода определения среднего значения переменного напряжения.

Продолжим данное исследование в следующем направлении. В работах [2, 3] представлено сингулярное (особое) разложение скачкообразной функции в виде

$$1(t) = (1 - e^{-\alpha t}) + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos_k t, \quad (2)$$

где α — коэффициент затухания; U_{ak} — k -я амплитуда затухающей гармоники. Здесь $\sum_{k=1}^n U_{ak} = 1$; $U_{ak} = U_{a1}/\omega_k$; $U_{a1} = 1/\pi$.

Отметим, что сдвинутое по фазе φ напряжение $U(t) = U_a \sin(\omega t + \varphi)$ при $t = 0$ (момент включения в цепи $U(t)$) равно $U(t) = U_a \sin \varphi$, т. е. в этот момент имеется скачок напряжения $U(t)$ на величину $U_a(t) \sin \varphi$. В связи с этим, учитывая (2), функцию $U(t) = U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$ представим в виде следующего разложения [3]:

$$U(t) = U_a \sin(\omega t \pm \varphi)(1 - e^{-\alpha t}) + |U_a| e^{-\alpha t} \sin(\pm \varphi) \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t. \quad (3)$$

Выражение (3) при $t = 0$ равно $U_a \sin(+\varphi) \sum_{k=1}^n U_{ak} = U_a \sin(+\varphi)$, при $t = \infty$ $U(t) = U_a \sin(\omega t + \varphi)$, при $\alpha = \infty$ $U(t) = U_a \sin(\omega t + \varphi)$. Как видим, между $U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$ и (3) имеется наглядное соответствие.

Если считать $U_{\text{вых}}$, показанное на рис. 1, привязанное скачком $U_a \sin \varphi$ к $t = 0$, то тогда может быть соответствие между $U_{\text{вых}}$ (см. рис. 1) и $U = U_a \sin(\omega t + \varphi)$, и будет справедливым среднее значение выходного напряжения

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_{\varphi/\omega}^{T/2} \left[U_a (1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \varphi) + |U_a| e^{-\alpha t} \sin \varphi \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right] dt. \quad (4)$$

Интегралы (4) будем вычислять в виде суммы интегралов

$$U_{cp1} = \frac{2}{T} \int_{\varphi/\omega}^{T/2} U_a \sin(\omega t + \varphi) dt, \quad U_{cp2} = -\frac{2}{T} \int_{\varphi/\omega}^{T/2} U_a e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) dt,$$

$$U_{cp3k} = +\frac{2U_a}{m_k T_k} \int_{T_k/4}^{5T_k m_k/4} e^{-\alpha t} U_{ak} \sin \varphi(\cos \omega_k t) dt, \quad k = \overline{1, n}, \quad m_k = \frac{T}{T_k}, \quad (5)$$

$$U_{cp\Sigma_k} = \sum_{k=1}^n U_{cp3k}, \quad U_{cp1} = \frac{2}{T} \int_{-\varphi/\omega}^{T/2} U_a \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{U_a}{\pi}(1 + \cos \varphi),$$

т. е. равно (1).

Интегралы в U_{cp2} , U_{cp3k} , $k = \overline{1, n}$, вычислим с помощью метода по частям [4]:

$$U_{cp2} = \frac{-2U_a}{T} \int_{-\varphi/\omega}^{T/2} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}} \frac{2U_a}{T\omega} e^{-\alpha t} \left[\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \right] \Big|_{+\varphi/\omega}^{T/2}. \quad (6)$$

Введем в (6) тригонометрические преобразования [4]

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi,$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega t.$$

Тогда (6) запишем в виде

$$U_{cp2} = \frac{-\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{U_a}{\pi} \left[e^{-\alpha\pi/\omega} \left(\cos \varphi + \frac{\alpha}{\omega} \sin \varphi^{-1} \right) + e^{-\alpha\varphi/\omega} \left(\cos 2\varphi + \frac{\alpha}{\omega} \sin 2\varphi^{-1} - 1 \right) \right]. \quad (7)$$

Далее вычислим U_{cp3k} , $k = \overline{1, n}$,

$$U_{cp3k} = \frac{2U_a \sin \varphi}{m_k T_k} \int_{\frac{T_k}{4}}^{\frac{5T_k m_k}{4}} U_{ak} e^{-\alpha t} \cos \omega_k t dt =$$

$$= \frac{\omega_k^2}{\alpha^2 + \omega_k^2} \frac{U_a 2U_{ak} \sin \varphi}{m_k T_k} \left[\frac{e^{-\alpha t} \sin \omega_k t}{\omega_k} - \frac{\alpha}{\omega_k^2} e^{-\alpha t} \cos \omega_k t \right] \Big|_{T_k/4}^{5T_k m_k/4} =$$

$$= \frac{U_a U_{ak} \omega_k^2 \sin \varphi}{m_k \pi (\alpha^2 + \omega_k^2)} = (e^{-\alpha T_k/4} - e^{-5\alpha T_k m_k/4}). \quad (8)$$

И с учетом (8), $T_k = 2\pi/\omega_k$

$$U_{cp\Sigma_k} = \frac{U_a \sin \varphi}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak} \omega_k^2 e^{-\alpha\pi m_k/(2\omega_k)}}{(\alpha^2 + \omega_k^2) m_k} (1 - e^{-2\alpha\pi m_k/\omega_k}). \quad (9)$$

Таким образом, общее среднее значение, соответствующее (4), имеет вид

$$U_{cp} = (5) + (7) + (9). \quad (10)$$

Из (3) видно, что при $\alpha = \infty$ $U(t) = U_a \sin(\omega t + \varphi)$, а это значит, что $U_{cp} = (5)$ и $U_{cp2} + U_{cp\Sigma k} = (7) + (9) = 0$. Проверим этот факт. В (7) имеется знаменатель $\alpha^2 + \omega^2 = \infty$ при $\alpha = \infty$. Поэтому (7) = 0. В (9) также есть знаменатель $\alpha^2 + \omega_k^2 = \infty$ при $\alpha = \infty$. Поэтому (9) = 0. При $\varphi = 0$ $U_{cp} = 2U_a/\pi$, т. е. соответствие классической формуле [1].

Следовательно, факт соответствия U_{cp} , определяемого с использованием (3), подтверждается.

Определим средние значения токов в электроцепи с активной (R_H) нагрузкой. При активной нагрузке в формулах для среднего значения тока $I_{cpR} = U_{cp}/R$ в выражении (10) включается сомножитель $1/R_H$, т. е.

$$I_{cpR} = \frac{U_{cp1} - U_{cp2} + U_{cp3}}{R_H} = \frac{(9)}{R_H}. \quad (11)$$

Средняя мощность такой цепи выражается соотношением

$$P_{cpR} = U_{cp} I_{cpR} = (10) \cdot (11) = \frac{(9)^2}{R_H} = \frac{1}{R_H} (U_{cp1} - U_{cp2} + U_{cp3})^2. \quad (12)$$

Понятно, что простота формул (10), (11), (12), с помощью которых определены средние значения напряжения, тока и мощности, является кажущейся. В эти формулы органически включены формулы (5), (7), (9). При их раскрытии получаем

$$\begin{aligned} U_{cp} = \frac{U_a}{\pi} \left\{ (1 + \cos \varphi) - \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2} \left[e^{-\alpha\pi/\omega} \left(\cos \varphi + \frac{\alpha}{\omega} \sin \varphi - 1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-\alpha\varphi/\omega} \left(\cos 2\varphi + \frac{\alpha}{\omega} \sin 2\varphi - 1 \right) \right] + \right. \\ \left. + \sin \varphi \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}\omega_k^2}{m_k(\alpha^2 + \omega_k^2)} e^{-\alpha\pi/(2\omega_k)} (1 - e^{-2\alpha\pi m_k/\omega_k}) \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Тогда $I_{cp} = (13)/R_H$, а $P_{cp} = (13)^2/R_H$. Так как выражения $I_{cp} = (13)/R_H$ и $P_{cp} = (13)^2/R_H$ находятся рядом с (12), то приводить их не будем, видна достаточная сложность полученных формул. При определенных условиях ($\alpha = \infty$, $\varphi = 0$) формулы (13), $(13)/R_H$, $(13)^2/R_H$ приобретают вид, соответствующий классическим прежним расчетам.

Конечно, сингулярное (особое) разложение скачкообразной функции обуславливает некоторую математическую громоздкость в вычислении в данном случае U_{cp} , I_{cp} , P_{cp} , но учет скачка в выпрямленном напряжении (см. рис. 1), на наш взгляд, требует более точного математического описания исследуемых величин, чему соответствует данное разложение.

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
2. Божко А. Е. Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Доп. НАН Украины. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
3. Божко А. Е. О новой трактовке переходных процессов в цепях переменного тока // Там само. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
4. Бронштейн Н. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 608 с.

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

Поступило в редакцию 04.06.2007