УДК 681.3.062

Д.Б. БУЙ, Л.М. СІЛЬВЕЙСТРУК

УТОЧНЕННЯ ОБМЕЖЕНЬ MIN ТА MAX ПРОСТОЇ КАРДИНАЛЬНОСТІ В МОДЕЛІ «СУТНІСТЬ-ЗВ'ЯЗОК»

Abstract: *In the paper the constraints of cardinality which are used for types of connections in the entity-relationship model. The purpose of the paper is to define the exact nature of min and max constraints of cardinality for binary types of connections and to research the logical connection between their meanings. Min and max of constraints of cardinality are specified with the help of full pattern.*
Key words: *constraints, cardinality constraints, entity-relationship model.*

Анотація: *У статті розглядаються обмеження кардинальності, які застосовують до типів зв'язків у моделі „сутність-зв'язок". Мета статті – встановити точну природу min та max обмежень кардинальності для бінарних типів зв'язків та дослідити логічний зв'язок між їх значеннями. Min та max обмежень кардинальності уточнюються за допомогою поняття повного образу.*
Ключові слова: *кардинальність, обмеження кардинальності, модель „сутність-зв'язок".*

Аннотация: *В статье рассматриваются ограничения кардинальности, которые используются для типов связей в модели „сущность-связь". Цель статьи – установить точную природу min и max ограничений кардинальности для бинарных типов связи и исследовать логическую связь между их значениями. Min и max ограничений кардинальности уточняются с помощью понятия полного образа.*
Ключевые слова: *кардинальность, ограничения кардинальности, модель „сущность-связь".*

1. Вступ

Однією з найпопулярніших концептуальних моделей даних є модель „сутність-зв'язок" (російською – „сущность-связь"), або ER-модель (Entity-Relationship model) [1]. На різновидах цієї моделі базується більшість сучасних підходів до проектування моделей даних (головним чином, реляційних або об'єктно-орієнтованих). У моделі „сутність-зв'язок" існують стандартні обмеження, які застосовують до її елементів. Одне з таких обмежень – кардинальність (cardinality). Обмеження кардинальності (cardinality constraints) застосовують до типів зв'язків. Існує декілька різновидів вказаних обмежень, які можна знайти, наприклад, у роботах Ферга (Ferg) [2], Тхелхеіма (Thalheim) [3], Лензеріні (Lenzerini) і Сантуккі (Santucci) [4].

Для бінарних типів зв'язків немає різниці між різновидами обмежень кардинальності [5]. Тому Ферг (Ferg) у роботі [2] запропонував розглядати для бінарних типів зв'язків єдиний вид обмежень кардинальності – просту кардинальність (common cardinality).

Проста кардинальність – поняття, що залежить від зв'язків типу зв'язку для будь-якої сутності, що належить деякому типу сутності даного типу зв'язку. При розгляді простої кардинальності визначаються такі її характеристичні значення: min та max обмеження кардинальності (обмежена кардинальність), min та max обмеження кардинальності (необмежена кардинальність), mop обмеження кардинальності.

Питання, пов'язані з уточненнями понять обмежень кардинальності, можна знайти, наприклад, у роботах [3–5]. Тхелхаім [3] та Хартманн (Hartmann) [5] використовують теорію реляційних баз даних для уточнення обмежень кардинальності. Вони розглядають ці обмеження з позиції функціональних залежностей, наголошуючи, що обмеження кардинальності – це спеціальний вид функціональних залежностей. Ланзеріні в роботі [4] за допомогою спеціально побудованої системи лінійних нерівностей вирішує проблему перевірки здійснення (анг. satisfiability) схеми моделі „сутність-зв'язок", тобто сумісності сутностей, зв'язків моделі і деякого виду min та max обмежень кардинальності – обмеження співвідношення кардинальності (cardinality ratio constraint). Також у даній роботі запропонована схема знаходження типів сутностей і типів зв'язків, які порушують умови здійснимості схеми моделі „сутність-зв'язок" за допомогою теорії графів.

Обмеження кардинальності типів зв'язків можна уточнити на мові теорії відношень. У роботах [6, 7] були розглянуті та уточнені такі поняття: max обмеження кардинальності (обмежена кардинальність), mор обмеження кардинальності і min та max обмеження кардинальності (необмежена кардинальність) для бінарних типів зв'язків; у згаданих роботах ці поняття мають такі назви відповідно: показник кардинальності, степінь участі сутності у зв'язку і структурні обмеження вигляду (min, max).

У цій роботі розглядається уточнення min та max обмежень кардинальності (необмежена кардинальність) для бінарних типів зв'язків у моделі „сутність-зв'язок" з повним доведенням відповідних лем та теореми. Всі невизначені тут поняття можна знайти у роботах [6, 7].

Символ □ позначає кінець формулювання твердження та кінець доведення, символ ▫ – кінець логічної частини доведення.

2. Уточнення min та max обмежень кардинальності (необмежена кардинальність)

Уточнити min та max обмежень кардинальності для бінарного типу зв'язку можна за допомогою стандартного поняття повного образу. Для адекватної формалізації понять типи сутностей E, F інтерпретуються як множини E, F відповідно, елементи таких множин позначаються як $x, y, \ldots$. Вимагається непорожність цих множин, суттєвість такого необтяжливого обмеження показано нижче. Тип зв'язку R між типами сутностей E, F інтерпретується як бінарне відношення R на множинах E, F, причому $R \subseteq E \times F$ (порядок множин у декартовому добутку суттєвий). Як звичайно, $R^{-1} \subseteq F \times E$ – відношення, обернене до відношення R.

Нехай $x \in E$, а $R[x]$ – це повний образ одноелементної множини $\{x\}$ відносно відношення R; згідно з означенням $R[x] \overset{def}{=} \{ y \mid y \in F \wedge < x, y > \in R \}$ – множина всіх елементів множини F, які знаходяться у відношенні R з елементом x [8].

Вважається, що множини E, F не більш, ніж злічені, а всі повні образі одноелементних множин скінченні; з огляду на фінітність усіх об'єктів такі обмеження є природними.

Непорожню множину потужностей повних образів всіх елементів множини E позначено як $Im(R) \overset{def}{=} \{ |R[x]| \mid x \in E \}$ (саме тут суттєва непорожність множини E). Зауважимо, що для порожнього відношення R множина $Im(R)$ непорожня, точніше $Im(R) = \{0\}$.

Зрозуміло, що $Im(R)$ – непорожня підмножина натуральних чисел, скінченна (тобто обмежена зверху) або нескінченна (тобто необмежена зверху). В будь-якому випадку ця множина має найменший елемент, який позначено як $min(R)$. Найбільшого ж елемента множина $Im(R)$ може і не мати, тому вводиться позначення, в якому ∞ – деякий елемент, що не належить множині натуральних чисел:

$$max(R) = \begin{cases} \text{найбільший елемент множини } Im(R), \text{ якщо } Im(R) \text{ скінченна множина}, \\ \infty, \quad \text{інакше.} \end{cases}$$

По суті множину натуральних чисел N зі стандартним порядком $\le$ поповнили найбільшим елементом ∞ та перетворили її в повну решітку $< N', \le >$, де $N' \overset{def}{=} N \cup \{\infty\}$, причому $n < \infty$ для всіх $n \in N$.

Безпосередньо з означень випливають рівності:

$$min(R) = \prod Im(R), \ max(R) = \coprod Im(R), \tag{*}$$

де символи $\prod, \coprod$ використовуються для позначення інфімумів та супремумів відповідно в повній решітці N' (при перевірці рівностей (*) для оператора $max(R)$ треба розглянути випадки скінченної та нескінченної множини $Im(R)$).

Зауважимо: для виконання рівностей (*) також суттєва непорожність множини E, бо саме з непорожності множини E випливає непорожність числової множини $Im(R)$, а зазначені рівності для порожньої множини $Im(R)$ (тобто для порожніх множин E, R) згідно з стандартними домовленостями щодо точних граней порожньої множини (супремум порожньої множини співпадає с найменшим елементом, а інфімум – з найбільшим [10]) приймають вигляд $min(R) = \infty$, $max(R) = 0$. Зрозуміло, що розумно інтерпретувати цей граничний випадок важко; крім того, наприклад, п. 1 подальшої леми 1 просто не виконується для порожнього відношення на порожніх множинах.

3. Логічний зв'язок між значеннями операторів min та max на взаємоінверсних відношеннях

Основна задача полягає в дослідженні логічного зв'язку між значеннями введених операторів на вихідному відношенні (R) та на відношенні, оберненому до вихідного (інверсному відношенні R^{-1}).

Нехай R – тип зв'язку між типами сутностей E та F, $(min1, max1)$ і $(min2, max2)$ – пари значень обмежень min та max простої кардинальності (для типів сутностей E та F відповідно. Використовуючи графічну нотацію Чена [1], на рис. 1 зображено даний тип зв'язку.

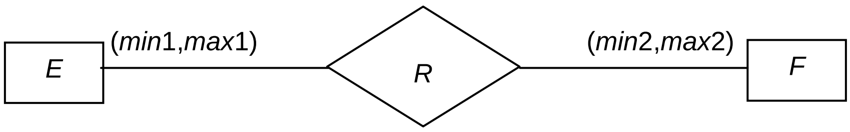

Рис. 1. Тип зв'язку R між типами сутностей E і F з відповідними значеннями min та max простої кардинальності

При розгляді значень min та max простої кардинальності цікаво знайти логічні зв'язки між парами значень $(min1, max1)$ і $(min2, max2)$ або довести зворотне (тобто підтвердити або заперечити необхідність перевірки їх сумісності при побудові відповідного типу зв'язку).

Ця задача буде розв'язана в наступній теоремі, доведення якої спирається на леми про властивості операторів min, max.

Лема 1. Для довільного бінарного відношення R та непорожньої множини E, такої, що $\pi_1^2(R) \subseteq E$, виконуються такі твердження:

1. $min(R) \le max(R)$; більш того, $min(R) < max(R) \Leftrightarrow |Im(R)| \ge 2$, зокрема, $max(R) = \infty \Rightarrow min(R) < max(R)$.

2. $min(R) = max(R) \Leftrightarrow |Im(R)| = 1$; тобто $min(R) = max(R) \Leftrightarrow \forall x\, y\, (x, y \in E \Rightarrow |R[x]| = |R[y]|)$.

3. Нехай k – таке натуральне число, що $min(R) = max(R) = k$, тоді $Im(R) = \{k\}$, тобто $\forall x\, (x \in E \Rightarrow |R[x]| = k)$.

4. Нехай k – таке натуральне число, що $Im(R) = \{k\}$ (тобто $\forall x\, (x \in E \Rightarrow |R[x]| = k)$); тоді $min(R) = max(R) = k$.

5. $R = \varnothing \Leftrightarrow min(R) = max(R) = 0$; більш того, $R = \varnothing \Leftrightarrow min(R) = max(R) = min(R^{-1}) = max(R^{-1}) = 0$ характеристична ознака порожнього відношення).

6. $\pi_1^2(R) \subset E \Leftrightarrow min(R) = 0$, $\pi_1^2(R) = E \Leftrightarrow min(R) > 0$.

7. $0 < min(R) < max(R) \Rightarrow |\pi_1^2(R)| \ge 2$.

8. $max(R) = \infty \Rightarrow \pi_1^2(R)$ і $\pi_2^2(R)$ злічені.

9. R – функціональне відношення $\Leftrightarrow$ $max(R) \le 1$ (характеристична ознака функціональних бінарних відношень).

Доведення. Нерівність $min(R) \le max(R)$ з п. 1 безпосередньо випливає з рівностей (*); тому далі розглядається еквівалентність, почнемо з необхідності. Нехай виконується строга нерівність $min(R) < max(R)$. Треба показати, що множина $Im(R)$ містить щонайменше 2 елементи. Дійсно, ця множина непорожня, а якщо ж вона одноелементна, то, згідно з рівностями (*), її точні грані збігаються з єдиним елементом множини, тобто $min(R) = max(R)$, що суперечить припущенню. Розглянемо достатність: нехай множина $Im(R)$ містить щонайменше 2 елементи. Треба показати, що тоді $min(R) < max(R)$. Дійсно, нехай n, m різні елементи множини $Im(R)$; покладемо для визначеності, що $n < m$. Залишається врахувати очевидні нерівності $min(R) \le n < m \le max(R)$.

Зауважимо: по суті, встановлена еквівалентність є наслідком наступної загальнозначної характеристичної властивості одноелементних множин у частково впорядкованих множинах, що містять щонайменше 2 елементи: $\coprod X = \prod X \Leftrightarrow |X| = 1$.

Нарешті остання імплікація п. 1 випливає з установленої еквівалентності, оскільки рівність $max(R) = \infty$ означає, що множина $Im(R)$ нескінченна. ▫

Перша еквівалентність п. 2 випливає з еквівалентності п. 1 з урахуванням непорожності множини $Im(R)$ (треба просто перейти до заперечень у кожній з частин еквівалентності п. 1).

Друга еквівалентність цього пункту випливає з першої, оскільки праві частини цих двох еквівалентностей еквівалентні. ▫

Пп. 3, 4 випливають з п. 2 та означення операторів min, max (у випадку одноелементної множини $Im(R)$ дані оператори просто вибирають єдиний елемент цієї множини). ▫

Доведемо необхідність у першій еквівалентності п. 5: нехай $R = \varnothing$, тоді повний образ вигляду $R[x]$ для всіх елементів $x \in E$ також порожній, тобто $Im(R) = \{0\}$; залишається застосувати п. 4. Розглянемо достатність: нехай $min(R) = max(R) = 0$. Тоді, згідно з п. 3 $\forall x\left(x \in E \Rightarrow |R[x]| = 0\right)$, тобто повний образ $R[x]$ для всіх елементів $x \in E$ порожній, а це може виконуватись тільки для порожнього відношення R.

Друга еквівалентність випливає з першої (бо інверсія порожнього відношення знову порожня).▫

Розгляд п. 6 почнемо з необхідності для першої еквівалентності. Нехай $\pi_1^2(R) \subset E$, тоді найдеться елемент $x \in E$, такий, що $x \notin \pi_1^2(R)$; отже повний образ $R[x]$ порожній, тобто $0 \in Im(R)$. Оскільки 0 найменший елемент, то $min(R) = \prod Im(R) = 0$. Переходимо до достатності: нехай $min(R) = 0$, тоді, оскільки повна решітка $< N', \leq >$ цілком упорядкована (а найменший елемент множини співпадає з інфімумом цієї ж множини), то $0 \in Im(R)$. Звідси випливає існування елемента $x \in E$, такого, що $|R[x]| = 0$, тобто повний образ $R[x]$ порожній. Очевидно, що $x \notin \pi_1^2(R)$, тобто $\pi_1^2(R) \subset E$.

Друга еквівалентність пункту випливає з першої, в першій еквівалентності треба перейти до заперечень в обох частинах (урахувавши, що завжди $min(R) \geq 0$). ▫

Розглянемо п. 7. Так як $0 < min(R)$, то, згідно з другою еквівалентністю п. 6, $\pi_1^2(R) = E$; оскільки ж $min(R) < max(R)$, то, згідно з еквівалентністю п. 1, $|Im(R)| \geq 2$. Оскільки за означенням $Im(R) \overset{def}{=} \{|R[x]| \,|\, x \in E\}$, тобто в нашому випадку $Im(R) = \{|R[x]| \,|\, x \in \pi_1^2(R)\}$, то, очевидно, що $|\pi_1^2(R)| \geq 2$. Зауважимо, що обернути імплікацію пункту не можна, як показують прості приклади. ▫

Імплікація п. 8 доводиться від супротивного: нехай $max(R) = \infty$, але хоча б одна з проекцій відношення $\pi_1^2(R)$, $\pi_2^2(R)$ скінченна. У першому випадку, коли проекція $\pi_1^2(R)$ скінченна, треба застосувати кускову схему, яка випливає безпосередньо з означень (наприклад, в першому рядку треба врахувати, що $R[x] = \varnothing$ для всіх $x \in E \setminus \pi_1^2(R)$):

$$Im(R) = \begin{cases} \{|R[x]| \,|\, x \in \pi_1^2(R)\} \bigcup \{0\}, \textit{ якщо } \pi_1^2(R) \subset E, \\ \{|R[x]| \,|\, x \in \pi_1^2(R)\}, \textit{ якщо } \pi_1^2(R) = E. \end{cases}$$

Отже, якщо проекція $\pi_1^2(R)$ скінченна, то і множина $Im(R)$ скінченна, а, значить, $max(R)$ – натуральне число. Прийшли до протиріччя.

У другому випадку, коли проекція $\pi_2^2(R)$ скінченна, треба застосувати включення $R[x] \subseteq \pi_2^2(R)$ для всіх $x \in E$, яке випливає безпосередньо з означень; з цього включення випливає нерівність $|R[x]| \leq |\pi_2^2(R)|$ для всіх $x \in E$. Таким чином, з скінченності множини $\pi_2^2(R)$ випливає скінченність і множини $Im(R)$; значить, і для цього випадку $max(R)$ – натуральне число. Прийшли до протиріччя.

Зауважимо, що доведена імплікація не обертається в загальному випадку; найпростіший приклад – бієкція між двома зліченими множинами (згідно з наступним пунктом оператор max прийме одиничне значення для цього випадку). ▫

Нарешті, доведемо необхідність в еквівалентності п. 9. Нехай відношення R функціональне, тоді повний образ вигляду $R[x]$ для всіх $x \in E$ містить щонайбільше один елемент, тобто $\left|R[x]\right| \leq 1$ для всіх $x \in E$. Таким чином, $Im(R) \subseteq \{0,1\}$, звідки випливає, що $max(R) \leq 1$.

Достатність доводиться від супротивного: нехай $max(R) \leq 1$, але відношення не є функціональним. Тоді існує елемент $x \in E$, такий, що $|R[x]| \geq 2$; нехай $p \overset{def}{=} |R[x]|$, тоді $p \in Im(R)$, причому $p \geq 2$. Нарешті, з формул (*) випливає, що $max(R) \geq p \geq 2$ – прийшли до протиріччя. ▫

Лема 2 (про значення операторів min, max на скінченному універсальному відношенні). Нехай $\left|E\right| = p > 0$, $\left|F\right| = k > 0$, а $U(p,k) \overset{def}{=} E \times F$ – універсальне відношення на множинах E, F, тоді $min(R) = max(R) = k$ та $min(R^{-1}) = max(R^{-1}) = p$.

Доведення. Згідно з означенням універсального відношення, має місце $|R[x]| = k$ для всіх $x \in E$. Отже, рівності $min(R) = max(R) = k$ випливають з п. 4 попередньої леми 1. Рівності для оберненого відношення доводяться повністю аналогічно.

Значення операторів min, max залежать не тільки від аргументу-відношення (в попередніх позначеннях R), а й від параметра – множини, якій належать перші компоненти пар відношення (множини E); тому точніше було б писати, наприклад, $min_E(R)$ замість $min(R)$ та $Im_E(R)$ замість $Im(R)$[1]. Наступна лема уточнює залежність значень операторів min, max від вказаної множини-параметра.

---

[1] Якщо бути точним, то треба розглядати і бінарне відношення разом з відповідними множинами, з яких обираються компоненти пар відношення.

Лема 3 (про залежність значень операторів min, max від множини-параметра). Нехай відношення R та множини E, F, E' такі, що $R \subseteq E \times F$ та $E \subset E'$; тоді $min_{E'}(R) = 0$ та $max_E(R) = max_{E'}(R)$.

Доведення. Так як $R[x] = \varnothing$ для всіх $x \in E' \setminus E$, то, очевидно, що $Im_{E'}(R) = Im_E(R) \bigcup \{0\}$; тобто множина $Im_E(R)$ поповнюється найменшим елементом відповідної решітки. Зрозуміло, що таке поповнення не впливає на супремум множини (якщо бути більш точним, то треба спиратися на те, що $Im_E(R)$ є конфінальною підмножиною множини $Im_{E'}(R)$, супремуми таких множин співпадають [9, твердження 3]) та призводять до нульового значення інфімуму: $\coprod Im_{E'}(R) = \coprod Im_E(R)$, $\prod Im_{E'}(R) = 0$. Залишається застосувати рівності (*).

Отже, власне розширення множини-параметра E впливає тільки на значення оператора min, яке з можливо ненульового стає нульовим. Зауважимо, що розширення множини F взагалі не впливає на значення операторів.

Наступна лема розглядає випадок, коли відношення має структуру об'єднання попарно сумісних відношень; відношення сумісності $\approx$ розуміється, згідно з роботою [9], тобто в позначеннях цієї роботи $U \approx V \overset{def}{\Leftrightarrow} U \mid X = V \mid X$, де $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$ – перетин проекцій вихідних бінарних відношень U, V за першою компонентою, а $U \mid X, V \mid X$ – обмеження бінарних відношень за вказаною множиною.

У наступній лемі виражаються значення операторів min, max на вихідній множині через значення тих самих операторів на множинах з об'єднання.

Лема 4 (про об'єднання попарно сумісних відношень). Нехай відношення R таке, що $R = \bigcup_{i \in I} R_i$, причому всі відношення R_i, $i \in I$ попарно сумісні та непорожні, тобто $R_i \approx R_j$ для всіх $i, j \in I$ [2]. Тоді $max_E(R) = \coprod_{i \in I} max_{E_i}(R_i)$, де множини E, E_i такі, що $\pi_1^2(R) \subseteq E$, $\pi_1^2(R_i) \subseteq E_i$ для всіх $i \in I$. Крім того, позначаючи проекції по першій компоненті відношень R та R_i через G та G_i відповідно, маємо рівність $min_G(R) = \prod_{i \in I} min_{G_i}(R_i)$.

Доведення. Для доведення встановимо допоміжну рівність:

$$R[x] = R_i[x] \text{ для всіх } i \in I \text{ та } x \in G_i. \qquad (**)$$

Фіксуємо довільні $i \in I$ та елемент $x \in G_i$. Включення $R[x] \supseteq R_i[x]$ випливає з монотонності повного образу [8, твердження 2, п. 1] і тому залишається встановити обернене включення. Це можна зробити безпосередньо: нехай $y \in R[x]$; оскільки повний образ є дистрибутивним відносно об'єднань [8, твердження 2, п. 2], то існує індекс $j \in I$, такий, що $y \in R_j[x]$. Залишається

[2] З огляду на рефлексивність відношення сумісності немає потреби вимагати нерівність i, j.

врахувати, по-перше, сумісність відношень R_i, R_j; по-друге, належність $x \in G_j$, з якої випливає належність $x \in G_j \cap G_i = \pi_1^2(R_j) \bigcap \pi_1^2(R_i)$; та наступну загальнозначну властивість відношення сумісності (точніше критерій сумісності відношень): $U \approx V \Leftrightarrow U[x] = V[x]$ для всіх $x \in \pi_1^2(U) \bigcap \pi_1^2(V)$ (яка випливає безпосередньо з означення сумісності). Отже, $y \in R_j[x] = R_i[x]$. Включення $R[x] \subseteq R_i[x]$ встановлено, а з ним встановлена і рівність (**).

Тепер встановимо рівність

$$Im_G(R) = \bigcup_{i \in I} Im_{G_i}(R). \qquad (***)$$

Дійсно,маємо такий ланцюжок рівностей:

$$Im_G(R) = \{|R[x]| \| x \in G\} = \bigcup_{i \in I} \{|R[x]| \| x \in G_i\} = \bigcup_{i \in I} \{|R_i[x]| \| x \in G_i\} = \bigcup_{i \in I} Im_{G_i}(R_i).$$

Перша рівність випливає з означення множини $Im_G(R)$; друга – з рівності $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, яка, у свою чергу, випливає з рівності $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ та дистрибутивності проекції відносно об'єднань; третя – з раніше встановленої допоміжної рівності (**); нарешті, четверта, остання рівність, – з означення множини $Im_{G_i}(R_i)$.

Тепер встановимо шукану рівність $min_G(R) = \prod_{i \in I} min_{G_i}(R_i)$. Дійсно, з рівності (***) та відомого твердження про точні грані об'єднання підмножин частково впорядкованої множини [10, § 1, теорема 9] та [9, лема 3 про супремум об'єднання] випливають рівності $min_G(R) = \prod \mathrm{Im}_G(R) = \prod \{\prod \mathrm{Im}_{G_i}(R_i) \mid i \in I\} = \prod_{i \in I} min_{G_i}(R_i)$. ▫

Розглянемо другу шукану рівність $max_E(R) = \prod_{i \in I} max_{E_i}(R_i)$. Рівність для супремумів $max_G(R) = \prod_{i \in I} max_{G_i}(R_i)$ доводиться повністю аналогічно встановленій рівності для інфімумів. Залишається врахувати включення $G \subseteq E$, $G_i \subseteq E_i$ для всіх $i \in I$ та застосувати лему 3 про залежність значень операторів від множини-параметра: $max_E(R) = max_G(R) = = \coprod_{i \in I} max_{G_i}(R) = \coprod_{i \in I} max_{E_i}(R_i)$. ▫

Наступна теорема відповідає на питання сумісності значень операторів min, max на вихідному (початковому) відношенні та на оберненому до нього відношенні.

Всі варіанти значень min, max, побудовані з урахуванням нерівності $min(R) \leq max(R)$ (лема 1, п. 1), наведені в нижчеподаній табл. 1, рядки якої відповідають вихідному відношенню R, а стовпчики – оберненому відношенню R^{-1}. У цій таблиці випадки, коли значення оператора max дорівнює ∞, вказані явно; отже нерівність $p \geq p'$ означає, що не тільки p', а і p натуральне число.

Таблиця 1. Всі варіанти значень min, max для відношень R, R^{-1} та їх сумісність

		$p' \overset{def}{=} min(R^{-1}),\ p \overset{def}{=} max(R^{-1})$					
		$p' = p = 0$	$p' = p > 0$	$p' = 0,$ $p \geq 1$	$p' = 0,$ $p = \infty$	$p' \geq 1,$ $p \geq p'$	$p' \geq 1,$ $p = \infty$
$k' \overset{def}{=} min(R)$ $k \overset{def}{=} max(R)$	$k' = k = 0$	+	–	–	–	–	–
	$k' = k > 0$	–	+	+	+	+	+
	$k' = 0, k \geq 1$	–	+	+	+	+	+
	$k' = 0, k = \infty$	–	+	+	+	+	+
	$k' \geq 1, k \geq k'$	–	+	+	+	+	+
	$k' \geq 1, k = \infty$	–	+	+	+	+	+

Теорема 1 (про сумісність значень операторів min, max на взаємоінверсних відношеннях). Для комірок таблиці, позначених + (–), існують (відповідно не існують) відношення з указаними значеннями min, max.

Доведення. Заповнення таблиці повинно бути симетричним відносно головної діагоналі, оскільки в симетричних комірках відношення R, R^{-1} просто міняються ролями. Тому доведенню підлягають тільки заповнення комірок, розташованих для визначеності на головній діагоналі та вище неї. Номер варіанта (номер комірки) записується (i, k), де i – номер рядка, а k – номер стовпця.

Заповнення першого рядка випливає з п. 5 леми 1 про порожнє відношення. Очевидно, що в першому рядку існує відповідне відношення (а саме порожнє відношення) тільки для випадку (1,1). ▫

Відношення для решти випадків будуються об'єднанням скінченних універсальних відношень (лема 2) з використанням леми 4; причому бінарні відношення, які складають об'єднане відношення в формулюванні цієї леми, взагалі не будуть перетинатися; тобто вимога попарної сумісності буде автоматично виконуватися.

Надалі для кожного випадку будується відповідне відношення, а для деяких з них (представницьких випадків) подаються графічні ілюстрації та проводяться доведення.

Для випадку (2,2), згідно з лемою 2, можна побудувати універсальне відношення $R = E \times F$, де $E \overset{def}{=} \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ та $F \overset{def}{=} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$, причому елементи $x_1, ..., x_p$ та $y_1, ..., y_k$ покладаються попарно різними. ▫

Для випадку (2, 3) будується відношення $R \overset{def}{=} E \times F'$, де $E \overset{def}{=} \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ та $F \overset{def}{=} \{y_1, y_2, ..., y_k, y\}$, $F' \overset{def}{=} \{y_1, y_2, ..., y_k\} = F \setminus \{y\}$, причому елементи $x_1, ..., x_p$ та $y_1, ..., y_k, y$ покладаються попарно різними (рис. 2).

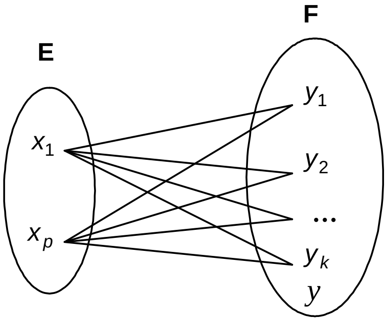

Рис. 2. Відношення для випадку (2, 3)

Згідно з лемою 2 (про універсальне відношення) та лемою 3 (про залежність від множини параметра, ця лема застосовується для відношення R^{-1}), відношення R потрібне. ▫

Для випадку (2, 4) відношення будується так: $R \overset{def}{=} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i$, де $R_i \overset{def}{=} U(i,k) = \{x_1^i,...,x_i^i\} \times \{y_1^i,...,y_k^i\}$, причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i, y покладаються попарно різними; далі $E \overset{def}{=} \pi_1^2(R) = \{x_1^1, x_1^2, x_2^2,..., x_1^i, x_2^i,..., x_i^i,...\}$ та $F \overset{def}{=} \pi_2^2(R) \bigcup \{y\} = \{y_1^1,...y_k^1, y_1^2,...y_k^2,..., y_1^i,...y_k^i,..., y\}$ (рис. 3). Покажемо, що це відношення R шукане.

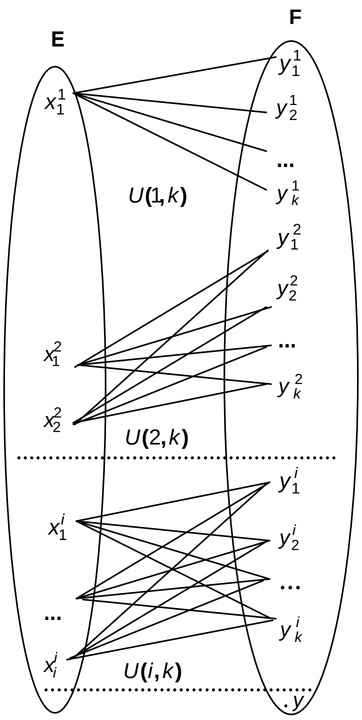

Рис. 3. Відношення для випадку (2, 4)

Нехай $E_i \overset{def}{=} \pi_1^2 R_i = \{x_1^i,...,x_i^i\}$ для $i = 1,2,...$ Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду R_i, де $i = 1,2,...$, не перетинаються, то, згідно з лемами 4 та 2, отримуються рівності $max_E(R) = \coprod\limits_{i=1,2,...} max_{E_i}(R_i) = \coprod\limits_{i=1,2,...} k = k$. Аналогічно встановлюються рівності $min_E(R) = \coprod\limits_{i=1,2,...} \min_{E_i}(R_i) = \coprod\limits_{i=1,2,...} k = k$.

Залишається показати, що обернене відношення R^{-1} шукане. Нехай $F_i \overset{def}{=} \pi_2^2(R_i) = \{y_1^i,...y_k^i\}$ для $i = 1,2,...$ та $F' \overset{def}{=} \pi_2^2(R) = \{y_1^1,...y_k^1, y_1^2,...y_k^2,..., y_1^i,...y_k^i,...\} = F \setminus \{y\}$. Тоді, згідно з лемами 4, 2, отримуються рівності $max_{F'}(R^{-1}) = \coprod\limits_{i=1,2,...} max_{F_i}(R_i^{-1}) = \coprod\limits_{i=1,2,...} i = \infty$. Нарешті, з леми 3 (нагадаймо, що $F' \subset F$) випливають рівності $max_F(R^{-1}) = max_{F'}(R^{-1}) = \infty$ та $min_F(R^{-1}) = 0$.▫

Для випадку (2, 5) відношення R будується так: $R \overset{def}{=} U(p',k) \cup U(p,k)$, де $U(p',k) \overset{def}{=} \{x_1,...,x_{p'}\} \times \{y_1,...,y_k\}$ та $U(p,k) \overset{def}{=} \{x'_1,...,x'_p\} \times \{y'_1,...,y'_k\}$; далі покладаємо

$E \overset{def}{=} \{x_1, x_2, ..., x_{p'}, x'_1, x'_2, ..., x'_p\}$ та $F \overset{def}{=} \{y_1, y_2, ..., y_k, y'_1, y'_2, ..., y'_k\}$, причому елементи вигляду x_i, x'_j та y_i, y'_j попарно різні. Доведення завершується аналогічно попереднім випадкам. ▫

Для випадку (2, 6) відношення R будується так: $R \overset{def}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$, де $R_i \overset{def}{=} U(p'+i-1, k) =$ $= \{x_1^i, ..., x_{p'+i-1}^i\} \times \{y_1^i, ..., y_k^i\}$, $i = 1,2,3,...$, причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i покладаються попарно різними; далі $E \overset{def}{=} \pi_1^2(R) = \{x_1^1, ..., x_{p'}^1 x_1^2, ..., x_{p'+1}^2, ..., x_1^i, x_2^i, ..., x_{p'+i-1}^i, ...\}$ та $F \overset{def}{=} \pi_2^2(R) =$ $= \{y_1^1, ... y_k^1, y_1^2, ... y_k^2, ..., y_1^i, ..., y_k^i, ...\}$. Доведення завершується аналогічно попереднім випадкам. ▫

Для випадку (3,3), одного з найпростіших, відношення будується так: $R \overset{def}{=} U(p,k) = \{x_1, ..., x_p\} \times \{y_1, ..., y_k\}$, $E \overset{def}{=} \pi_1^2(R) \bigcup \{x\} = \{x_1, ..., x_p, x\}$ та $F \overset{def}{=} \pi_2^2(R) \bigcup \{y\} =$ $= \{y_1, ..., y_k, y\}$, причому елементи $x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_k, x, y$ вважаються попарно різними. ▫

Для випадку (3, 4) відношення будується так: $R \overset{def}{=} R_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$, де $R_0 \overset{def}{=} U(1,k) = \{x^0\} \times \{y_1^0, ..., y_k^0\}$ та для $i = 1,2,3,...$ $R_i \overset{def}{=} U(i,1) = \{x_1^i, ..., x_i^i\} \times \{y^i\}$, причому елементи вигляду $x^0, x_j^i, y_j^0, y^i, x, y$ покладаються попарно різними; далі $E \overset{def}{=} \pi_1^2(R) \cup \{x\} = \{x^0, x_1^1, x_1^2, x_2^2, ..., x_1^i, x_2^i, ..., x_i^i, ..., x\}$ та $F \overset{def}{=} \pi_2^2(R) \cup \{y\} =$ $= \{y_1^0, ... y_k^0, y^1, y^2, ..., y^i, ..., y\}$. Доведення завершується аналогічно попереднім випадкам. ▫

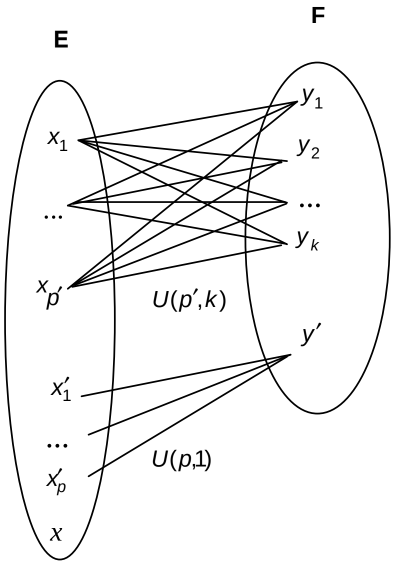

Рис. 4. Відношення R для випадку (3, 5)

Для випадку (3, 5), який розглядається аналогічно випадку (2,5), відношення R будується так: $R \overset{def}{=} U(p',k) \cup U(p,1)$, де $U(p',k) \overset{def}{=}$ $\overset{def}{=} \{x_1, ..., x_{p'}\} \times \{y_1, ..., y_k\}$ та $U(p,1) \overset{def}{=} \{x'_p, ..., x'_l\} \times \{y'\}$; далі $E \overset{def}{=} \{x_1, x_2, ..., x_{p'}, x'_1, x'_2, ..., x'_p, x\}$ та $F \overset{def}{=} \{y_1, y_2, ..., y_k, y'\}$, причому елементи вигляду x_i, x'_j, x, y_i, y' покладаються попарно різними (рис. 4). Необхідно показати, що так побудоване відношення R шукане.

Нехай $E_1 \overset{def}{=} \{x_1, ..., x_{p'}\}$, $E_2 \overset{def}{=} \{x'_1, ..., x'_p\}$ та

$E' = E_1 \cup E_2$, а також $F_1 \overset{def}{=} \{y_1,...,y_k\}$ та $F_2 \overset{def}{=} \{y'\}$. Так як проекції за першою компонентою відношень $U(p',k)$ та $U(p,1)$ не перетинаються, то, згідно з лемами 4, 2, отримуються рівності

$$max_{E'}(R) =$$
$$= \coprod \{max_{E_1}(U(p',k)), max_{E_2}(U(p,1))\} = \coprod \{k,1\} = k$$

(нагадаймо, що для випадку (3,5) виконується за припущенням нерівність $k \geq 1$). Аналогічно встановлюються рівності $min_E(R) = \prod \{min_{E_1}(U(p',k)), min_{E_2}(U(p,1))\} = \prod \{k,1\} = 1$ (необхідно зауважити, що насправді знайдене конкретне значення $min_E(R)$ несуттєве).

Застосовуючи лему 3 і враховуючи власне включення $E' \subset E$, отримуються рівності $max_E(R) = max_{E'}(R) = k$ та $min_E(R) = 0$.

Залишається показати, що обернене відношення R^{-1} шукане. Так як проекції за другою компонентою відношень $U(p',k)$ та $U(p,1)$ не перетинаються, то, згідно з лемами 2, 4 (враховуючи очевидний факт, що відношення, обернене до універсального відношення, знову буде універсальним), отримуються рівності

$$max_F(R^{-1}) = \coprod \{max_{F_1}(U(p',k))^{-1}, max_{F_2}(U(p,1))^{-1}\} =$$
$$= \coprod \{max_{F_1}(U(k,p')), max_{F_2}(U(1,p))\} = \coprod \{p',p\} = p.$$

Аналогічно встановлюються рівності

$$min_F(R^{-1}) = \prod \{min_{F_1}(U(p',k))^{-1}, min_{F_2}(U(p,1))^{-1}\} =$$
$$= \prod \{min_{F_1}(U(k,p')), min_{F_2}(U(1,p))\} = \prod \{p',p\} = p. \ \square$$

Для випадку (3, 6) відношення будується так: $R \overset{def}{=} \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$, де $R_0 \overset{def}{=} U(p',k) = \{x_1^0,...,x_{p'}^0\} \times \{y_1^0,...,y_k^0\}$ та $R_i \overset{def}{=} U(p'+i,1) = \{x_1^i,...,x_{p'+i}^i\} \times \{y^i\}$ для $i = 1,2,3,...$; причому елементи вигляду x_j^i, y_j^0, y^i, x покладаються попарно різними; далі $E \overset{def}{=} \pi_1^2(R) \bigcup \{x\} = \{x_1^0,...,x_{p'}^0, x_1^1,...,x_{p'+1}^1,...,x_1^i, x_2^i,...,x_{p'+i}^i,...,x\}$ та $F \overset{def}{=} \pi_2^2(R) = \{y_1^0,...y_k^0, y^1, y^2,...,y^i,...\}$. Доведення завершується аналогічно попереднім випадкам. □

Для випадку (4, 4) відношення будується так: $R \overset{def}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$, де $R_i \overset{def}{=} U(i,i) = \{x_1^i,...,x_i^i\} \times \{y_1^i,...,y_i^i\}$ для $i = 1,2,3,...$, причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i, x, y

покладаються попарно різними; далі $E \overset{def}{=} \pi_1^2(R) \bigcup \{x\} = \{x_1^1, x_1^2, x_2^2, ..., x_1^i, x_2^i, ..., x_i^i, ..., x\}$ та $F \overset{def}{=} \pi_2^2(R) \cup \{y\} = \{y_1^1, y_1^2, y_2^2, ..., y_1^i, ..., y_i^i, ..., y\}$. ▫

Для випадку (4, 5) відношення будується так: $R \overset{def}{=} \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$, де $R_0 \overset{def}{=} U(p', 1) = \{x_1^0, ..., x_{p'}^0\} \times \{y^0\}$ та $R_i \overset{def}{=} U(p, i) = \{x_1^i, ..., x_p^i\} \times \{y_1^i, ..., y_i^i\}$ для $i = 1, 2, 3, ...$, причому елементи вигляду $x_j^0, x_j^i, y^0, y_j^i, x$ покладаються попарно різними; далі $E \overset{def}{=} \pi_1^2(R) \bigcup \{x\} = \{x_1^0, ..., x_{p'}^0, x_1^1, ..., x_l^1, ..., x_p^i, x_2^i, ..., x_p^i, ..., x\}$ та $F \overset{def}{=} \pi_2^2(R) =$ $= \{y^0, y_1^1, y_1^2, y_2^2, ..., y_1^i, ..., y_i^i, ...\}$. ▫

Для випадку (4, 6) відношення будується так: $R \overset{def}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$, де $R_i \overset{def}{=} U(p' + i - 1, i) = \{x_1^i, ..., x_{p'+i-1}^i\} \times \{y_1^i, ..., y_i^i\}$, $i = 1, 2, 3, ...$, причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i, x покладаються попарно різними; далі $E \overset{def}{=} \pi_1^2(R) \cup \{x\} =$ $= \{x_1^1, ..., x_{p'}^1, x_1^2, ..., x_{p'+1}^2, ..., x_1^i, x_2^i, ..., x_{p'+i-1}^i, ..., x\}$ та $F \overset{def}{=} \pi_2^2(R) = \{y_1^1, y_1^2, y_2^2, ..., y_1^i, ..., y_i^i, ...\}$ (рис. 5). Необхідно показати, що так побудоване відношення R шукане.

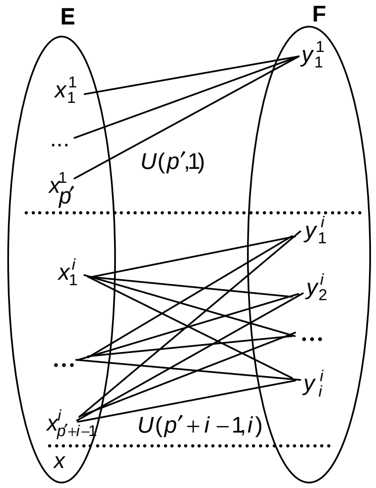

Рис. 5. Відношення для випадку (4, 6)

Нехай $E' \overset{def}{=} \pi_1^2(R) = \{x_1^1, ..., x_{p'}^1, x_1^2, ..., x_{p'+1}^2, ..., x_1^i, x_2^i, ..., x_{p'+i-1}^i, ...\}$ та $E_i \overset{def}{=} \pi_1^2 R_i = \{x_1^i, ..., x_{p'+i-1}^i\}$ для $i = 1, 2, 3...$ Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду R_i, де $i = 1, 2, ...$, не перетинаються, то, згідно з лемами 4, 2, отримуються рівності $max_{E'}(R) = \coprod_{i=1,2,...} max_{E_i}(R_i) =$ $= \coprod_{i=1,2,...} i = \infty$. Аналогічно встановлюються рівності $min_{E'}(R) = \prod_{i=1,2,...} min_{E_i}(R_i) = \prod_{i=1,2,...} i = 1$ (треба зауважити, що насправді знайдене конкретне значення $min_{E'}(R)$ несуттєве).

Застосовуючи лему 3 і враховуючи власне включення $E' \subset E$, отримуються рівності $max_E(R) = max_{E'}(R) = \infty$ та $min_E(R) = 0$.

Залишається показати, що обернене відношення R^{-1} шукане. Нехай $F_i \overset{def}{=} \pi_2^2(R_i) = \{y_1^i,...,y_i^i\}$ для $i = 1,2,3...$; тоді, згідно з тими самими лемами 4, 2, отримуються рівності $max_F(R^{-1}) = \coprod_{i=1,2,...} max_{F_i}\left(R_i^{-1}\right) = \coprod_{i=1,2,...}\left(p' + i - 1\right) = \coprod\left\{p', p' + 1, p' + 2,...\right\} = \infty$.

Аналогічно встановлюються рівності

$$min_F(R^{-1}) = \prod_{i=1,2,...} min_{F_i}\left(R_i^{-1}\right) = \prod_{i=1,2,...}\left(p' + i - 1\right) = \prod\left\{p', p' + 1, p' + 2,...\right\} = p'.$$ ▫

Для випадку (5, 5), подібного до випадку (2,5), відношення R будується так: $R \overset{def}{=} U(p',k') \cup U(p,k)$, де $U(p',k') \overset{def}{=} \{x_1,...,x_{p'}\}\times\{y_1,...,y_{k'}\}$ та $U(p,k) \overset{def}{=} \{x_1',...,x_p'\}\times\{y_1',...,y_k'\}$; далі покладемо $E \overset{def}{=} \{x_1,x_2,...,x_{p'},x_1',x_2',...,x_p'\}$ та $F \overset{def}{=} \{y_1,y_2,...,y_{k'},y_1',y_2',...,y_k'\}$, причому елементи вигляду x_i, x_j' та y_i, y_j' вважаються попарно різними. ▫

Для випадку (5, 6), подібного до випадку (3, 6), відношення будується так: $R \overset{def}{=} \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$, де $R_0 \overset{def}{=} U(p',k') = \{x_1^0,...,x_{p'}^0\}\times\{y_1^0,...,y_{k'}^0\}$ та $R_i \overset{def}{=} U(p'+i,k) = \{x_1^i,...,x_{p'+i}^i\}\times\{y_1^i,...,y_k^i\}$ для $i = 1,2,3,...$, причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i покладаються попарно різними; далі $E \overset{def}{=} \pi_1^2(R) = \{x_1^0,...,x_{p'}^0,x_1^1,...,x_{p'+1}^1,...,x_1^i,x_2^i,...,x_{p'+i}^i,...\}$ та $F \overset{def}{=} \pi_2^2(R) = \{y_1^0,...y_{k'}^0,y_1^1,...,y_k^1,...,y_1^i,...,y_k^i,...\}$. ▫

Для випадку (6, 6) нехай $i_{max} \overset{def}{=} max(p',k')$, тоді відношення побудуємо так: $R \overset{def}{=} \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$, де $R_0 \overset{def}{=} U(p',k') = \{x_1^0,...,x_{p'}^0\}\times\{y_1^0,...,y_{k'}^0\}$ та $R_i \overset{def}{=} U(i_{\max}+i, i_{\max}+i) = \{x_1^i,...,x_{i_{max}+i}^i\}\times\{y_1^i,...,y_{i_{max}+i}^i\}$ для $i = 1,2,3,...$, причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i покладаються попарно різними; далі $E \overset{def}{=} \pi_1^2(R) = \{x_1^0,...,x_{p'}^0,x_1^1,...,x_{i_{\max}+1}^1,...,x_1^i,x_2^i,...,x_{i_{\max}+i}^i,...\}$ та $F \overset{def}{=} \pi_2^2(R) = \{y_1^0,...y_{k'}^0,y_1^1,...,y_{i_{max}+1}^1,...,y_1^i,...,y_{i_{max}+i}^i,...\}$. ▫

З цієї теореми випливає, що, за винятком спеціального випадку порожнього відношення (дійсно, при $R = \varnothing$ відношення R, R^{-1} просто співпадають), немає логічного зв'язку між значеннями операторів min, max на вихідному та оберненому відношеннях; більш точно: для довільного розподілу значень операторів (крім розподілів, що відповідають коміркам табл. 1, заповненим –) існує відношення, на якому ці значення досягаються. Причина такого положення полягає в тому, що повні образи одноелементних множин несуть не просто локальну інформацію про відношення, а локальну числову інформацію.

Розглянемо це питання більш докладно. Добре відомий логічний зв'язок між відношенням та відношенням, оберненим до нього: відношення функціонально (ін'єктивно) тоді і тільки тоді, коли обернене відношення ін'єктивно (відповідно функціонально). Цей простий факт відмічений, наприклад, в [8, твердження 1].

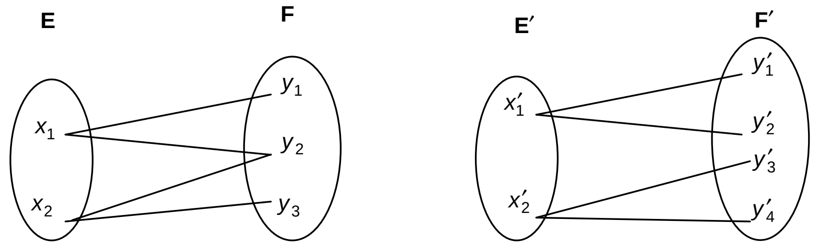

Рис. 6. Приклад ін'єктивного та неін'єктивного відношень, на яких оператори min , max мають однакові значення

Згідно з п. 9 леми 1, функціональність характеризується значенням оператора max, але для ін'єктивності ситуація принципово інша: на рис. 6 наведені прості приклади ін'єктивного та неін'єктивного відношень, на яких оператори max , min мають однакові значення.

4. Висновки

Практичний результат даної теореми полягає у тому, що при побудові бінарного типу зв'язку (який містить принаймні один зв'язок) та накладанні на нього min та max обмежень кардинальності (необмежена кардинальність) не існує логічного зв'язку між значеннями даних обмежень.

Основне завдання подальшої роботи – отримання аналогу теореми 1 для багатосторонніх типів зв'язків у моделі „сутність-зв'язок".

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Chen P.P. The entity-relationship model – towards a unified view of data // ACM Transactions on Database Systems. – 1976. – Vol. 1, N 1. – P. 9 – 36.
2. Ferg S. Cardinality concepts in entity-relationship modeling // Proceeding of the 10th International Conference on Entity-Relationship Approach. – 1991. – P. 1 – 30.
3. Thalheim B. Fundamentals of cardinality constraints // Proceeding of the 11th International Conference on the Entity-Relationship Approach. – 1992. – P. 7 – 23.
4. Lenzerini M., Santucci G. Cardinality constraints in the entity-relationship model // Proceeding of the International Conference on the Entity-Relationship Approach to Software Engineering. – 1983. – P. 529 – 549.
5. Hartmann S. Reasoning about participation constraints and Chen's constraints // Conferences in Research and Practice in Information Technology. – 2003. – Vol.17. – P. 8 – 16.
6. Буй Д.Б., Сільвейструк Л.М. Модель „сутність-зв'язок": формалізація сутностей та зв'язків // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 3. – С. 143 – 152.
7. Buy D., Silveystruk L. Formalization of structural constraints of relationships in model „entity-relationship" // International journal Information theories & applications. – Sofia. – 2007. – Vol. 14, N 4. – P. 343 – 349.
8. Буй Д.Б., Кахута Н.Д. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232 – 240.
9. Буй Д.Б., Кахута Н.Д. Властивості відношення конфінальності та устрій множини часткових функцій // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 125 – 135.
10. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. – Москва: Наука, 1982. – 158 с.

Стаття надійшла до редакції 04.12.2008