

УДК 519.63

І. Ю. Михайлова, аспірант

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

## СПОСІБ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ТЕСТУВАННЯ ТОЧНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ, ОТРИМАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ АДАПТИВНОЇ СІТКИ

Розглянуто алгоритм для функціонального тестування точності результатів, отриманих за використання адаптивного методу побудови різницевої сітки, на прикладі розв'язання тривимірного рівняння теплопровідності, що моделює нагрівання тонкої пластини за допомогою лазерного випромінювання.

**Ключові слова:** адаптивна сітка, тривимірне рівняння теплопровідності, інтерполяційна формула Лагранжа.

**Вступ.** Одним з етапів життєвого циклу програмного забезпечення (ПЗ) є тестування. Розрізняють кілька видів тестування в залежності від об'єкту: функціональне, продуктивності, інтерфейсу користувача, безпеки, локалізації тощо.

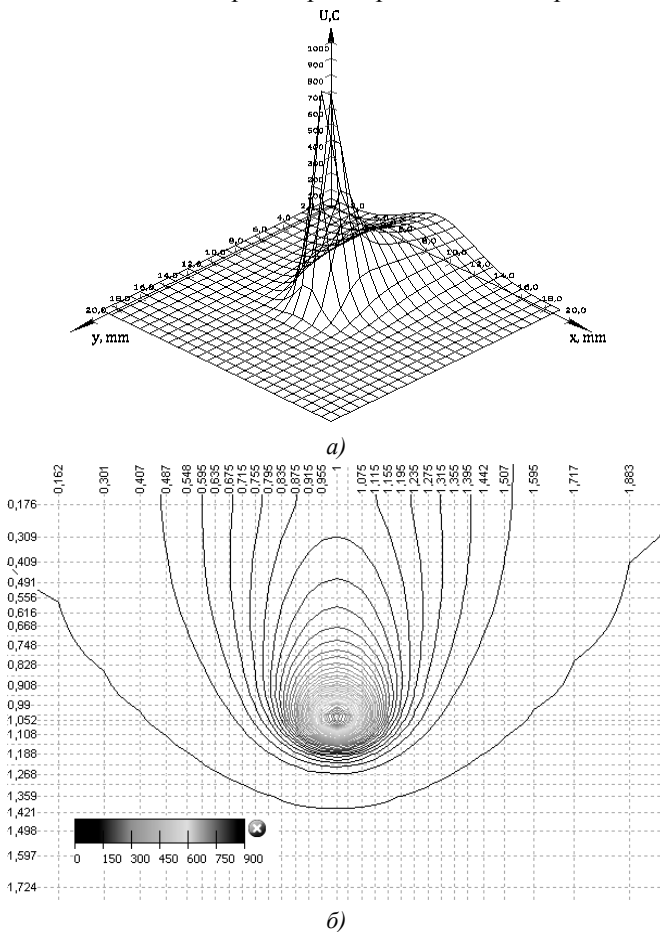
Проблема функціонального тестування часто виникає при внесенні змін до ПЗ, що використовується у науково-дослідних пошуках більш ефективного розв'язання задач, які потребують великих машинних ресурсів. Наприклад, при моделюванні теплових процесів, що описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП), тестують алгоритми розрахунку теплових полів. Очевидним способом перевірки правильності результату є розв'язування тестових задач з відомим точним розв'язком. Але в галузі теплотехніки це практично можна зробити лише для одно- та двовимірних задач, які є значним спрощенням реальних процесів. Для більшості тривимірних задач точний розв'язок одержати вкрай складно. Тому виникає проблема порівняння наближеного розв'язку, одержаного за новим алгоритмом, і деякого еталонного розв'язку.

У роботі розглядається алгоритм порівняння тривимірного температурного поля, отриманого за модифікованою програмою, з еталонним полем.

**Постановка завдання.** Для моделювання процесів у теплотехніці використовують ДРЧП, які розв'язуються числовими методами скінченних різниць, скінченних елементів тощо. Першим етапом цих методів є дискретизація розрахункової області, тобто побудова сітки. При моделюванні високоградієнтних процесів з метою скорочення часу розрахунку використовують адаптивні сітки, в яких вузли згущені у зонах великих градієнтів шуканої функції та розріджені в областях, де функція змінюється плавно [1; 2]. Для відладки отриманих алгоритмів доцільно ви-

користувати порівняння отриманих результатів з деяким еталоном. Найбільш точним розв'язком вважатимемо той, що отримано на щільній рівномірній сітці, тому його можна прийняти за етальонний розв'язок.

Порівняння температурних полів за використання різних методів побудови різницевої сітки будемо виконувати на прикладі моделювання лазерного опромінення тонкої металевої пластини (рис. 1). Даний процес описується за допомогою тривимірного рівняння теплопровідності [3].



**Рис. 1.** Температурне поле на поверхні деталі (а) та відповідні ізотерми в площині  $XOY$  (б) для  $t = 1.05$  с

**Алгоритм порівняння.** В адаптивних алгоритмах на кожному часовому кроці автоматично будується трьохвимірною нерівномірною по простору та часу різницева сітка, у вузлах якої буде знайдена температура

для даного моменту часу. Для тестування модифікованого методу побудови сіток застосуємо алгоритм, заснований на порівнянні з еталоном, у якості якого використаємо результати попереднього розрахунку з дрібним рівномірним кроком. Отже, для тестування необхідно виконати два окремих розрахунки на усьому відрізку модельного часу.

Результати етального розрахунку температурного поля на рівномірній сітці зберігаються у типізованому файлі, який для кожного моменту часу містить наступну інформацію:

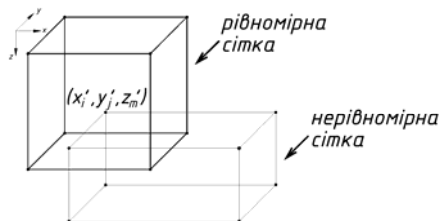
- тривимірний масив температур (масив *Data*);
- значення модельного часу (змінна *time*);
- просторові координати вузлів (масиви *Xmas*, *Ymas*, *Zmas*);
- кількість вузлів по кожній координаті (змінні *nXmas*, *nYmas*, *nZmas*).

Таким чином, кожен запис файлу в програмі визначається:

```
TRegionData = record
  Xmas, Ymas, Zmas: TVectorSingle;
  nXmas, nYmas, nZmas: integer;
  Data: TMatrix3Single;
  time: single;
  k: integer;
end;
```

```
de TVectorSingle = array[0..nDef] of single;
TMatrixSingle = array[0..nDef] of TVectorSingle;
TMatrix3Single = array[0..nDef] of TMatrixSingle;
nDef — задалегідь визначена кількість вузлів на рівномірній сітці.
```

При другому розрахунку на кожному часовому кроці для кожного вузла нерівномірної сітки (рис. 2) виконується порівняння отриманого значення з відповідним значенням етального розв'язку, використовуючи алгоритм, поданий на рис. 3.



**Рис. 2.** Схема взаємного розміщення вузлів рівномірної та адаптивної сіток

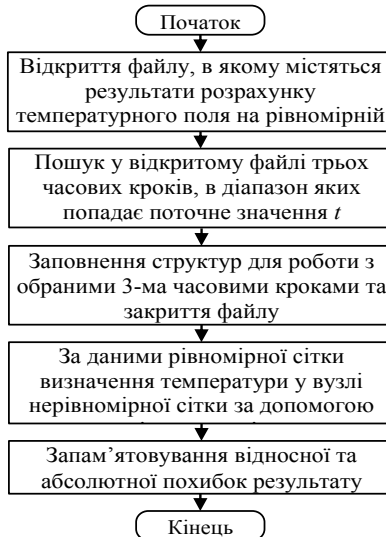
Розглянемо алгоритм порівняння температури деталі з еталоном для кожного вузла нерівномірної сітки.

Нехай задана рівномірна сітка в напрямку  $Ox$  з точками  $x_i$  ( $i = 0, \dots, N_x$ ), де  $N_x$  — кількість вузлів по осі  $Ox$ ; в напрямку  $Oy$  —

$y_j$  ( $j=0, \dots, N_y$ ), де  $N_y$  — кількість вузлів по осі  $Oy$ ; в напрямку  $Oz$  —  $z_m$  ( $m=0, \dots, N_z$ ), де  $N_z$  — кількість вузлів по осі  $Oz$ ; для часу —  $t_k$  ( $k=0, \dots, N_t$ ), де  $N_t$  — кількість часових шарів. Нехай у вузлах цієї сітки відомі значення еталонної функції  $U_{ijm}^k$ .

Нехай задана нерівномірна сітка в напрямку  $Ox$  з точками  $x'_i$  ( $i=0, \dots, n_x$ ), де  $n_x$  — кількість вузлів по осі  $Ox$ ; в напрямку  $Oy$  —  $y'_j$  ( $j=0, \dots, n_y$ ), де  $n_y$  — кількість вузлів по осі  $Oy$ ; в напрямку  $Oz$  —  $z'_m$  ( $m=0, \dots, n_z$ ), де  $n_z$  — кількість вузлів по осі  $Oz$ ; для часу —  $t'_k$  ( $k=0, \dots, n_t$ ), де  $n_t$  — кількість часових шарів. Нехай у вузлах цієї сітки відомі значення функції  $u_{ijm}^k$ .

Необхідно по значенням функції  $U(x, y, z, t)$  знайти значення цієї функції в точці  $(x'_i, y'_j, z'_m, t'_k)$  та порахувати різницю між значенням  $u(x'_i, y'_j, z'_m, t'_k)$  та  $U(x'_i, y'_j, z'_m, t'_k)$ .



**Рис. 3.** Схема алгоритму порівняння результатів розрахунку на різних видах сіток для кожного вузла

Застосуємо для інтерполяції по просторовим змінним послідовну лінійну інтерполяцію, яку виконаємо для трьох часових шарів. По трьом отриманим значенням виконаємо квадратичну інтерполяцію за часом.

Для кожного з вузлів  $(x'_i; y'_j; z'_m; t'_k)$  нерівномірної сітки виконуються дії.

1. Визначаємо, між якими двома часовими шарами еталону знаходиться шуканий вузол.
2. Якщо це перший або другий шар, то береться перші три шари для подальшого розрахунку; якщо це останній або передостанній шар, то беруться останні три; інакше беруться найближчі три часові шари. Отримуємо їх індекси  $K_1, K_2, K_3$ .

3. На кожному зі знайдених шарів по кожному з просторових напрямків шукаємо, між якими двома вузлами знаходиться шукана точка. Отримуємо точки

$$A_1(x_i, y_{j_1}, z_{m_1}), A_2(x_i, y_{j_2}, z_{m_1}), A_3(x_{i_2}, y_{j_2}, z_{m_1}), A_4(x_{i_2}, y_{j_1}, z_{m_1}),$$

$$B_1(x_i, y_{j_1}, z_{m_2}), B_2(x_i, y_{j_2}, z_{m_2}), B_3(x_{i_2}, y_{j_2}, z_{m_2}), B_4(x_{i_2}, y_{j_1}, z_{m_2}).$$

4. Використовуючи лінійну формулу Лагранжа для напрямку  $Oz$ , знаходимо значення в точках

$$C_1(x_i, y_{j_1}, z'_m), C_2(x_i, y_{j_2}, z'_m), C_3(x_{i_2}, y_{j_2}, z'_m), C_4(x_{i_2}, y_{j_1}, z'_m)$$

(рис. 4а):

$$U(C_n) = U(A_n) + \frac{(z'_m - z_{m_1})(U(B_n) - U(A_n))}{(z_{m_2} - z_{m_1})}, \quad (1)$$

де  $n = 1, \dots, 4$ .

5. Використовуючи лінійну формулу Лагранжа для напрямку  $Ox$ , знаходимо значення в точках  $D_1(x'_i, y_{j_2}, z'_m), D_2(x'_i, y_{j_1}, z'_m)$  (рис. 4б):

$$U(D_1) = U(C_1) + \frac{(x'_i - x_i)(U(C_4) - U(C_1))}{(x_{i_2} - x_i)}, \quad (2)$$

$$U(D_2) = U(C_2) + \frac{(x'_i - x_i)(U(C_3) - U(C_2))}{(x_{i_2} - x_i)}. \quad (3)$$

6. Використовуючи лінійну формулу Лагранжа для напрямку  $Oy$ , знаходимо значення в точці  $G(x'_i; y'_j; z'_m)$  (рис. 4в):

$$U_{K_1} = U(G) = U(D_2) + \frac{(y'_j - y_{j_1})(U(D_1) - U(D_2))}{(y_{j_2} - y_{j_1})}. \quad (4)$$

7. Повторюючи кроки 4—6 для решти часових шарів, знаходимо  $U_{K_2}$  та  $U_{K_3}$ .

8. Використовуючи отримані значення в шуканій точці на різних часових шарах, за допомогою квадратичної інтерполяції отримуємо остаточне значення у вузлі  $(x'_i; y'_j; z'_m; t'_k)$ :

$$U(x'_i; y'_j; z'_m; t'_k) = U_{K_1} \frac{(t-t_{K_2})(t-t_{K_3})}{(t_{K_1}-t_{K_2})(t_{K_1}-t_{K_3})} + U_{K_2} \frac{(t-t_{K_1})(t-t_{K_3})}{(t_{K_2}-t_{K_1})(t_{K_2}-t_{K_3})} + U_{K_3} \frac{(t-t_{K_1})(t-t_{K_2})}{(t_{K_3}-t_{K_1})(t_{K_3}-t_{K_2})}. \quad (5)$$

9. Знаходимо абсолютне значення різниці між еталонним  $U(x'_i; y'_j; z'_m; t'_k)$  та наближеним  $u(x'_i; y'_j; z'_m; t'_k)$  розв'язками.
10. Знаходимо відносне значення різниці між  $U(x'_i; y'_j; z'_m; t'_k)$  та  $u(x'_i; y'_j; z'_m; t'_k)$ .

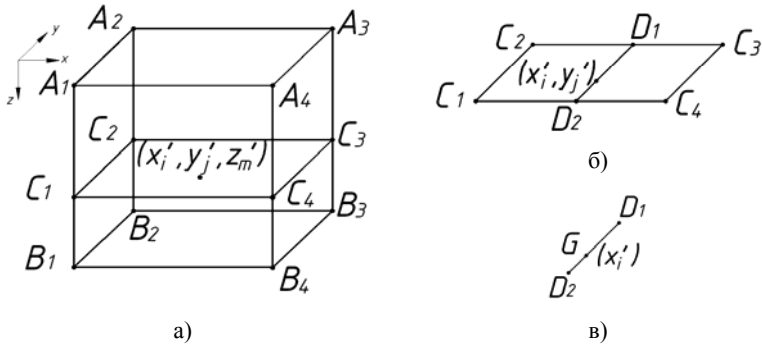


Рис. 4. Схема інтерполяції значення функції  $U(x, y, z, t)$

**Програмне забезпечення** написано на мові програмування Delphi з використанням бібліотеки OpenGL для побудови тривимірних графіків.

**Результати розрахунків.** Моделювання проводилося для тонкої пластини зі сталі конструкційної 65Г. Геометричні розміри пластини:  $L_x = 20 \text{ mm}$ ,  $L_y = 20 \text{ mm}$ ,  $L_z = 2 \text{ mm}$ .

Значення параметрів випромінювання та навколишнього середовища:  $q_{\max} = 20 \frac{Wt}{mm^2}$ ,  $r = 2 \text{ mm}$ ,  $\nu = 10 \frac{mm}{sec}$ ,  $U_c = 20^\circ$ , Гаусівський розподіл щільності випромінювання.

Для порівняння з іншим розв'язком спочатку потрібно здійснити розрахунок на рівномірній щільній сітці, яка приймається за еталон:  $\tau = 0.02 \text{ sec}$ ,  $h_1 = h_2 = 0,4 \text{ mm}$ ,  $h_3 = 0,04 \text{ mm}$ . Для здійснення такого розрахунку потрібно виконати 500 кроків.

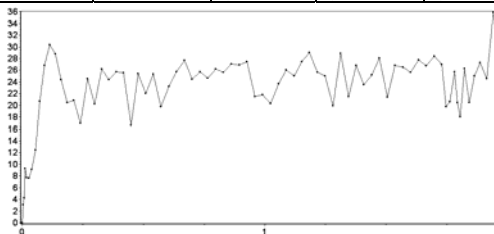
Після цього здійснюється розрахунок, використовуючи адаптивну сітку. Даний розрахунок завершується за 75 кроків за часом та з 15-40 кроків, які обираються автоматично. Після розрахунку температурного поля на кожному кроці виконується порівняння з результатом, отриманим на рівномірній щільній сітці, за описаним алгоритмом. В результаті отримуємо 2D графіки максимального відхилення значення, отриманого при другому розрахунку, від відповідного значення при першому розрахунку, а також 3D графіки похибок в кожній точці.

З графіків видно, що найбільша абсолютна похибка становить  $35,87^\circ$ , а найбільша відносна — 12,5% (рис. 5). При чому положення абсолютної та відносної похибок не співпадає (табл. 1). Найбільше значення похибок має місце на поверхні деталі, де діє промінь лазера. З графіків абсолютної похибки (рис. 6) видно, що найбільша різниця температур спостерігається безпосередньо у зоні дії лазерного променя, в той час як для відносної похибки найбільше відхилення спостерігається навколо зони впливу променя, оскільки саме в цих областях перепад температур найбільший.

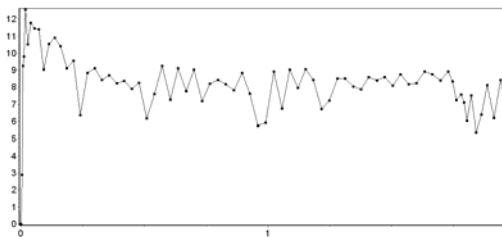
Таблиця 1

*Розташування максимальних похибок*

	Коорд. X	Коорд. Y	Коорд. Z	Коорд. t	Значення похибки
Абсолютна похибка	0,96	1,92	0,00	1,94	$35,87^\circ$
Відносна похибка	1,12	0,00	0,00	0,02	12,5%

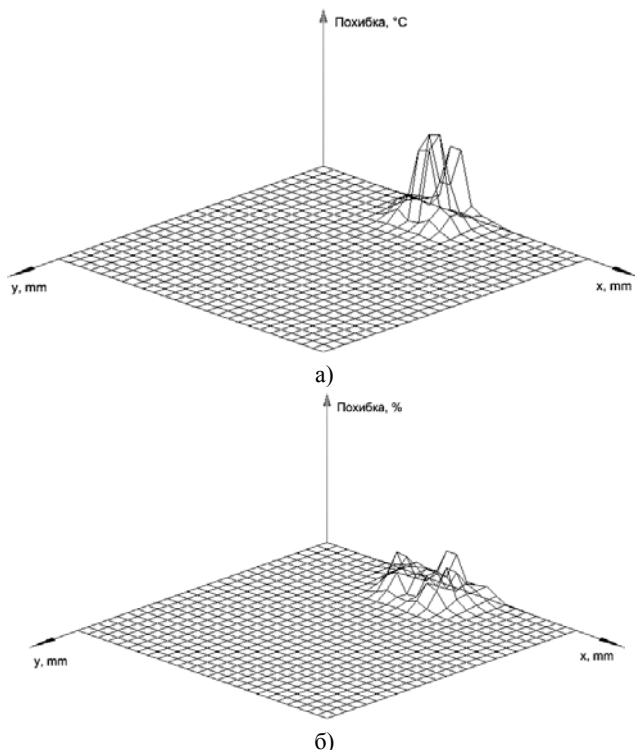


а)



б)

**Рис. 5.** Максимальні абсолютна (а) та відносна (б) похибки для кожного моменту часу



*Рис. 6. Графіки абсолютної (а) та відносної (б) похибки в момент часу  $t = 0,2$  с*

**Висновки.** Функціональне тестування точності результатів, отриманих за використання нових методів розв'язання ДРЧП та їх складових частин, дозволяє отримати дані щодо можливості подальшого застосування нового методу для вирішення перевіреного класу рівнянь. Запропонований алгоритм дає можливість порівняти результати розрахунку, отриманого на щільній рівномірній сітці, та розрахунку, отриманого за використання адаптивної сітки. Розглянутий приклад показує, що при застосуванні адаптивного методу побудови різницевої сітки, максимальна похибка в середньому дорівнює 8% і спостерігається навколо області дії лазерного променя, оскільки в цих областях найбільший перепад температур. Даний алгоритм доцільно застосовувати при функціональному тестуванні нових методів побудови різницевої сітки.

#### Список використаних джерел:

1. Оран Э. Численное моделирование реагирующих потоков / Э. Оран, Дж. Борис. — М. : Мир, 1990. — 660 с.



2. Марчук Г. И. Методы расщепления / Г. И. Марчук. — М. : Наука, 1988. — 264 с.
3. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 5-е изд. — М. : Наука, 1977. — 735 с.

Algorithm for accuracy testing of results obtained by using adaptive grid building method applied to the solving of 3D heat equation which is used to model the process of laser heating of thin plate, is reviewed.

**Key words:** *adaptive grid, 3D heat equation, Lagrange interpolation formulae.*

Отримано: 11.10.2012

УДК 621.381.82

**И. В. Мирошниченко**, старший преподаватель

Национальный технический университет Украины “КПИ”, г. Киев

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ КЛАССИФИКАЦИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Предлагается вариант классификатора задач статистических измерений для этапа внешнего проектирования систем обработки экспериментальных данных. Способ классификации может найти применение в новых информационных технологиях при формировании математических моделей предметных областей и разработке алгоритмов и программ.

**Ключевые слова:** *предметная область, случайные процессы, классификатор измерительных задач, основные и дополнительные идентификаторы, погрешность классификации, статистические измерения, информационные технологии.*

**Вступление.** Целью экспериментальных исследований в различных предметных областях является измерение мгновенных значений  $x_i(t_j)$  сигналов  $x(t)$ , несущих информацию о физических процессах, которые могут быть описаны вероятностными математическими моделями, чаще всего в виде случайного процесса. Результаты измерений  $x_i(t_j)$  служат для вычисления оценок  $\Theta^*[x(t)]$  различных статистических характеристик  $\Theta[x(t)]$  случайных процессов в системах обработки экспериментальных данных (СОЭД). Несоответствие реальных процессов в предметных областях приписываемым им моделям, сформированным по результатам вычисления  $\Theta^*[x(t)]$ , характеризуется *погрешностью классификации*, оценка которой является основной задачей боль-