The article deals with various kinds of topological structures of computer networks, focused on use in the energetics monitoring systems. The analysis of structures and selecting the most appropriate conditions regarding the optimization of the network to enable the implementation of information security means are conducted.

Key words: *network topology, information security, tree-hypercube network, ring topology.*

Отримано: 09.02.2012

УДК 004.421:519.64

В. А. Тихоход, канд. техн. наук

Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев

РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ОТКРЫТОГО ТИПА

Рассмотрены вопросы исследования интегральных динамических моделей путем применения квадратурных формул открытого типа. Описаны алгоритмы решения линейных и нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра и их систем.

Ключевые слова: *интегральные модели динамических систем, метод квадратур, алгоритмы решения интегральных уравнений.*

Введение. Как известно, интегральные уравнения Вольтерра содержат интегральный оператор с переменным верхним пределом. При их численном решении распространенным подходом является аппроксимация интегрального оператора квадратурными суммами. При этом часто для решения скалярных интегральных уравнений применяют квадратурные формулы трапеций и прямоугольников, которые учитывают значения функций на концах отрезка интегрирования. Такие формулы называются формулами закрытого типа. При решении системы интегральных уравнений при помощи формул закрытого типа на каждом дискретном шаге возникает необходимость в дополнительном решении системы алгебраических уравнений относительно n неизвестных, где n — количество искомых функций. Избежать решения дополнительных уравнений позволяет применение квадратурных формул открытого типа, которые не учитывают в расчетах значения функции на концах отрезка интегрирования. Это позволяет уменьшить сложность алгоритмов и сократить объемы вычислений.

Квадратурные формулы Ньютона — Котеса. Метод квадратурных формул состоит [1] в замене интегрального уравнения аппроксимирующей системой алгебраических (конечных) уравнений относительно дискретных значений искомой функции и последующем решении полученной системы. При этом в уравнениях типа Вольтерра фиксируется верхний предел интегрирования и применяются формулы для приближенного вычисления определенного интеграла, имеющие в общем случае вид

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R[f], \tag{1}$$

где x_i — фиксированные абсциссы (узлы) отрезка $[a, b]$, A_i — числовые коэффициенты или весовые множители, $R[f]$ — остаточный член (погрешность аппроксимации); обычно $A_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} A_i = b - a$. Для формул закрытого типа $x_1 = a$, $x_n = b$.

Существует большое количество квадратурных формул вида (1). К ним относятся также формулы Ньютона — Котеса (в том числе прямоугольников, трапеций, Симпсона).

Формулы Ньютона — Котеса вычисления определенного интеграла получаются путем замены подынтегрального выражения интерполяционным многочленом Лагранжа [2]

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Пусть узлы интерполирования расположены так:

$$x_i = c + ih \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь a либо совпадает с c, и тогда будем предполагать [2], что $b=a + (n + 1)h$, либо $c + h = a$, и тогда предполагаем, что $c + nh = b$. В первом случае узлы интерполирования не содержат точек c и d, а промежуток интегрирования разбивается узлами на $n + 1$ равных частей. Во втором случае концы промежутка интегрирования являются узлами интерполирования, и промежуток интегрирования разбивается узлами на n–1 равных частей. Формулы численного интегрирования, которые получаются в первом случае, называют формулами открытого типа, а во втором случае — формулами замкнутого (закрытого) типа. При вычислениях интеграла с помощью формул открытого типа нет необходимости вычислений функции на границах отрезка интегрирования.

Положим

$$a = c + (1 - k)h, \quad b = c + (n + k)h.$$

Для формул открытого типа $k = 1$, а для формул замкнутого типа $k = 0$. Коэффициенты формул Ньютона-Котеса не зависят от промежутка интегрирования и от вида $f(x)$, а являются функцией только от n. Поэтому их можно вычислить заранее. Кроме того, равноотстоящие от концов коэффициенты равны между собой. Значения коэффициентов A_i зависят от трех параметров: типа квадратурной формулы k, количества узлов интерполяции n и номера узла интерполяции i.

Простейшие формулы открытого типа имеют вид:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{1}{3}h^3 f''(\xi),$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3}{2}h(f(x_1) + f(x_2)) + \frac{1}{4}h^3 f''(\xi), \tag{2}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{4}{3}h(2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)) + \frac{28}{90}h^5 f^{(4)}(\xi). \tag{3}$$

Квадратурные формулы имеют высокую погрешность на большом отрезке. Эту погрешность снижают путем применения общих или составных, квадратурных формул. Такие формулы получают, если квадратурную формулу применить не ко всему отрезку, а разбить его сначала на части и к каждой части в отдельности применить квадратурную формулу. При этом стремятся разбить на части так, чтобы интеграл от соответствующей вписанной ломаной был возможно более близким к интегралу от $f(x)$. При этом значения интеграла от $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ и погрешность вычислений R_n определяют суммированием соответственно найденных значений интеграла от функции на отдельных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ и их погрешностей R_i.

Подходы к применению квадратурных формул высокого порядка. При решении систем интегральных уравнений требуется большое количество арифметических операций, что выдвигает повышенные требования к точности применяемых методов. В ряде случаев одним из методов уменьшения погрешности вычислений является применение для решения интегральных уравнений составных квадратурных формул высокого порядка. При этом при применении n-точечных формул возникает необходимость в интерполяции значений искомой функции в промежуточных точках. Также необходимо интерполировать ядра и правые части в случае их табличного описания.

Интерполирование функций часто не дает приемлемых результатов и вносит погрешности в решение исходного уравнения. Избежать интерполирования позволяет подход, который состоит в применении алгоритмов на основе комбинаций квадратурных формул высоких порядков, позволяющие проводить вычисления на сетке с произвольным количеством узлов.

Алгоритмы, основанные на вычислении интегралов с помощью комбинаций квадратурных формул закрытого типа высоких порядков рассмотрены в работе [3]. Замена в этих алгоритмах формул закрытого типа формулами открытого типа позволяет получить новые алгоритмы, в которых отсутствует этап решения систем алгебраических уравнений. При этом основной является замена простой квадратурной формулы в конце отрезка интегрирования, а общая квадратурная формула может применяться как открытого, так и закрытого типа.

Рассмотрим следующий вариант комбинации квадратурных формул. При непарном количестве узлов применяем для вычисления интеграла общую квадратурную формулу Симпсона и простую 3-х точечную квадратурную формулу открытого типа (2). При парном количестве разбиваем интеграл на сумму интегралов

$$\int_a^{x_i} K(x_i,s)y(s)ds = \int_a^{x_{i-3}} K(x_i,s)y(s)ds + \int_{x_{i-3}}^{x_i} K(x_i,s)y(s)ds,$$

первый из которых вычисляем по общей квадратурной формуле Симпсона, а второй — с помощью простой 4-х точечной квадратурной формулы открытого типа (3). Комбинированная формула при этом принимает вид (при шаге h — постоянном):

$$\int_{x_1}^{x_i} f(x_i)dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{h}{3}\left(f(x_1)+f(x_{i-2})\right)+\dfrac{4}{3}h\sum\limits_{k=1}^{M} f(x_{2k})+\dfrac{2h}{3}\sum\limits_{l=1}^{M-1} f(x_{2l+1})+ \\ +2hf(x_{i-1}), \quad M=(i-3)/2, \textit{ при } i-\textit{непарном}; \\ \dfrac{h}{3}\left(f(x_1)+f(x_{i-3})\right)+\dfrac{4}{3}h\sum\limits_{k=1}^{M} f(x_{2k})+\dfrac{2h}{3}\sum\limits_{l=1}^{M-1} f(x_{2l+1})+ \\ +\dfrac{3}{2}h\left(f(x_{i-2})+f(x_{i-1})\right), M=i/2-2, \textit{ при } i-\textit{парном}. \end{cases} \tag{4}$$

Квадратурные коэффициенты формулы при произвольном шаге h приведены в табл. 1.

Таблица 1

Квадратурные коэффициенты формулы (4)

Узел x_i	Коэффициенты
$i=2g+1$	$A_1=\dfrac{h_1}{3}$; $A_{2k}=\dfrac{4h_{2k}}{3}$; $A_{2l+1}=\dfrac{2h_{2l+1}}{3}$; $A_{i-2}=\dfrac{h_{i-2}}{3}$; $k=\overline{1,\dfrac{i-3}{2}}$; $l=\overline{1,\dfrac{i-3}{2}-1}$
$i=2g$	$A_1=\dfrac{h_1}{3}$; $A_{2k}=\dfrac{4h_{2k}}{3}$; $A_{2l+1}=\dfrac{2h_{2l+1}}{3}$; $A_{i-3}=\dfrac{h_{i-3}}{3}$; $A_{i-2}=\dfrac{3h_{i-2}}{2}$; $A_{i-1}=\dfrac{3h_{i-1}}{2}$; $k=\overline{1,\dfrac{i}{2}-2}$; $l=\overline{1,\dfrac{i}{2}-3}$

Решение линейных скалярных интегральных уравнений Вольтерра. Рассмотрим линейное интегральное уравнение типа Вольтерра II рода вида:

$$y(x) = \int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x)\,. \tag{5}$$

Если решение ищется на отрезке $[a, b]$, разбиваем его точками $a = x_1 < x_2 <\ldots< x_n < x_{n+1} = b$ на n частей. Для получения аппроксимирующей алгебраической системы используем выражение

$$y(x_i) = \int_a^{x_i} K(x_i,s)y(s)ds + f(x_i)\,, \tag{6}$$

которое получается из исходной системы при фиксированных значениях x_i независимой переменной x. После замены интегралов в (6) конечными суммами получаем:

$$y(x_i) = \sum_{l=1}^{i} K(x_i,x_l)y(x_l)A_l + f(x_i) + R_i[y]\,, \tag{7}$$

где $R_i[y]$ — ошибки. Полагая $R_j[y]$ малыми и отбрасывая их, получаем формулу:

$$y(x_i) = \sum_{l=1}^{i} K(x_i,x_l)y(x_l)A_l + f(x_i)\,. \tag{8}$$

Так как в (8) значение $y(x_i)$ при использовании квадратурных формул открытого типа не берется во внимание, а значения переменных $y(x_l)$ для $l < i$ известны, то $\sum_{l=1}^{i} K(x_i,x_l)y(x_l)A_l$ — есть постоянная величина, суммируя которую с $f(x_i)$ определяем приближенные значения $y(x)$ в узлах x_i ($i = \overline{1,n+1}$).

Тестовый пример. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра II рода вида:

$$y(x) - \int_0^x (x-s)y(s)ds = 2\cos x - 1\,. \tag{9}$$

Известно, что его точное решение

$$y(x) = \cos x\,.$$

Методом квадратур найдем решение уравнения (9) на отрезке [0, 6] с постоянным шагом h = 0,02. Для моделирования погрешности входных данных к правой части уравнения (9) с помощью датчика случайных чисел добавим ошибки с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением $\delta = 5e-4$.

Абсолютные погрешности решения показаны на рис. 1. Как видно, в данном случае комбинация формул третьего и четвертого порядков показала более точные результаты по сравнению с методом трапеций и 3-х точечной формулой с использованием интерполяции.

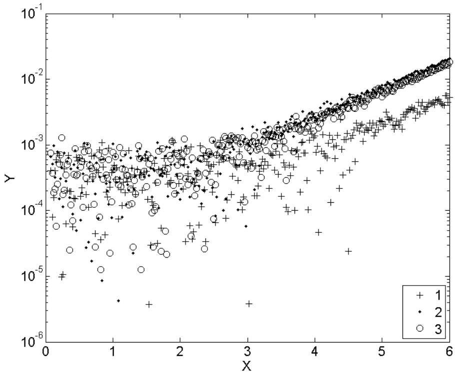

Рис. 1. *Абсолютная погрешность решения интегрального уравнения: 1 — комбинация квадратурных формул открытого и закрытого типов; 2 — формула открытого типа 3-го порядка с использованием кубической интерполяции; 3 — метод трапеций*

Решение систем линейных интегральных уравнений Вольтерра. Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений типа Вольтерра II рода вида:

$$y_r(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_a^x K_{rj}(x,s) y_j(s) ds + f_i(x),\ r = \overline{1,m} \tag{10}$$

где m — размерность системы.

После аппроксимации, замены в (10) интегралов конечными суммами и отбрасывания остаточных членов получается система

$$y_r(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{i} K_{rj}(x_i, x_l) y_j(x_l) A_l + f_r(x_i),\ r = \overline{1,m}\ . \tag{11}$$

Так как значения y_r в точке x_l для $l < i$ известны, а значение функции в точке x_i не принимаются во внимание, то $\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{i} K_{rj}(x_i, x_l) y_j(x_l) A_l$ — есть постоянная величина, суммируя которую с $f_r(x_i)$ определяем значения $y_r(x)$ в узлах x_i ($i = \overline{1, n+1}$).

Блок-схема алгоритма представлена на рис. 2. В ней используются следующие обозначения:

$$K_{rji}^{(l)} = K_{rj}(x_i, x_l), \quad y_j^{(l)} = y_j(x_l), \quad f_r^{(i)} = f_r(x_i)\ .$$

Решение нелинейных скалярных интегральных уравнений Вольтерра — Урысона. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра — Урысона II рода вида:

$$y(x) = \int_a^x K\left[x, s, y(s)\right] ds + f(x). \tag{12}$$

Проделав операции, как в предыдущем пункте, получаем следующую формулу для вычисления искомой функции:

$$y(x_i) = \sum_{l=1}^{i} A_l K\left[x_i, x_l, y(x_l)\right] + f(x_i), \tag{13}$$

где $\sum_{l=1}^{i} A_l K\left[x_i, x_l, y(x_l)\right]$ — постоянная величина.

Решение системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра — Урысона. Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра — Урысона II рода вида:

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^x K_{ij}\left[x, s, y_j(s)\right] ds + f_i(x),\ i = \overline{1, n} \tag{14}$$

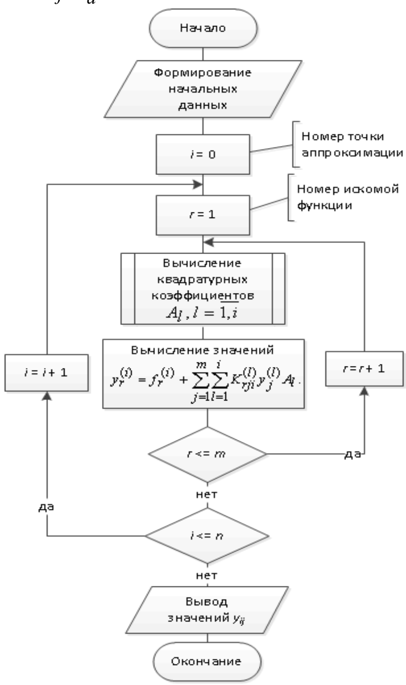

Рис. 2. *Схема решения системы интегральных уравнений с помощью квадратурных формул открытого типа*

После аппроксимации, замены интегралов конечными суммами и отбрасывании ошибок, получаем выражение:

$$y_r(x_i) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{i} A_l K_{rj}\left[x_i, x_l, y_j(x_l)\right] + f_r(x_i),\ r = \overline{1,m}\,, \qquad (15)$$

где $\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{i} A_l K_{rj}\left[x_i, x_l, y_j(x_l)\right]$ — постоянная величина, суммируя которую с $f_r(x_i)$ определяют значения $y_r(x)$ в узлах x_i ($i = \overline{1, n+1}$).

Алгоритм решения системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра — Урысона в системе Matlab представлен на рис. 3. Подпрограмма МС возвращает коэффициенты составной квадратурной формулы Ньютона — Котеса закрытого типа. Подпрограмма МО возвращает коэффициенты простой квадратурной формулы Ньютона — Котеса открытого типа. Следующие функции являются встроенными в Matlab:

- функция *length(a)* определяет размерность вектора *a*;
- функция *size(a, b)* предназначена для определения размера массива *a* по размерности *b*;
- функция *sum(a)* вычисляет сумму элементов вектора или массива *a*.

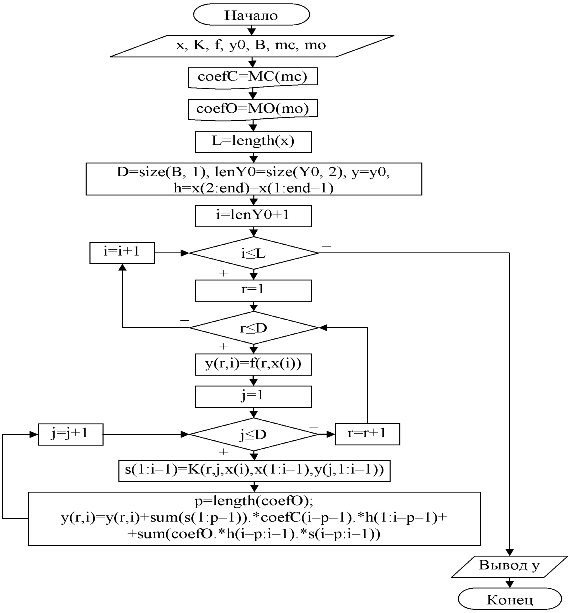

Рис. 3. *Алгоритм решения системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра — Урысона II рода с помощью комбинации квадратурных формул закрытого и открытого типов*

Тестовый пример. Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений вида:

$$\begin{cases} y_1(x) + 0.5\int\limits_0^x xy^2(s)ds - \int\limits_0^x (x-s)y^2(s)ds = e^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-2x} - \frac{1}{16}e^{-4x} + \frac{1}{16}; \\ y_2(x) - \int\limits_0^x (x+s)y^2(s)ds + 2\int\limits_0^x xy^2(s)ds = \frac{5}{4}e^{-2x} - xe^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-4x} - \frac{1}{4}; \end{cases} \quad (16)$$

с точным решением

$$y_1(x) = e^{-x}, \; y_2(x) = e^{-2x}. \quad (17)$$

Решим уравнение на отрезке [0, 7] с постоянным шагом h=0.01. Точное и приближенное решение представлено на рис. 4, 5, абсолютные погрешности представлены на рис. 6, 7. Как видно, для рассмотренного примера при заданных параметрах предложенный алгоритм показал достаточно высокую точность, не превышающую 0,6%. Чем мельче выбирается шаг интегрирования, тем точнее получается решение.

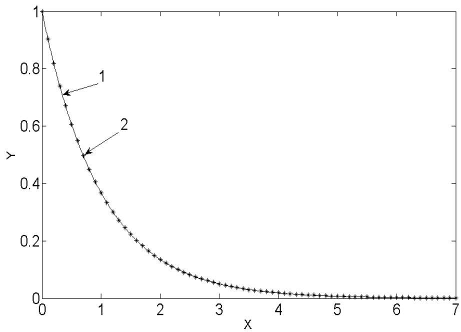

Рис. 4. *Решение системы интегральных уравнений (16) с помощью комбинации квадратурных формул открытого и закрытого типов (для функции y_1): 1 — точное решение, 2 — приближенное решение*

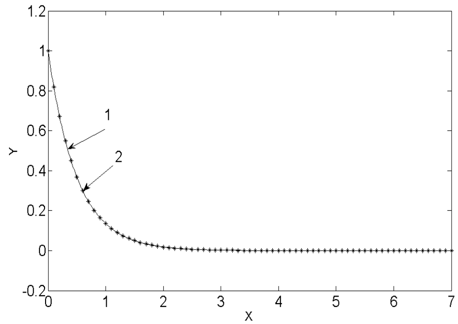

Рис. 5. *Решение системы интегральных уравнений (16) с помощью комбинации квадратурных формул открытого и закрытого типов (для функции y_2): 1 — точное решение, 2 — приближенное решение*

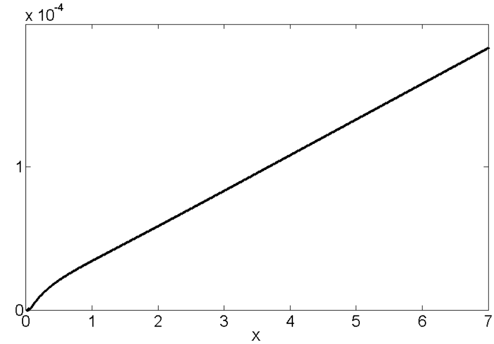

Рис. 6. *Абсолютная погрешность решения системы интегральных уравнений (16) с помощью комбинации квадратурных формул открытого и закрытого типов (для функции y_1)*

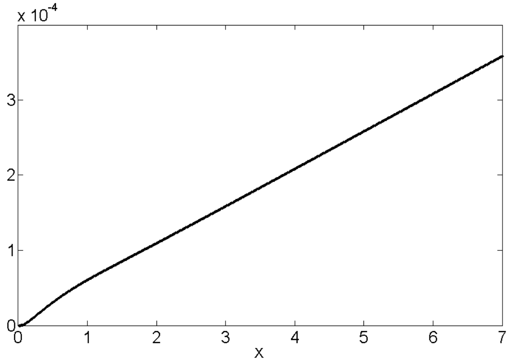

Рис. 7. *Абсолютная погрешность решения системы интегральных уравнений (16) с помощью комбинации квадратурных формул открытого и закрытого типов (для функции y_2)*

Выводы. Таким образом, применение квадратурных формул открытого типа позволило уменьшить сложность алгоритмов решения интегральных уравнений и их систем. Применение в алгоритмах комбинаций квадратурных формул разных порядков также позволило повысить точность алгоритмов.

Список использованной литературы:

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 542 с.
2. Березин С. И. Методы вычислений : в 2 т. / С. И. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1962. — Т. 1.
3. Верлань А. Ф. Комбинированные квадратурные алгоритмы реализации интегральных моделей многосвязных динамических систем / А. Ф. Верлань, В. А. Тихоход // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні

науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет, 2008. — Вип. 1. — С. 19–26.

The questions of the study of integral dynamic models by applying the quadrature formula of open type. Described by algorithms for solving linear and nonlinear Volterra integral equations and their systems.

Key words: *integral models of dynamic systems, the method of quadrature, algorithms for solving integral equations*

Отримано: 21.03.2012

УДК 517.977.11;517.977.32

В. К. Толстых, д-р физ.-мат. наук

Донецкий национальный университет, г. Донецк

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Рассматривается новое понятие управляемости для систем с распределёнными параметрами. Оно формулируется как корректность по А. Н. Тихонову обратного отображения пространства состояний в пространство управлений. Предложен метод реализации такой управляемости посредством экстремальных методов оптимизации с регуляризацией. Рассмотрен пример реализации управляемости по заданному целевому функционалу для квазилинейной гиперболической системы.

Ключевые слова: *управляемость, СРП, регуляризация.*

Введение. Отсутствие единого подхода в теории оптимизации породило большое разнообразие понятий управляемости [1—8 и др.]. При рассмотрении управляемости интересуются принципиальной возможностью перевода управляемой системы из одного заданного множества состояний в другое заданное множество состояний (множество достижимости), как правило, за конечное время.

На сегодняшний день не выработано единого понятия и подхода к анализу управляемости для произвольных систем с распределёнными параметрами (СРП). Преобладают попытки обобщения результатов управляемости, полученных для систем с сосредоточенными параметрами. При этом управляемость трактуется как возможность перевода системы из начального в заданное терминальное состояние при помощи допустимых управлений.

Такое понятие управляемости для широкого круга задач оптимизации СРП оказывается бесполезным, поскольку управляемость по терминальному состоянию не гарантирует управляемости по пространственно локализованным условиям, накладываемым на состояние СРП в целевом функционале типа