УДК 519.6

Д. А. Верлань, аспірант

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ

У роботі розв'язується задача апроксимації функції двох змінних у вигляді білінійного ряду для побудови програмних засобів функціонального перетворення в системах керування.

Ключові слова: *алгоритм, апроксимація, білінійний ряд, функціональний перетворювач, система керування.*

Побудова сучасних систем керування пов'язана з використанням великої кількості розрахунків, серед яких важливе місце займає чисельне представлення функцій двох змінних [1]. До подібних задач відноситься формування блоків перетворення функцій двох змінних (канали управління за двома змінними). Задача полягає при цьому в отриманні такого представлення функцій двох змінних, яке приводить до найбільш простої структури реалізації в програмному або апаратному вигляді. Такі ж задачі характерні для вимірювальних та контролюючих каналів як цифрових так і аналогових регуляторів. Крім того, широкий клас вимірювальних перетворювачів, що застосовуються в системі управління являє собою так звані багато параметричні перетворювачі, завдання реалізації яких вимагає ефективного представлення функції двох або більше змінних. Можна також вказати, що складність та актуальність розглянутої задачі слідує з того, що в до комп'ютерний період в регуляторах механічного типу для відтворення функції двох змінних використовувалась металічні "кулачки", форма яких представляла функцію, що відтворювалась; виготовлення даних пристроїв є трудомісткою технічною задачею.

В аналогових регуляторах успішний розв'язок задачі відтворення функції двох змінних однозначно залежав від вдалого способу їх апроксимації функціями однієї змінної [2]. В сучасних цифрових керуючих системах дана задача розв'язується програмним шляхом, реалізація якого також значно спрощується, якщо є можливість представити двомірну функцію у вигляді одномірних. Застосування в цьому випадку традиційних аналітичних методів апроксимації функції двох змінних [3] видається не ефективним, оскільки при цьому необхідно виконувати аналітичні перетворення для отримання апроксимуючих виразів. Ця обставина суперечить умові оперативного відтворення функцій в задачах курування, бо ці процеси необхідно виконувати в реальному часі.

Будемо розглядати задачу наближення функції двох змінних у такому вигляді. Нехай задана інтегрована в квадраті ($a \le x \le b$,

$a \le s \le b$) функція $K(x,s)$ і необхідно апроксимувати її сумою $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x)\beta_j(s)$, яку будемо отримувати з умови мінімуму квадратичного функціоналу

$$\Phi = \int_a^b \int_a^b \left[K(x,s) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\beta_i(s) \right]^2 dxds\,, \tag{1}$$

тобто, отримується наближення у вигляді

$$K(x,s) \cong \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\beta_i(s)\,. \tag{2}$$

Згідно з ітераційно-варіаційним методом [4], доданки суми, що апроксимує функцію $K(x,s)$, знаходяться почергово. Тобто, спочатку знаходиться один доданок $\alpha_1(x)\beta_1(s)$. Цей перший доданок формуємо таким чином: задаємо $\beta_1^{(0)}(s)$ — початкове наближення функції $\beta_1^{(0)}(s)$ та, знаючи його, знаходимо $\alpha_1^{(0)}(x)$ — початкове наближення для $\alpha_1(x)$:

$$\alpha_1^{(0)}(x) = \frac{\int_a^b K_1(x,s)\beta_1^{(0)}(s)ds}{\int_a^b \left(\beta_1^{(0)}(s)\right)^2 ds}\,, \tag{3}$$

де $K_1(x,s) = K(x,s)$. Отримавши функцію $\alpha_1^{(0)}(x)$, визначаємо:

$$\beta_1^{(1)}(s) = \frac{\int_a^b K_1(x,s)\alpha_1^{(0)}(x)dx}{\int_a^b \left(\alpha_1^{(0)}(x)\right)^2 dx} \tag{4}$$

і далі поступово наближуємо $\alpha_1^j(x)\beta_1^j(s)$ до $K_1(x,s)$, використовуючи такі формули:

$$\alpha_i^{(j)}(x) = \frac{\int_a^b K_i(x,s)\beta_i^{(j)}(s)ds}{\int_a^b \left(\beta_i^{(j)}(s)\right)^2 ds}\,, \tag{5}$$

$$\beta_i^{(j)}(s) = \frac{\int_a^b K_i(x,s)\alpha_i^{(j-1)}(x)dx}{\int_a^b \left(\alpha_i^{(j)}(x)\right)^2 dx}, \tag{6}$$

де i — номер доданку суми, j — номер кроку ітерації, до виконання умови

$$\left.\begin{aligned} \left\|\alpha_i^{(j)}(x) - \alpha_1^{(j-1)}(x)\right\| \le \varepsilon \\ \left\|\beta_i^{(j)}(s) - \beta_i^{(j-1)}(s)\right\| \le \varepsilon \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

де ε — показник заданої точності обчислення функцій $\beta_i(s)$ та $\alpha_i(x)$.

Далі визначаються наближення $K_{i+1}(x,s) = K_i(x,s) - \alpha_i(x)\beta_i(s)$, використовуючи розрахункові вирази (5) і (6) поки не буде виконана умова (7). Продовжуємо цей ітераційно-варіаційний процес допоки не буде виконана умова

$$\left\|K(x,s) - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(s)\right\| \le \varepsilon_{apr}, \tag{8}$$

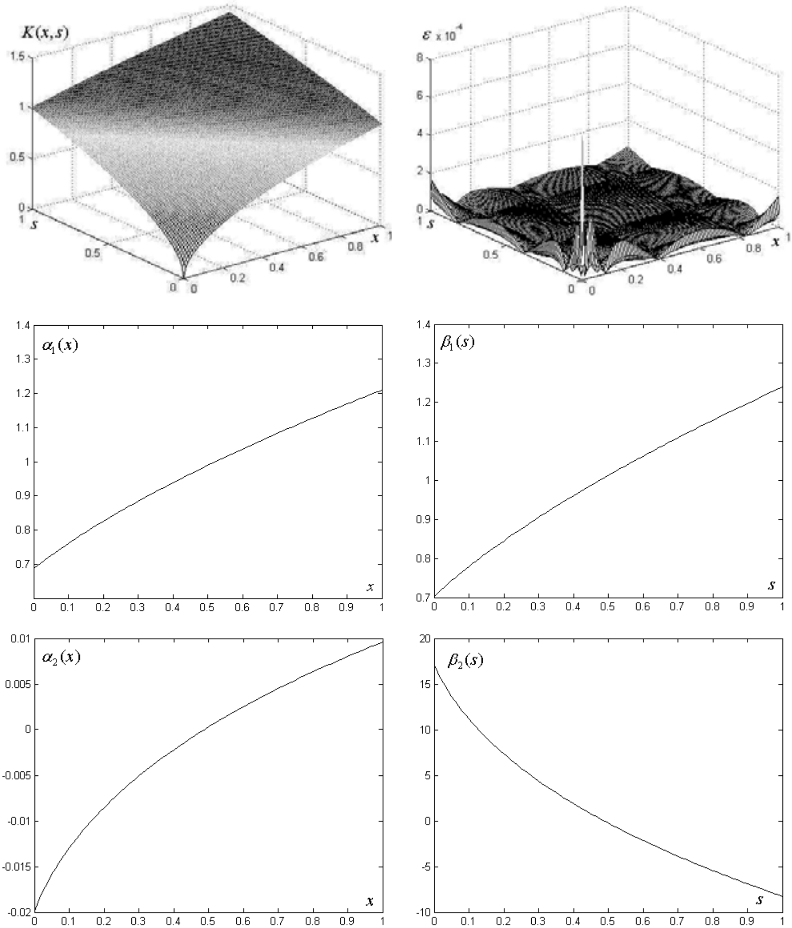
де ε_{apr} — задана точність апроксимації. Таким чином, отримуємо ряд $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(s)$, який з заданою точністю апроксимує вихідну функцію $K(x,s)$.

Реалізація приведеного алгоритму потребує, в значній мірі, виконання матричних операцій. Тому, при розробці програми, доцільно було використовувати середовище Matlab, що забезпечує ефективне виконання цих операцій. Крім того, засоби Matlab дозволяють швидко конструювати функціонали залежності, які використовуються при побудові ітераційного процесу.

Застосування розглянутого алгоритму при розв'язанні ряду обчислювальних задач, зокрема при розв'язку інтегральних рівнянь [5], свідчить про його достатньо "хороші" властивості. На етапі апроксимації, як правило, забезпечується швидка збіжність процесу та висока точність наближення при невеликій кількості членів апроксимуючого ряду. Дана властивість особливо чітко проявляється у випадку розв'язання інженерних задач, які характеризуються обмеженою точністю вхідних даних і такими ж вимогами до точності результатів. На етапі відтворення апроксимуючого виразу можуть буди досягнуті необхідні, втому числі, дуже високі показники швидкодії.

Для ілюстрації результатів, отриманих за допомогою приведеного вище алгоритму, розглянемо деякі приклади апроксимації трьох видів функцій двох змінних, які можна прийняти у якості тестів.

Приклад 1. Нехай, необхідно представити гладку функцію $K(x,s) = \sqrt{x+s}$ на відрізку $[0,1]$, з кроком $h = const = 0.01$ у вигляді суми добутку функцій однієї змінної $\tilde{K}(x,s) = \sum_{1}^{m} \alpha_i \beta_i$, при цьому максимальне відхилення має не перевищувати $\varepsilon = \left| K(x,s) - \tilde{K}(x,s) \right| < 10^{-3}$.



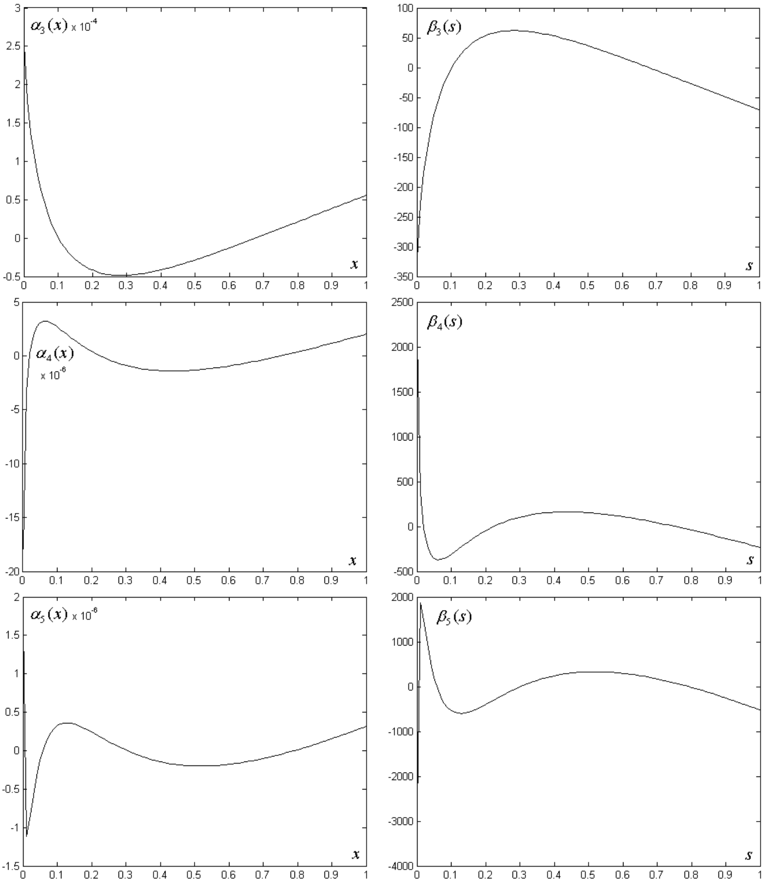
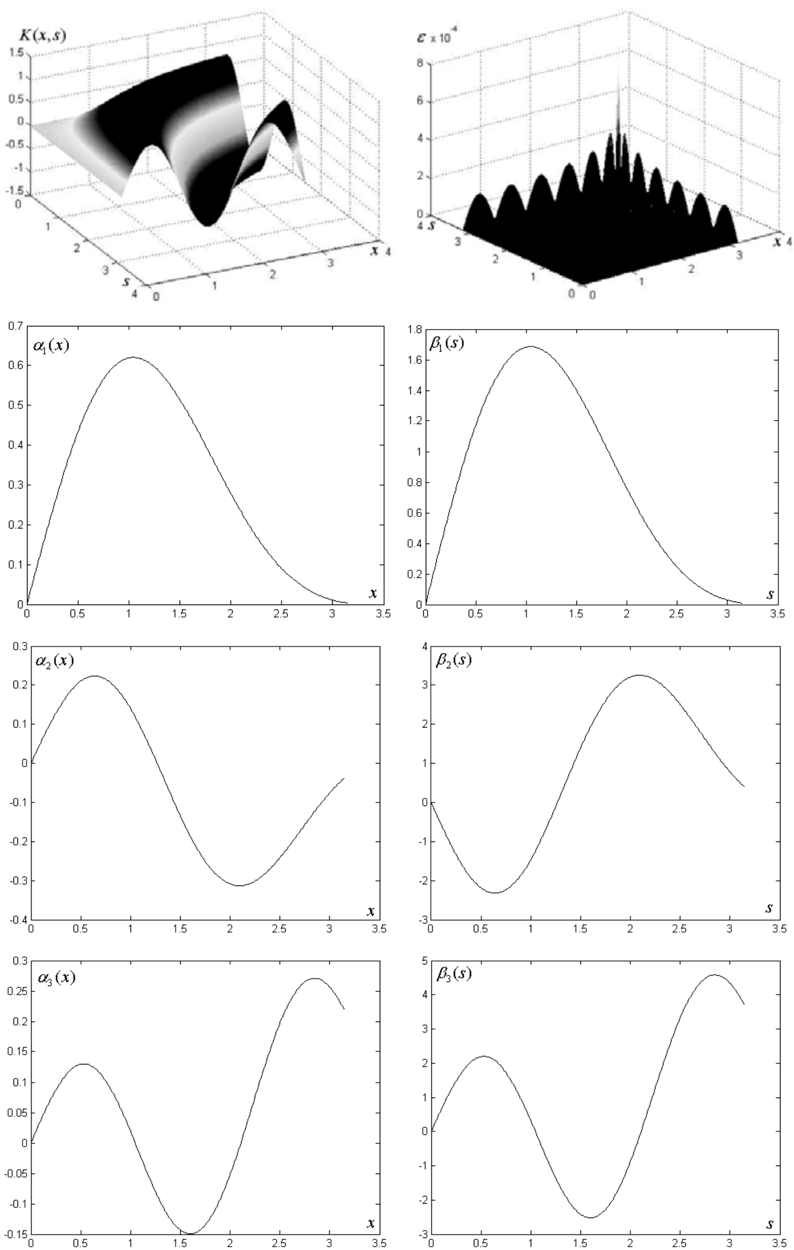


Рис. 1. *Приклад 1*

Результат апроксимації (рис. 1) представляє собою білінійний ряд з п’ятьма членами. Вихідна функція $\sqrt{x+s}$, функція похибки $\varepsilon(x,s)$ і наближуючи функції $\alpha_i(x)$, $\beta_i(s)$ ($i=\overline{1,5}$) приведені на рис. 1. Характер поводження останніх відображає хід ітераційного процесу та свідчить про істотні відмінності від апроксимуючих базисних функцій, що отримані традиційними методами розкладення функції, що наближується у формі одного з типових рядів.

Приклад 2. Нехай, необхідно представити коливальну функцію $K(x,s)=\sin(xs)$ на відрізку $[0,\pi]$ з кроком $h=0.01$, при умові, що максимальне відхилення $\varepsilon=\left|K(x,s)-\tilde{K}(x,s)\right|<10^{-3}$.


K(x,s)
ε x 10^-4
α1(x)
β1(s)
α2(x)
β2(s)
α3(x)
β3(s)
x
s

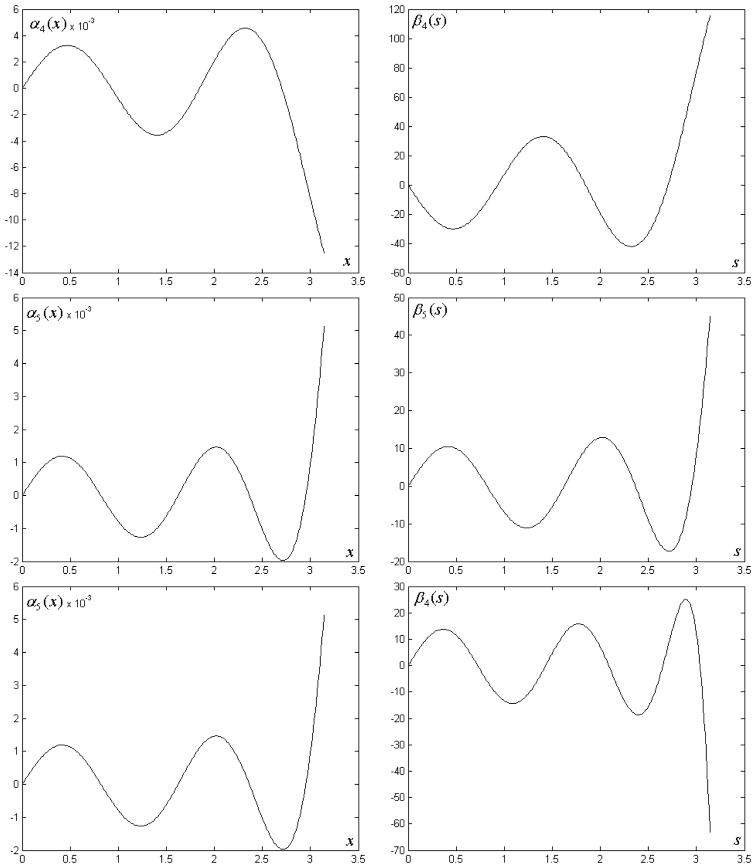


Рис. 2. *Приклад 2*

Вихідна функція, похибка наближення і апроксимуючі функції однієї змінної, що формують отриманий результат наближення у вигляді білінійного ряду з шістьма членами приведені на рис. 2. Слід зазначити швидку збіжність процесу наближення достатньо складної коливальної функції двох змінних и досить простий вигляд отриманих апроксимуючих функцій однієї змінної, що дозволяє забезпечити ефективне формування програмного або апаратного функціонального перетворювача функцій двох змінних.

Приклад 3. Апроксимується не всюди диференційована функцію
$$K(x,s)=\begin{cases}1, & \textit{при}\ \ \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\\ 0, & \textit{при}\ \ \frac{1}{3}>x\bigcup x<\frac{2}{3}\end{cases}.$$

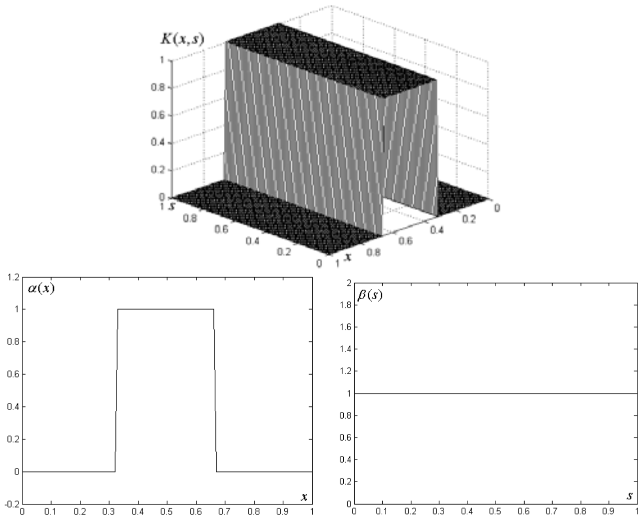


Рис. 3. *Приклад 3*

У цьому випадку алгоритм апроксимації дозволяє отримати результат (рис. 3), що повторює вихідну функцію з максимальною для комп'ютера точністю у вигляді добутку двох одномірних функцій, що також свідчить про позитивні якісні властивості приведеного алгоритму апроксимації у випадку наближення функцій, які не можуть не відносяться до неперервних.

Таким чином, у роботі розглянута можливість застосування ітераційно-варіаційного методу апроксимації функції двох змінних в задачах побудови функціональних перетворювачів для систем керування. Обчислювальні експерименти на модельних прикладах дозволили продемонструвати достатню працездатність наближення трьох спеціальних видів вихідних функцій. Висока точність результатів досягнута при отриманні економічних апроксимуючих виразів, які можуть біти використані для побудови відповідних програмних засобів систем керування.

Список використаних джерел:

1. Гостев В. И. Системы управления с цифровими регуляторами : справочник / В. И. Гостев. — К. : Техніка, 1990. — 280 с.
2. Верлань А. Ф. Электронные функциональные преобразователи систем автоматики / А. Ф Верлань, Н. И. Корсунов, Е. А. Лобода. — К. : Техніка, 1981. — 239 с.
3. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 408 с.
4. Верлань Д. А. Ітераційні алгоритми апроксимації функції двох змінних / Д. А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Тех-

нічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2009. — Вип. 2. — С. 24—32.

5. Верлань Д.А. Алгоритми методу реалізації вироджених ядер при розв'язанні інтегральних рівнянь Вольтерри / Д. А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 64—69.

We solved the problem of approximation of functions of two variables in a bilinear series for building software functional conversion in control.

Key words: *algorithm, approximation, bilinear series, functional converter, control system.*

Отримано: 17.03.2011

УДК 519.6

І. О. Горошко*, канд. фіз.-мат. наук,
В. Д. Павленко,** канд. техн. наук

*Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ,
**Одеський національний технічний університет, м. Одеса

ФОРМУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ГАЗОТУРБІННИХ СИЛОВИХ УСТАНОВОК ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

У статті розглянуто проблеми формування динамічних моделей газотурбінних силових установок, перш за все нелінійних, та основні аспекти розв'язання задач ідентифікації параметрів таких моделей.

Ключові слова: *газотурбінні силові установки, динамічні моделі, параметрична ідентифікація.*

Вступ. В енергетичних і транспортних системах різного призначення знаходять широке застосування газотурбінні силові установки (ГТСУ). Тому в Україні, яка і зараз має достатньо великий науково-технічний і промисловий потенціали, як і в усіх країнах з розвиненими машинобудівним та енергетичним комплексами, роботи з розроблення нових зразків та модернізації існуючих ГТСУ з метою підвищення їх ефективності та надійності не припинялись ніколи. Особливо активні дослідження та розробки здійснюються в галузях енерге-

