Список використаних джерел:

1. Буряк Я. Й. Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Й. Буряк, Є. Я. Чапля, Т. С. Нагірний. — Львів : Сполом, 2004. — 264 с.
2. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — К. : Наук. думка, 2001. — 605 с.
3. Мандзак Т. І. Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах / Т. І. Мандзак, Я. Г. Савула // НАН України. Центр математичного моделювання Ін-ту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстигача. — Львів : Сплайн, 2009. — 148 с.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. — М. : Недра, 1977. — 664 с.
5. Слупко О. М. Моделювання процесу руху гравітаційної води у пористому середовищі з каналом / О. М. Слупко, Т. І. Мандзак, Я. Г. Савула // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика 2009. — Вип. 15.

Built a mathematical model, which describes motion of pressure filtration in a porous environment with including. The row of calculations and investigational dependence of pressure and velocity of fluid is conducted for different indexes of pressure and coefficient of filtration. The results of calculable experiments are given and analysed from determination of pressure and velocity of fluid within the framework of the offered model. On the basis of the got results a conclusion is done about applicability of the formulated model.

Key words: *computer modeling, motion of fluid, pressure filtration, including, thin channel, equalization of Navie-Stokes, piezometer pressure.*

Отримано: 17.09.2010

УДК 620.1.08:681.02.08

М. Ф. Сопель, канд. техн. наук
Институт электродинамики НАН Украины, г. Киев

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ МЕЖПОВЕРОЧНЫХ ИНТЕРВАЛОВ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Рассматривается статистический метод расчета межповерочных интервалов, позволяющий по имеющимся у разработчика системы исходным данным в виде заданных интервалов ошибок измерительных средств определить ошибки контроля первого и второго рода.

Ключевые слова: *оптимизация, межповерочный интервал, статистический метод.*

Введение. При разработке (проектировании) автоматизированной системы контроля (АСК) необходимо решать задачу выбора межповерочных интервалов для средств измерения входящих в систему. В работе рассматривается статистический метод расчета межповерочных интервалов, позволяющий по имеющимся у разработчика системы исходным данным в виде заданных интервалов ошибок измерительных средств определить ошибки контроля первого и второго рода.

Постановка задачи. Погрешность совокупности однотипных средств измерения (СИ) является случайной функцией времени $\eta(t)$, а погрешности конкретных СИ — ее реализациями. Поэтому поверку СИ с точки зрения теории статистических решений можно рассматривать как проверку сложной гипотезы $H_0 : \eta(t) \in [-\Delta, \Delta]$ против сложной альтернативы $H_0 : \eta(t) \overline{\in} [-\Delta, \Delta]$, $t \in [0, T]$, где Δ — предел допускаемой погрешности поверяемых СИ; T — величина межповерочного интервала. При таком подходе качество поверки характеризуется средним риском, выражение для которого при отсутствии потерь при правильных решениях имеет вид:

$$R = C_1 P_{ЛО} + C_2 P_{НО}, \tag{1}$$

где $P_{ЛО}$ и $P_{НО}$ — соответственно вероятности ложного и необнаруженного отказов; C_1 и C_2 — соответственно потери от ложного и необнаруженного отказов.

Ошибочные решения, принимаемые при поверке, обусловлены в основном двумя причинами: во-первых, конечной точностью образцовых СИ и, во-вторых, выходом погрешности СИ, признанных пригодными к применению, за допускаемый предел в межповерочный период эксплуатации. Ошибку, вызываемую первой причиной, можно назвать инструментальной, а второй — ошибкой прогноза.

Метод решения задачи. Определим вероятности ошибочных решений $P_{ЛО}$ и $P_{НО}$. Обозначим через E событие, состоящее в том, что погрешность СИ в течение межповерочного интервала находится в допускаемых пределах, через F — событие, состоящее в том, что в момент времени $t = 0$ оценка погрешности СИ, представляющая некоторую функцию от погрешностей поверяемого и образцового СИ — $\hat{\eta} = f(\eta_0, \nu)$, находится в контрольном допуске $[-\Delta_k, \Delta_k]$.

Тогда

$$P_{ЛО} = P\{E\overline{F}\} = P\{E\} - P\{EF\}, \tag{2}$$

$$P_{ЛО} = P\{\overline{E}F\} = P\{F\} - P\{EF\}. \tag{3}$$

Выражения для вероятностей, входящих в правую часть формул (2), (3), имеют вид

$$P\{E\} = \int_{-\Delta}^{\Delta} W(T/\eta_0)\varphi(\eta_0)\,d\eta_0, \tag{4}$$

$$P\{F\} = \int_{-\Delta_k}^{\Delta_k} \psi(\widehat{\eta})\, d\widehat{\eta}, \tag{5}$$

$$P\{EF\} = \int_{-\Delta}^{\Delta} W(T/\eta_0)\varphi(\eta_0)\left[\int_{-\Delta_k}^{\Delta_k} \varphi_1(\widehat{\eta}/\eta_0)\, d\widehat{\eta}\right] d\eta_0, \tag{6}$$

где $W(T/\eta_0)$ — условная вероятность того, что случайная функция $\eta(t)$ в течение времени T будет находится в области $[-\Delta, \Delta]$ при условии, что при $t = 0$ ордината этой функции равна η_0; $\varphi(\eta_0)$ — плотность вероятности погрешности поверяемых СИ в момент поверки; $\psi(\eta)$ — плотность вероятности оценки погрешности поверяемых СИ в момент поверки; $\varphi_1(\widehat{\eta}/\eta_0)$ — условная плотность вероятности оценки погрешности при фиксированной погрешности поверяемых СИ в момент поверки.

В работе [1] показано, что наилучшее качество поверки, т.е. минимальный средний риск достигается, если использовать следующее решающее правило: СИ признается пригодным к применению, если вероятность того, что погрешность поверяемого СИ не выйдет за допускаемый предел за время T при условии, что полученное при поверке значение оценки равно $\widehat{\eta}$:

$$P\left\{\eta(t) \in [-\Delta, \Delta],\, t \in [0, T] / \widehat{\eta}\right\} \geq \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \tag{7}$$

и непригодным, если неравенство (7) не выполняется. Применяя формулу Байеса, нетрудно показать, что

$$P\left\{\eta(t) \in [-\Delta, \Delta],\, t \in [0, T] / \widehat{\eta}\right\} = \int_{-\Delta}^{\Delta} W(T/\eta_0)\psi_1(\eta_0/\widehat{\eta})\, d\eta_0, \tag{8}$$

где $\psi_1(\eta_0/\widehat{\eta})$ — апостериорная плотность вероятности погрешности поверяемых СИ при фиксированной оценке в момент проверки.

Метод нахождения вероятности $W(T/\eta_0)$, входящей в формулы (6)—(8), при произвольных вероятностных характеристиках случайной функции $\eta(t)$ приводит к весьма сложным, а поэтому неприемлемым в инженерной практике расчетам. Однако задача существенно упрощается, если к ней применим аппарат теории марковских процессов. В работе [2] задача определения $W(T/\eta_0)$ решена для нормальной стационарной случайной функции, имеющей корреляционную функцию $K_\eta(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ и математическое ожидание $M[\eta] = 0$. Полученное в ней выражение для $W(T/\eta_0)$ имеет вид

$$W\left(T/\eta_0\right)=\begin{cases}2\dfrac{\Delta}{\sigma}\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j e^{-\lambda_j\alpha T}\ {}_1F_1\left(-\lambda_j\Big/2;\,{}^1\!\!\big/_2;\eta_0^2\big/2\sigma^2\right)\ npu\ \left|\eta_0\right|\le 0,\\ 0\ npu\ \left|\eta_0\right|>0,\end{cases}\tag{9}$$

где a_j, λ_j — постоянные коэффициенты, значения которых зависят от отношения $\dfrac{\Delta}{\sigma}$; ${}_1F_1\left(x;y;z\right)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [3]. Ряд (9) быстро сходится и для практических расчетов достаточно использовать один-два его члена.

Если погрешность совокупности образцовых СИ распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением (с. к. о.), равным σ_1, и $\widehat{\eta}=\eta_0+\nu$, то апостериорная плотность вероятности также является нормальной с математическим ожиданием $m_{\eta_0/\widehat{\eta}}=\dfrac{\sigma^2\eta_0}{\sigma^2+\sigma_1^2}$ и с. к. о. $\sigma_{\eta_0/\widehat{\eta}}=\dfrac{\sigma\sigma_1}{\sqrt{\sigma^2+\sigma_1^2}}$. При этом решающее правило (7) сводится к установлению оптимального контрольного (упреждающего) допуска на оценку погрешности поверяемых СИ — $\left[-\Delta_{KO},\Delta_{KO}\right]$. Величина Δ_{KO} определяется как корень уравнения

$$\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}W\left(T/\eta_0\right)\psi_1\left(\eta_0/\Delta_{KO}\right)d\eta_0=\frac{C_2}{C_1+C_2}.\tag{10}$$

В связи с изложенным возникает задача нахождения такого максимального межповерочного интервала для СИ, при котором минимизируемый по правилу (7) средний риск не превысил бы допускаемого значения, т.е. необходимо определить

$$T_0=\max T\ \text{ при }\ \min_{\Delta_K}R\left(\Delta_K,T\right)\le R_Д\,.\tag{11}$$

Исходными данными для решения задачи служат величины $R_Д, C_1, C_2$ и вероятностные характеристики поверяемых и образцовых СИ, а искомыми величинами — T_0 и Δ_{KO}.

Анализ функции $\min\limits_{\Delta_K}R\left(\Delta_K,T\right)$ показывает, что она является возрастающей функцией *T*. Следовательно, задача сводится к решению системы трансцендентных уравнений, одним из которых является уравнение (10), а вторым — уравнение

$$C_1P_{ЛО}\left(T_0,\Delta_{KO}\right)+C_2P_{HO}\left(T_0,\Delta_{KO}\right)=R_Д\,.\tag{12}$$

Для удобства проведения расчетов введем безразмерные величины $\theta = \alpha T_0$; $r = \dfrac{\Delta}{\sigma}$; $z = \dfrac{\sigma_1}{\sigma}$; $k = \dfrac{\Delta_{KO}}{\Delta}$; $q = \dfrac{C_1}{C_2}$;

$$R_У = \begin{cases} \dfrac{R_Д}{C_2} = qP_{ЛО} + P_{НО} & \text{при} \quad q \le 1, \\ \dfrac{R_Д}{C_1} = P_{ЛО} + \dfrac{P_{НО}}{q} & \text{при} \quad q > 1. \end{cases}$$

Величину $R_У$ можно назвать удельным средним риском. Тогда при принятых допущениях система трансцендентных уравнений (10), (11) приобретает вид

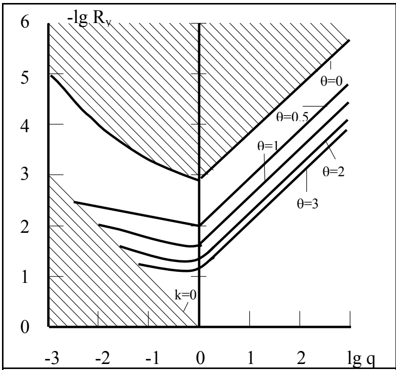
$$r\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}\int_{-r}^{r} W(\theta,x)\, e^{-\frac{\left[x\left(1+z^2\right)-rk\right]^2}{2z^2\left(1+z^2\right)}}dx - \frac{1}{1+q} = 0,$$

$$\begin{gathered} r\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-r}^{r} W(\theta,x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}dx + 2\Phi_0\left(\frac{rk}{\sqrt{1+z^2}}\right) - 2r\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-r}^{r} W(\theta,x)\times \\ \times e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\Phi_0\left(\frac{rk+x}{z}\right)+\Phi_0\left(\frac{rk-x}{z}\right)\right]dx - R_У = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

где $\Phi_0(P) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^P e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ — нормированная функция Лапласа.

Система уравнений (13) была решена на ЭВМ при $r = 3$ и $z = 0,2$, что соответствует требованию большинства метрологических стандартов, в области значений $10^{-3} \le q \le 10^3$ и $R_У \ge 10^{-6}$. В результате проведенных расчетов построены графики (рис. 1, 2), позволяющие по заданным величинам q и $R_У$ определить θ и k. Сначала из q и $R_У$ из графика рис. 1 находим θ, а затем по q и θ из графика рис. 2 находим k. В заштрихованных областях на рис. 1 решение системы (13) отсутствует. Отсутствие решения в области, расположенной выше кривой $R_У = R_У(q, \theta = 0)$, обусловлено конечной точностью образцовых СИ, а сама кривая соответствует минимально возможному среднему риску. Заштрихованная область в левом нижнем углу ограничивается кривой $R_У = R_У(q, k = 0)$. Это означает, то при попадании в эту область минимальным будет априорный риск, соответствующий признанию непригодности СИ без поверки:

$$R_{\min} = R_{apr} = C_1\int_{-\Delta}^{\Delta} \varphi(\eta_0)\, d\eta_0. \tag{14}$$



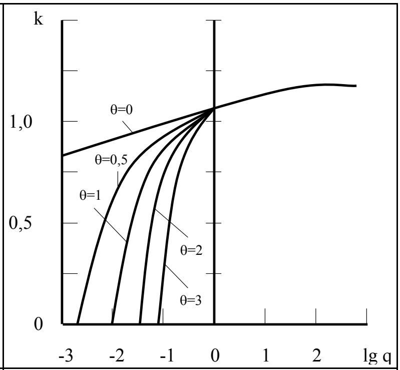


Рис. 1.	***Рис. 2.***

Пример. Заданы α = 0,1 1/мес.; Δ = 1%; C_1 = 10 ед.; C_2 = 100 ед.; $R_Д$ = 1 ед. Определяем безразмерные величины lg$q$ = 1; –lg$R_У$ = 2. Из графиков рис. 1 находим θ = 0,6. Зная θ и q, из графиков рис. 2 находим k = 0,9. Следовательно, максимальный межповерочный интервал для СИ T_0 = 6 мес.; оптимальный контрольный допуск, устанавливаемый при поверке Δ_{KO} = 0,9%.

Выводы. Рассмотренный в роботе статистический метод оценки межповерочных интервалов средств измерения, входящих в АСК, позволяет уверенно, с инженерной точностью, определять искомые величины. При этом используется решающее правило, обеспечивающее наилучшее качество поверки, исходя из достижения минимальной величины среднего риска. Применение метода позволяет обеспечивать функциональную надежность средств контроля и оценивать при необходимости стоимостные параметры разработки.

Список использованной литературы:

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. — М. : Сов. радио, 1975. — 391 с.
2. Зарицкий В. С. Определение вероятности надежной работы системы в течение заданного промежутка времени / В. С. Зарицкий // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1966. — №1. — С. 51—55.
3. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М. : Наука, 1971. — 1108 с.

The statistical method of calculating mezhpove-harvest intervals, allowing the best of develop-chica of the original data in a specified interval error measurement tools to identify errors in the control of the first and second kind.

Key words: *optimization, calibration interval, a statistical method.*

Отримано 04.10.2010