ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2007. Том 9, N 4. С. 66 – 68

УДК 532.526

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПОРИСТОМ ПЛОСКОМ КРИВОЛИНЕЙНОМ КАНАЛЕ

А. А. АВРАМЕНКО*, Т. В. СОРОКИНА*, Т. Б. БАСОК**

* *Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев*

** *Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко*

Получено 01.08.2006

Аналитически получен профиль скорости для ламинарного течения в пористом плоском канале. Исследовано влияние пористости и ширины канала на коэффициент гидравлического сопротивления и профиль скорости в канале.

Аналітично отриманий профіль швидкості для ламінарної течії в пористому плоскому каналі. Досліджено вплив пористості та ширини каналу на коефіцієнт гідравлічного опору та профіль швидкості у каналі.

Velocity profile for laminar flow in porous flat channel is obtained analytically. Influence of po-rosity and width of channel on coefficient of hydraulic resistance and velocity profile in channel is investigated.

ВВЕДЕНИЕ

Принцип ДИВЭ (дискретно-импульсного ввода энергии) [1] часто встречается в технологических процессах грануляции, биотехнологиях и т. д. При этом процессы ДИВЭ протекают в каналах с пористой средой различной конфигурации. В работе [2] рассматривалась задача о течении в пористом прямолинейном канале и на основании точного решения выведен профиль скорости в неявном виде. Авторами работы [3] получено приближенное решение в явном виде для профиля скорости в пористом прямолинейном канале. Однако в аппаратах ДИВЭ встречаются криволинейные каналы с пористой средой, что вызывает необходимость исследования гидродинамики в таких каналах.

1. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Целью настоящей работы является получение профиля скорости в аналитическом виде для случая пористого плоского криволинейного канала.

Уравнение, описывающее течение в пористом плоском криволинейном канале, имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \frac{u}{K}\right),$$

где p – давление; r, φ – цилиндрические координаты; u – угловая проекция скорости; μ – динамическая вязкость; K – проницаемость пористой среды. Течение происходит вдоль азимутальной координаты φ в криволинейном канале с радиусом выпуклой стенки R_1 и вогнутой – R_2. Азимутальный градиент давления не зависит от радиальной координаты и является постоянной величиной. Следовательно, данное уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, которое удобно представить в безразмерной форме:

$$\frac{d^2 w}{d\,(r^*)^2} + \frac{1}{r^*}\frac{dw}{dr^*} - \frac{w}{(r^*)^2} - \frac{w}{\mathrm{Da}} = -\frac{1}{r^*}, \qquad (1)$$

где

$$w = \frac{\mu u}{R_2\left(-\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)}, \quad r^* = \frac{r}{R_2},$$

$$\mathrm{Da} = \frac{K}{R_2^2} \text{ – число Дарси.}$$

Уравнение (1) необходимо решить при следующих граничных условиях:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r^* = \eta, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1, \quad (2)$$

где $\eta = R_1/R_2$. Выражение (1) является неоднородным дифференциальным уравнением и может быть решено методом вариации произвольных постоянных. Для этого, прежде всего, находим решение соответствующего однородного уравнения:

$$\frac{d^2 w}{d\,(r^*)^2} + \frac{1}{r^*}\frac{dw}{dr^*} - \frac{w}{(r^*)^2} - \frac{w}{\mathrm{Da}} = 0.$$

Решение такого уравнения выражается через модифицированные функции Бесселя:

$$w = C_1 \mathrm{I}_1\left(\frac{r^*}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) + C_2 \mathrm{K}_1\left(\frac{r^*}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right), \qquad (3)$$

где I_1 и K_1 – модифицированные функции Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно, C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

В соответствии с методом вариации произвольных постоянных для нахождения решения уравнения (1) постоянные интегрирования в (3) заменяются на неизвестные функции $A(r^*)$ и $B(r^*)$, так что имеем

$$w = A\left(r^*\right)\mathrm{I}_1\left(\frac{r^*}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) + B\left(r^*\right)\mathrm{K}_1\left(\frac{r^*}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right).$$

Эти неизвестные функции определятся как решение системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dA\left(r^*\right)}{dr^*}\mathrm{I}_1\left(\frac{r^*}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) + \frac{dB\left(r^*\right)}{dr^*}\mathrm{K}_1\left(\frac{r^*}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) = 0,$$

$$\frac{dA\left(r^*\right)}{dr^*}\frac{d\mathrm{I}_1\left(r^*/\sqrt{\mathrm{Da}}\right)}{dr^*} +$$

$$+\frac{dB\left(r^*\right)}{dr^*}\frac{d\mathrm{K}_1\left(r^*/\sqrt{\mathrm{Da}}\right)}{dr^*} = -\frac{1}{r^*}.$$

В результате интегрирования приведенной системы получаем

$$w = \frac{\mathrm{Da}}{r^*} + C_1^*\mathrm{I}_1\left(\frac{r^*}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) + C_2^*\mathrm{K}_1\left(\frac{r^*}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right), \quad (4)$$

где константы интегрирования определяются следующими соотношениями:

$$C_1^* = \eta M^2 \frac{\mathrm{K}_1(M) - \eta\mathrm{K}_1(\eta M)}{\mathrm{I}_1(M)\mathrm{K}_1(\eta M) - \mathrm{I}_1(\eta M)\mathrm{K}_1(M)},$$

$$C_2^* = \eta M^2 \frac{\mathrm{I}_1(M) - \eta\mathrm{I}_1(\eta M)}{\mathrm{I}_1(\eta M)\mathrm{K}_1(M) - \mathrm{I}_1(M)\mathrm{K}_1(\eta M)},$$

причем $M = 1/\sqrt{\mathrm{Da}}$. Используя выражение (4), определяем среднерасходную скорость $\bar{w}$ по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{1}{1-\eta}\int_\eta^1 w\left(r^*\right)dr^* = \\ &= \frac{\sqrt{\mathrm{Da}}}{1-\eta}\left\{C_1^*\left[\mathrm{I}_0\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) - \mathrm{I}_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)\right] + \right. \\ &\quad + C_2^*\left[\mathrm{K}_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) - \mathrm{K}_0\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)\right] - \\ &\quad \left. -\sqrt{\mathrm{Da}}\ln\eta\right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

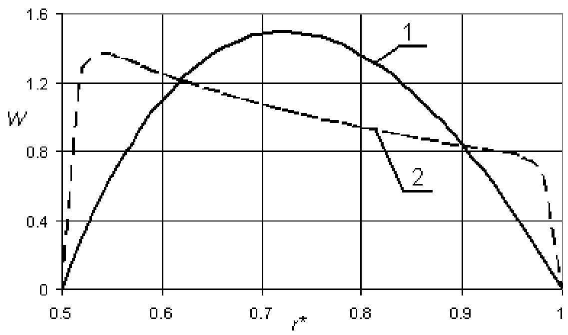

Рис. 1. Распределение безразмерной скорости в канале при:
1 – Da=1, η =0.5; *2* – Da = 0.0001, η =0.5

где I_0 и K_0 – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно.

Из рис. 1, где представлены распределения безразмерной скорости, отнесенной к ее среднерасходному значению, видно, что при значениях $\mathrm{Da} \geq 0.005$ влияние пористости на форму профиля скорости невелико и профили скорости в пористой и чистой среде, которые рассчитаны по формуле

$$\frac{w\left(r^*\right)}{\bar{w}} = \frac{4\left(1-\eta\right)r^*}{4\eta^2\ln^2\eta - \left(1-\eta^2\right)^2} \times$$

$$\times\left[\left(1-\eta^2\right)\ln r^* + \eta^2\ln\eta\left(1 - \frac{1}{\left(r^*\right)^2}\right)\right],$$

близки по форме. При $\mathrm{Da} < 0.005$ уже начинает сказываться влияние пористости и более четко проявляется диапазон радиальной координаты, на котором выполняется условие

$$u \cdot r = \mathrm{const},$$

что свойственно турбулентным потокам в криволинейных каналах [4]. Следовательно, можно сделать вывод о том, что пористость среды оказывает на гидродинамику потока влияние, качественно схожее с влиянием турбулентности.

Гидравлическое сопротивление канала определяется формулой Дарси – Вейсбаха

$$-\frac{\partial p}{\partial\varphi} = \lambda\frac{1+\eta}{2\left(1-\eta\right)}\frac{\rho\bar{u}^2}{2},$$

где $\bar{u}$ – среднерасходная размерная скорость; λ – коэффициент гидравлического сопротивления. Этот коэффициент обратно пропорционален среднерасходной скорости. Поэтому отношение коэффициентов гидравлического сопротивления для

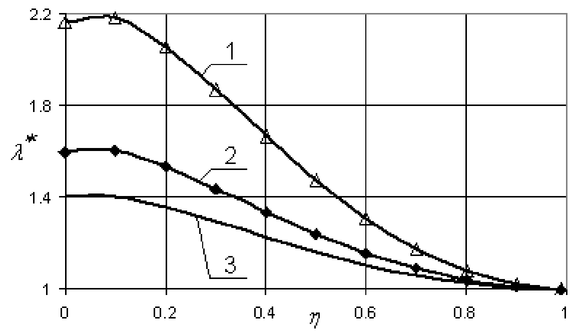

Рис. 2. Зависимость относительного коэффициента гидравлического сопротивления от ширины зазора при Da = idem:
1 – Da=0.05; *2* – Da = 0.1; *3* – Da = 0.15

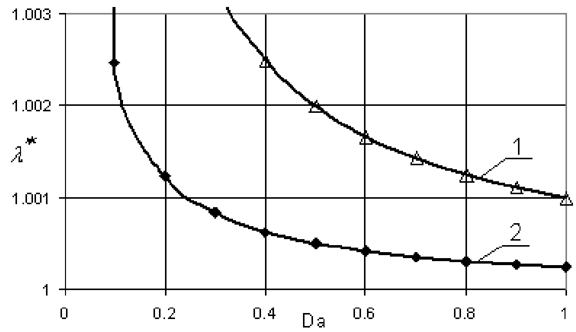

Рис. 3. Зависимость относительного коэффициента гидравлического сопротивления от числа Дарси при Da = idem:
1 – η=0.09; *2* – η = 0.95

пористой и чистой среды можно выразить соотношением

$$\lambda^* = \frac{\lambda_p}{\lambda_0} = \frac{\bar{w}_0}{\bar{w}_p},$$

где $\bar{w}_p$ – среднерасходная безразмерная скорость для пористой среды, которая вычисляется по формуле (5); среднерасходная безразмерная скорость для чистой среды определяется формулой

$$\bar{w}_0 = \frac{\left(1+\eta^4\right) - 2\eta^2\left(1+2\ln^2\eta\right)}{8\left(1-\eta\right)\left(1-\eta^2\right)}.$$

Результаты расчетов для относительного коэффициент гидравлического сопротивления представлены на рис. 2 и 3. Оба рисунка показывают, что с уменьшением числа Дарси коэффициент λ^* возрастает. Причем влияние числа Дарси на гидравлическое сопротивление падает, по мере того как значение параметра η стремится к единицы.

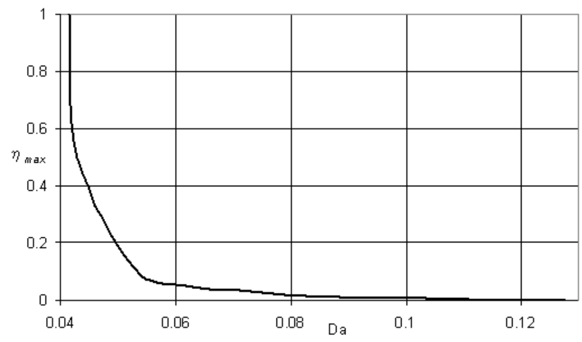

Рис. 4. Положение η_{max} в зависимости от числа Дарси

Представленная на рис. 4 зависимость $\lambda^* = \lambda^*(\eta)$ при Da = idem носит экстремальный характер. Положение максимума $\eta_{\max}$ зависит от числа Дарси. Видно, что с уменьшением числа Дарси максимум сдвигается в сторону больших значений η.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований получен профиль скорости для случая ламинарного течения в пористом плоском криволинейном канале. Это позволило исследовать характер влияния пористости и ширины канала на форму профиля и коэффициент гидравлического сопротивления. Показано, что с уменьшением ширины канала влияние числа Дарси на гидродинамику потока ослабевает.

1. *Долинский А. А., Басок Б. И., Гулый С. И., Накорчевский А. И., Шурчкова Ю. А.* Дискретно-импульсный ввод энергии в теплотехнологиях.– Киев: ИТТФ НАНУ, 1996.– 208 с.
2. *Nield D. A., Junqueira S. L. M., Lage J. L.* Forced convection in a fluid-saturated porous-medium channel with isothermal or isoflux boundaries // J. Fluid Mech..– 1996.– **332**.– P. 201–214.
3. *Valf K., Kim S. J.* Forced convection in a channel filled with a porous medium: an exact solution // J. of Heat Transfer.– 1989.– **111**.– P. 1105.
4. *Ellis L. B. and Joubert P. N.* Turbulent shear flow in a curved duct // J. Fluid Mech.– 1974.– **62**, Part 1.– P. 65–84.