

## Оценка критической следящей силы для консольного стержня

В. В. Васильев, М. Х. Муллагулов, Т. С. Набиев

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Башкортостан

*Методом начальных параметров в матричной форме исследуется устойчивость стержней при действии следящих сил. Рассматриваются стержни с различными вариантами закрепления концов. Полученные теоретические результаты проверяются экспериментально. Показано, что разница между теоретическими и экспериментальными значениями критических следящих сил не превышает 5%.*

**Ключевые слова:** консольный стержень, устойчивость стержней, метод начальных параметров, критическая следящая сила.

В настоящее время проблема устойчивости систем при действии следящей силы – весьма актуальна. Случаи потери устойчивости стержневых конструкций вследствие флаттера являются нередкими, причем решения для критического значения следящей силы, полученные различными исследователями даже для простых стержневых конфигураций, существенно отличаются ввиду применения разных критериальных подходов. Например, для консольного стержня длиной  $l$ , сжатого следящей силой, общее решение для критического значения следящей силы имеет следующий вид:

$$P_{кр} = K_{кр} EJ/l^2, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $J$  – момент инерции стержня;  $l$  – длина консольного стержня;  $K_{кр}$  – коэффициент критического значения следящей силы.

Параметр  $K_{кр}$  определяется экспериментально или теоретически для конкретных конфигураций консольного стержня. В частности, в [1] методом дополнительной силы получено  $K_{кр} = 10$ , тогда как в работе [2] на основании вариационного метода –  $K_{кр} = 18,5$ . Соответствующее экспериментальное значение  $K_{кр} = 14,8$  было получено в [3] для случая сжатия консольного стержня круглого сечения следящей силой, создаваемой давлением сжатого воздуха. Однако методические несовершенства указанного эксперимента: большая масса силового агрегата (73 кг) по сравнению с создаваемой им следящей силой (10,8...10,85 Н), а также малая емкость резервуара со сжатым воздухом, обеспечивающая работу агрегата в течение лишь 1,5–2 мин, не дают однозначной экспериментальной верификации вышеприведенных теоретических решений.

В связи с этим ниже предложено как теоретическое, так и экспериментальное обоснование критического значения следящей силы для консольного стального стержня прямоугольного сечения.

Ранее [4] на основании динамического критерия устойчивости стержня была получена система уравнений метода начальных параметров в матричной форме:

$$\mathbf{Q}_\xi = \mathbf{F}_q \mathbf{Q}_0, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{Q}_\xi = \{Q_\xi, M_\xi, y_\xi, \varphi_\xi\}; \quad \mathbf{Q}_0 = \{Q_0, M_0, y_0, \varphi_0\};$$

$$\mathbf{F}_q = \begin{pmatrix} A_6 & \frac{A_7}{l} & a_1^2 a_2^2 \frac{EJ A_5}{l^3} & a_1^1 a_2^2 \frac{EJ A_4}{l^2} \\ l A_5 & A_6 & a_1^2 a_2^2 \frac{EJ A_4}{l^2} & a_1^2 a_2^2 \frac{EJ A_3}{l} \\ \frac{l^3 A_3}{EJ} & \frac{l^2 A_4}{EJ} & A_2 & -l A_1 \\ -\frac{l^2 A_4}{EJ} & -\frac{l A_5}{EJ} & -\frac{a_1^2 a_2^2 A_3}{l} & A_2 \end{pmatrix} - \quad (3)$$

матрица влияния метода начальных параметров;

$$A_1 = \frac{a_1^3 \operatorname{sh} a_2 \xi + a_2^3 \sin a_1 \xi}{a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2)}; \quad A_2 = A_1^1 = \frac{a_1^2 \operatorname{ch} a_2 \xi + a_2^2 \cos a_1 \xi}{a_1^2 + a_2^2};$$

$$A_3 = \frac{A_2^1}{a_1^2 a_2^2} = \frac{a_1 \operatorname{sh} a_2 \xi - a_2 \sin a_1 \xi}{a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2)}; \quad A_4 = A_3^1 = \frac{\operatorname{ch} a_2 \xi - \cos a_1 \xi}{a_1^2 + a_2^2};$$

$$A_5 = A_4^1 = \frac{a_2 \operatorname{sh} a_2 \xi + a_1 \sin a_1 \xi}{a_1^2 + a_2^2}; \quad A_6 = A_5^1 = \frac{a_2^2 \operatorname{ch} a_2 \xi + a_1^2 \cos a_1 \xi}{a_1^2 + a_2^2};$$

$$A_7 = A_6^1 = \frac{a_2^3 \operatorname{sh} a_2 \xi - a_1^3 \sin a_1 \xi}{a_1^2 + a_2^2};$$

$$a_{1,2} = \pm \frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + \omega^2}; \quad \omega = \Omega l^2 \sqrt{\frac{\rho E}{EJ}}; \quad \beta^2 = \frac{Pl^2}{EJ}; \quad \xi = \frac{x}{l};$$

$\rho$  – плотность материала;  $x$  – произвольная координата;  $\Omega$  – частота собственных колебаний стержня.

В уравнении (1) поперечная  $Q$  и продольная  $P$  силы, изгибающий момент  $M$ , координаты точек  $y$  и угол поворота касательной  $\varphi$  относятся к деформированной оси стержня, определяемой координатой  $\xi$ ; индекс 0 соответствует жестко заделанному концу стержня, индекс 1 – свободному концу стержня при  $x = l$ .

Используем уравнение (1) для исследования устойчивости стержня при действии следящей силы.

Если следящая сила приложена к консольному стержню, то  $Q_0 = 0$ ;  $M_0 = 0$ ;  $y_{\xi=1} = 0$  и  $\varphi_{\xi=1} = 0$ . Подставив их в (1), получим следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} y_{\xi} \\ \varphi_{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & -lA_1 \\ -\frac{a_1^2 a_2^2 A_3}{l} & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Приравняв к нулю определитель матрицы уравнения (3), с учетом выражений

$$a_1^2 + a_2^2 = \beta^4 + 2\omega^2, \quad a_1 a_2 = \omega^2, \quad a_1 - a_2 = \beta^2$$

после преобразований получим характеристическое уравнение задачи [1]:

$$\beta^4 + 2\omega^2 + \omega\beta^2 \sin a_1 \operatorname{sh} a_2 + 2\omega^2 \cos a_1 \operatorname{ch} a_2 = 0. \quad (5)$$

Решая уравнение (5) численным методом, получаем  $K_{кр} = 20,05$ . Данное решение близко к полученному вариационным методом, но существенно выше, чем экспериментальное значение [3] и полученное методом дополнительной силы [1]. Для экспериментальной оценки соответствующего параметра был разработан и запатентован специальный стенд для исследования устойчивости неконсервативной системы [5, 6], схема которого представлена на рисунке.

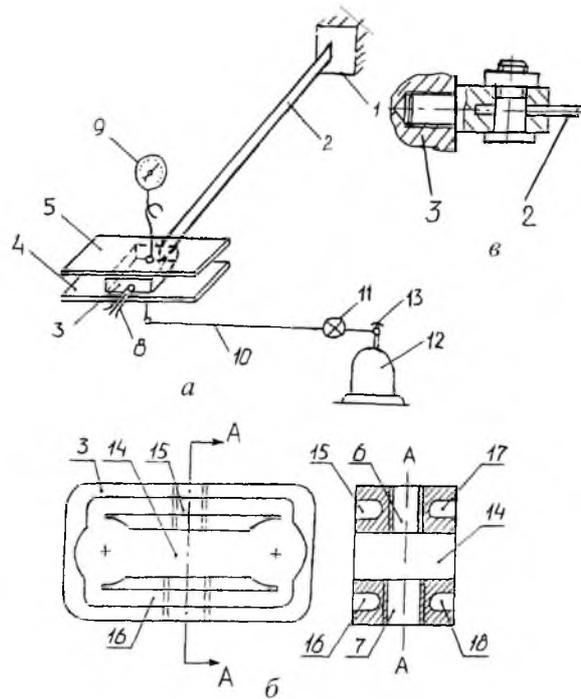


Схема стенда для испытания стержня (а): б – ползун; в – узел передачи нагрузки.

Стенд содержит основание 1, на котором закреплен в горизонтальном положении испытуемый стальной образец 2, имеющий поперечное сечение  $0,1 \times 4$  см и длину 1 м. На свободном конце образца размещаются: ползун 3

массой 54 г; нижняя 4 и верхняя 5 пластины; резьбовые отверстия 6 и 7 для закрепления соответственно испытуемого образца и сопла; сопло 8; образцовый манометр 9; шланг 10; редуктор давления 11; баллон для сжатого воздуха 12 и вентиль 13. На рисунке, б представлен в разрезе ползун 3, включающий емкость для приема сжатого воздуха 14 и каналы для воздушной подушки 15–18.

Стенд работает следующим образом: из баллона через вентиль, редуктор давления по шлангу сжатый воздух шагом  $0,1 \text{ кг/см}^2$  поступает в емкость и далее выходит через сопло наружу. По достижении давлением в емкости некоторого значения ползун надавливает на образец, который вместе с ним начинает колебаться с нарастающей амплитудой. Такое давление принимается как критическое. В нашем эксперименте колебание началось при давлении  $q = 3,44 \text{ кг/см}^2$ .

Соответствующая критическая сила равна  $P_{кр}^3 = 13,3 \text{ Н}$ . Ее расчетное значение, определяемое по формуле (1), будет

$$P_{кр}^p = 20,05 \frac{EJ}{l^2} = 20,05 \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot (0,001)^3}{1^2 \cdot 12} = 14,04 \text{ Н.} \quad (6)$$

Разница между полученными данными составляет 5%.

Таким образом, проведенные эксперименты подтвердили точность расчетных результатов и положений, полученных на основе динамического критерия устойчивости. Разница между критическими силами, полученными экспериментально и путем расчета, не превышает 5%. Потеря устойчивости стержня происходит в форме флаттера.

## Резюме

Методом початкових параметрів у матричній формі досліджується стійкість стрижнів під дією слідкуючих сил. Розглядаються стрижні з різними варіантами закріплення кінців. Отримані розрахункові результати перевіряються експериментально. Показано, що різниця між теоретичними і експериментальними значеннями критичних слідкуючих сил не перевищує 5%.

1. Штиро Г. С., Штиро И. Г. Исследование устойчивости форм равновесия систем методом дополнительной силы. – Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1985. – № 8. – С. 36 – 38.
2. Zeipholz H. H. E. On variation principle for Beck's beam // Mech. Res. Com. – 1978. – 1. – P. 45 – 49.
3. Янг Ю. И., Паришин Л. К. Экспериментальное изучение устойчивости стержня при сжатии следящей силой // Ан. – 1996. – 167, № 1. – С. 49 – 50.
4. Муллагулов М. Х. Динамическое уравнение метода начальных параметров в задачах устойчивости стержней // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1981. – № 3. – С. 43 – 48.

5. *А. с. № 874304 СССР. Стенд для исследования устойчивости неконсервативной системы / М. Х. Муллагулов. – Оpubл. 23.02.87, Бюл. № 39.*
6. *Патент России № 208247 / М. Х. Муллагулов. – Оpubл. 20.06.97, Бюл. № 17.*

Поступила 07. 05. 2002