

УДК 539.59

ГІДРОДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ СУДЕН НА МІЛКОВОДДІ**В. О. ГОРБАНЬ, С. В. МАСЮК***Інститут гідромеханіки НАН України, Київ**Отримано 09.02.2007*

В роботі на основі чисельного методу інтегральних граничних елементів проведені розрахунки гідродинамічних сил та моментів, що виникають при взаємодії двох суден на мілкій воді. Судна моделюються тривісними еліпсоїдами. Вплив дна враховано за допомогою спеціальної функції Гріна. Розглянуто різні випадки руху тіл: проходження судна повз пришвартоване судно, обгін на рівних швидкостях та зустрічне розходження суден. Проведено порівняння чисельних розрахунків з відомими даними експериментів.

В работе на основании численного метода граничных элементов проводятся расчеты гидродинамических сил и моментов, которые возникают при взаимодействии двух судов на мелкой воде. Судна моделируются трехосными эллипсоидами. Влияние дна учтено посредством специальной функции Грина. Рассмотрены разные случаи движения тел: прохождение судна мимо пришвартованного судна, обгон на равных скоростях и встречное расхождение судов. Проводится сравнение численных расчетов с известными данными экспериментов.

The hydrodynamic forces and moments acting on the system of two ships in shallow water are calculated on the basis of numerical method of boundary elements. Ships are designed by triaxial ellipsoids. Influencing of bottom is taken into account by means the special Grins function. Different cases of motion of bodies are considered: passing of ship past moored one, passing on equal speeds and meeting divergence of ships. A comparison of numerical computations with the known data of experiments is made.

ВСТУП

Вивчення гідродинамічної взаємодії тіл, що рухаються в рідині, а також взаємодії тіл і границь течії має важливе практичне значення для вирішення багатьох задач гідромеханіки. До таких належать задачі про рух судна в обмеженому фарватері (зокрема, на мілкій воді, в каналі, біля берега та гідротехнічних споруд), про спільний рух і гідродинамічну взаємодію декількох суден, про вплив рухомого судна на берегові споруди тощо.

За останні десятиріччя інтенсивність судноплавства значно зросла. Спостерігається збільшення кількості, розмірів і типів суден, що використовуються для пасажирських та вантажних перевезень, а також задіяних у військових операціях. Це зумовило розвиток систем управління рухом суден на перенасичених ділянках акваторій, таких як порти, канали, річки тощо. Зросли також вимоги до безпеки руху суден. Тому у випадку інтенсивного судноплавства активно досліджуються шляхи попередження зіткнень і поліпшення екологічної ситуації в акваторії та прибережній зоні.

Останнім часом все більшу роль відіграють задачі впливу судноплавства в річках на навколишнє середовище, зокрема, на екологічну ситуацію в прибережній зоні, на процеси перенесення шкідливих домішок, на зміну рівня води біля берега тощо. Важливими для оптимізації режимів руху суден є також задачі взаємодії судна з нерівностями

ми дна (наприклад, локальний підйом дна, різке зменшення чи збільшення глибини), локальні зміни перерізу каналу (звуження, розширення, зміна форми).

Слід зазначити, що при рухові суден на мілкій воді виникає явище притягання судна до дна, спостерігається збільшення середньої просадки судна (тобто його занурення зростає відносно стану спокою). Часто це зумовлює просідання судна на ґрунт. При рухові суден у каналах виникає явище притягання до стінок каналу, викликане несиметричністю поля тиску з правого і лівого бортів судна при його відхиленні від площини симетрії та наближенні до одного з відкосів каналу. Як свідчить досвід, локальні неднорідності (берегові споруди, пришвартовані судна, зменшення глибини води та інші) призводять до трансформації гідродинамічних полів, що утворюються при рухові судна. Це зумовлює виникнення додаткових гідродинамічних сил як на берегові споруди, так і на судно.

Гідродинамічні явища помітно відрізняються залежно від швидкості судна і його розмірів, а точніше залежно від числа Фруда Fr . При малих числах Фруда $Fr \ll 1$ хвилі практично не утворюються, відбувається локальна зміна рівня поверхні води (денівеляція). При більших числах Фруда значну роль відіграє хвилеутворення. Воно зумовлює різке зростання сили опору рухові судна. Зазначимо, що при малих числах Фруда в задачах гідродинамічної взаємодії суден, не врахову-

ють хвилеутворення. При помірних числах Фруда відомі лише поодинокі розрахунки гідродинамічних полів з врахуванням хвиль. Це пов'язано з істотними труднощами як методологічного, так і обчислювального характеру.

Додаткові гідродинамічні сили, пов'язані з взаємодією суден, потрібно враховувати при вирішенні наступних практичних задач:

- підвищення маневреності суден, тобто для оптимізації часу та радіусу розвороту судна; визначення максимальної допустимої швидкості та безпечної відстані між суднами при обгоні;

- зменшення ризику аварій та нещасних випадків при швартуванні суден у портах та маневруванні судна біля стінки причалу; розробка заходів запобігання критичного просідання судна та зіткнень його з іншими суднами чи береговими спорудами;

- вирішення питань екологічної безпеки акваторії (зокрема, інтенсивності розмиву дна, додаткових навантажень на берегові споруди), що включає оцінку максимально можливих швидкостей та тисків, які генеруються рухом суден та визначення їх впливу на акваторію;

- оптимізація та здешевлення операцій завантаження – розвантаження суден (зменшення часу операцій без зниження рівня безпеки);

- розробка правил судноплавства (обґрунтування необхідних обмежень швидкостей на мілководді, у портах; визначення допустимих відстаней між суднами при розходженнях та обгонах);

- розробка систем імітації небезпечних ситуацій для навчання працівників портів, лоцманів та капітанів суден;

- розробка рекомендацій щодо реконструкції і спорудження портів та берегових конструкцій, які повинні враховувати радіуси маневрування суден, глибину під кілем, швидкості підходу – відходу від стоянки, додаткові гідродинамічні навантаження на гідротехнічні споруди;

- обґрунтування вимог до систем швартування, оцінка максимально можливих динамічних навантажень в швартових;

- вивчення взаємодії суден з плавучими буровими установками; дослідження керованості суден при перенесенні вантажів з одного судна на інше під час руху в відкритому морі;

Згадані задачі пояснюють неабиякий інтерес інженерів-суднобудівників та гідротехніків до результатів відповідних гідродинамічних досліджень.

Гідродинамічна взаємодія тіл, що рухаються в рідині, розглядалася у роботах А. А. Костюкова, Ю. М. Масгушкіна, Д. Ж. Ньюмена, Е. О. Така та

інших дослідників [5–6, 18, 21]. Для аналізу автори використовували експериментальні методи або спрощені підходи [3, 5–6, 9]. Новий напрямок досліджень пов'язаний з розвитком методів чисельного моделювання [1–2, 4, 11, 14].

Останнім часом збільшується кількість теоретичних та експериментальних досліджень, що стосуються гідродинамічної взаємодії суден, зокрема, взаємодії суден з береговими конструкціями, взаємодії суден під час маневрування, взаємодія суден в обмежених фарватерах тощо [8, 10, 12, 14–16, 19].

Практично всі ці дослідження ґрунтуються на таких основних припущеннях:

- 1) рідина є ідеальною і нестисливою;
- 2) хвилеутворенням можна знехтувати;
- 3) області вихрового сліду та пограничного шару біля поверхні судна мають незначні розміри;
- 4) проводяться також різні геометричні спрощення.

Методологія досліджень. Для аналізу гідродинамічної взаємодії тіл та оцінки сил і моментів застосовувались різні підходи і методи. В багатьох роботах використовували експериментальні коефіцієнти для сил та моментів, а також напівемпіричні формули для просадки судна. Часто застосовувався наближений метод Блоха-Гіневського [3, 5–6].

Більшість авторів для моделювання гідродинамічної взаємодії суден використовують теорію видовженого тіла [10, 12, 15–16, 20–22]. Ця теорія передбачає виконання наступних умов:

- судно повинне бути вузьким, тобто його ширина і просадка мають бути набагато меншими, за довжину;

- стінки каналів, хвилерізів та інших берегових споруд повинні бути вертикальними.

Завдяки розвитку чисельних методів та комп'ютерних потужностей для вивчення взаємодії суден автори все частіше використовують тривимірні моделі [4, 8, 14, 17]. Для розв'язання тривимірних задач, як правило, використовується панельний метод граничних елементів (МГЕ). Основною цього методу є теорема Гріна, за якою потенціал швидкості у кожній точці рідини визначається розподілом гідродинамічних особливостей по граничній поверхні [4, 8, 14]. У загальному випадку задача визначення потенціалу зводиться до інтегрального рівняння стосовно невідомої інтенсивності джерел, розподілених по граничній поверхні. Хесс і Сміт [11] розвинули панельний метод і показали його ефективність для тривимірних тіл, що рухаються у необмеженій рідині. Враховуючи, що області вихрового сліду та пограничного шару біля поверхні судна мають незначні розміри,

при аналізі гідродинамічної взаємодії сил вони, як правило, не враховуються і задача зводиться до розв'язання тривимірного рівняння Лапласа для потенціалу швидкості.

У більшості робіт щодо взаємодії суден розглядалися два судна, що рухаються паралельно з постійними швидкостями, і зокрема, наступні випадки:

- $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ – моделювання операцій перевантаження чи дозаправки під час руху суден у морі;
- $\vec{V}_1 = -\vec{V}_2$ – при зустрічному розходженні;
- $|\vec{V}_1| \approx |\vec{V}_2|$ – при обгоні суден та маневруванні;
- $\vec{V}_1 = 0$, \vec{V}_2 – при проходженні судна повз пришвартоване судно.

Експерименти з взаємодії суден були проведені Коеном і Беком [9]. У роботі викладено результати досліджень чотирьох різних ситуацій: а) задача про поворот на певний кут; б) про рух судна біля вертикальної стінки; в) про рух судна в каналі з двома вертикальними стінками; г) про рух судна повз інше нерухоме судно. Моделлю судна в роботі [9] був циліндр з параболічною боковою поверхнею. Усі експерименти проводилися в басейні з обмеженою глибиною. Змінювалися глибина води, відстань від дна до моделі судна, відстань між суднами. Вимірювалися гідродинамічні сили, що діють на судно. Проведені у роботі порівняння результатів експерименту з чисельними розрахунками на основі теорії видовженого тіла свідчать про їхню повну якісну кореляцію, хоч кількісно результати були близькими лише у окремих випадках.

У роботі [12] на основі теорії видовженого тіла одержано оцінки для додаткових гідродинамічних бокових сил і моментів, що діють на судно, при проходженні повз різні нерівномірності у каналі (звуження каналу, виступи) і показано, що ці сили та моменти можуть бути значними.

В роботі [13] наведено результати випробувань в аеродинамічній трубі двох еліпсоїдів обертання зі співвідношенням осей 6:1. Сили та моменти вимірювалися за допомогою високочутливої тензосистеми з шістьма ступенями свободи. Обидві моделі встановлювалися в аеродинамічній трубі з різними відстанями між їх центрами. Така постановка задачі відповідає рухові двох тіл з однаковими швидкостями. Проведено також розрахунки з використанням моделі видовженого тіла. Порівняння результатів показало їх якісну відповідність експериментальним даним.

У дослідженнях Крішнакутті [15–16] розглядалася взаємодія рухомого та пришвартованого суден, а також взаємодія двох суден, що рухаються з

різними швидкостями в одному та у протилежних напрямках.

У роботі [14] вивчається взаємодія суден у каналі, що моделює Панамський канал. Для розрахунків автори застосовували чисельний метод граничних елементів в одному випадку з використанням функції Гріна для каналу, а в іншому поверхня каналу моделювалась системою окремих плоских панелей. На торцях каналу задовольнялись "м'які" граничні умови.

В дисертаційній роботі [8] доводиться ефективність панельного методу граничних елементів. Автор аналізує залежність похибки методу від вибору сітки як на поверхні взаємодіючих тіл, так і на поверхні каналу. В роботі показано, що у деяких випадках, наприклад, коли при розбитті поверхні на плоскі панелі не враховується геометрія тіл, ця похибка може бути досить значною. У той же час похибка методу мало залежить від співвідношень між розмірами окремих панелей. Автор наводить результати розрахунків для задачі про рух тіла в каналі з причалом, а також в каналі з нерівним дном.

У роботі болгарських дослідників [23] наводяться результати експериментів для двох суден (пришвартованого і рухомого) в каналі при докритичних швидкостях. Числа Фруда під час експериментів варіювались у діапазоні $Fr \in (0.6 - 1.07)$. Автори порівнюють експериментальні дані з розрахунками. Показано, що при малих числах Фруда ефектами вільної поверхні, зокрема хвилеутворення, нехтувати можна не завжди. Експериментальні криві, на відміну від теоретичних, є осцилюючими функціями зі значними амплітудами.

В дослідженні [17] розв'язується стаціонарна задача взаємодії двох суден на мілководді з врахуванням хвиль на вільній поверхні за допомогою функції Гріна спеціального виду. Невласний інтеграл, який входить до складу такої функції Гріна, обраховувався за допомогою квадратур Гауса-Лагуерре або за допомогою нескінченних рядів Джона. Автор приходить до висновку, що гідродинамічна взаємодія двох суден в умовах мілководдя головним чином залежить від набігаючих хвиль, швидкості руху суден, відстані між судами та глибини води.

Незважаючи на велику кількість теоретичних та експериментальних досліджень, варто зазначити, що взаємодія суден в умовах обмеженого фарватеру вивчена недостатньо, результати окремих розрахунків та експериментів часто суперечливі і не дають можливості передбачити гідродинамічні сили для реальних ситуацій. Зокрема, це стосується взаємодії суден різних розмірів та форм при ру-

хові з різними швидкостями. Крім того, більшість опублікованих результатів є розрізненими та несистематизованими.

1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Розглянемо рух тіла в ідеальній нестисливій рідині. Позначимо область, у якій рухається тіло, через Ω , а її граничну поверхню – через S . У випадку стаціонарної безвихрової течії цей рух можна описати за допомогою потенціалу $\varphi(\vec{x})$, де $\vec{x} = (x, y, z) \in \Omega$. Для нестисливості рідини потенціал $\varphi(\vec{x})$ задовільняє рівнянню Лапласа:

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = 0. \quad (1)$$

Використаємо ортогональну декартову систему координат $Oxyz$, зв'язану з рухомим судном: горизонтальна площина Oxy збігається з поверхнею ватерлінії судна, тобто з незбуреною поверхнею води. Буде розглянуто випадок малих чисел Фруда $Fr \ll 1$ ($Fr < 0.1$); вплив хвилеутворення на сили гідродинамічної взаємодії судна з границями (наприклад, з стінкою каналу) чи з іншими суднами не будемо розглядати. Якщо поверхня води незбурена, для аналізу полів, пов'язаних з судном, можна скористатись дзеркальним відображенням зануреної частини судна відносно площини Oxy . Гідродинамічні поля, генеровані одержаним таким чином тілом у безграничній рідині, еквівалентні аналогічним полям, що викликані рухом судна. Проводиться перехід від форми судна зі складними обрисами до еквівалентного еліпсоїда. Для вибору розмірів цього еліпсоїда можна використати, наприклад, підхід, коли довжина судна, його ширина та посадка дорівнюють відповідно $2a, 2b$ і c (a, b, c – півосі еліпсоїда). Інший можливий алгоритм: ширина судна дорівнює $2b$, посадка співпадає з c , а величина a визначається із умови рівності об'ємів підводної частини судна і половини еліпсоїда.

Зазначимо, що використання моделі еквівалентного еліпсоїда для чисельного алгоритму, який побудовано далі, не є принциповим обмеженням. Нижче розглядається гідродинамічна взаємодія декількох тіл, що рухаються в нерухомій рідині, або взаємодія тіл з непроникними границями. Чисельні результати приведені для випадку тривісних еліпсоїдів. Закон руху тіла $\vec{V}(\vec{x}_0, t)$ вважається заданим:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = \vec{V}(\vec{x}_0, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}_0), \quad (2)$$

де $\vec{x}_0 \in S$, $\vec{n}(\vec{x}_0) = [n_x, n_y, n_z]$ – одинична зовнішня нормаль до поверхні судна S ,

Сингулярні розв'язки рівняння Лапласа.

Фундаментальні розв'язки задачі дають значення потенціалу φ в довільній точці спостереження \vec{x} , викликані одиничним джерелом, яке знаходиться в точці $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$.

Експериментальні результати показали, що для малих чисел Фруда використання на вільній поверхні граничних умов твердої поверхні є прийнятним. У випадку незбуреної вільної поверхні функція Гріна має вигляд:

$$G(\vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r(\vec{x}, \vec{\xi})} + \frac{1}{r'(\vec{x}, \vec{\xi})} \right], \quad (3)$$

$$r(\vec{x}, \vec{\xi}) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$r'(\vec{x}, \vec{\xi}) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}.$$

Для обмеженої глибини води (рух судна на мілководді) функцію Гріна $G(\vec{x}, \vec{\xi})$ побудуємо, застосовуючи метод дзеркальних відображень:

$$G(\vec{x}, \vec{\xi}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_k(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} + \frac{1}{r'_k(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} \right], \quad (4)$$

$$r_k(\vec{x}, \vec{\xi}, h) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta + 2kh)^2},$$

$$r'_k(\vec{x}, \vec{\xi}, h) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta + 2kh)^2},$$

$$G_a = \frac{\partial G}{\partial a} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(\xi - x)a_x + (\eta - y)a_y}{4\pi r_k^3(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} + \frac{(\zeta - z - 2kh)a_z}{4\pi r_k^3(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} + \frac{(\xi - x)a_x}{4\pi r'_k{}^3(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} + \frac{(\eta - y)a_y + (\zeta + z + 2kh)a_z}{4\pi r'_k{}^3(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} \right],$$

де $\vec{\xi}(\xi, \eta, \zeta)$ – радіус-вектор точки на поверхні судна чи каналу; h – глибина води; $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ – довільний одиничний вектор.

Чисельна модель передбачає застосування методу граничних інтегральних елементів.

Поверхня тіла S моделюється розподілом джерел інтенсивності $q(\vec{\xi})$. Реакція рідини в певній точці спостереження \vec{x}_0 на розподілення джерел $q(\vec{\xi})$, тобто значення в цій точці потенціалу та швидкості, визначається через відповідні інтеграли по поверхні судна S :

$$\varphi(\vec{x}_0) = \int_S G(\vec{x}_0, \vec{\xi}) q(\vec{\xi}) dS,$$

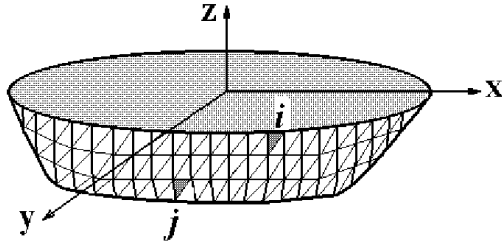


Рис. 1. Апроксимація поверхні граничними елементами

$$\frac{\partial \varphi(\vec{x}_0)}{\partial n} = \int_S^* G_n(\vec{x}_0, \vec{\xi}) q(\vec{\xi}) dS. \quad (5)$$

Тут \int_S^* позначає сингулярний інтеграл з особливістю при $\vec{x}_0 \rightarrow \vec{\xi}$ (визначається як головне значення інтегралу Коші з додатковим членом, зумовленим особливістю).

Проведемо дискретизацію поверхневих інтегралів плоскими трикутними граничними елементами, на кожному з яких інтенсивність поверхневих джерел постійна (рис. 1). Тоді умови непротікання, записані в центральних точках дискретних граничних елементів, можна розглядати як систему рівнянь для визначення інтенсивностей $q(\vec{\xi}^j)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}_0^i) &= \sum_{j=1}^N q(\vec{\xi}^j) \int_{\Delta S^j} G(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS, \\ V_n(\vec{x}_0^i) &= \sum_{j=1}^N q(\vec{\xi}^j) \int_{\Delta S^j} G_n(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

де x_0^i – координати середньої точки i -го граничного елемента; ΔS^j – площа j -го граничного елемента.

Формування матриць системи. Вирази (6) визначають потенціал і нормальну швидкість у середній точці (центрі мас) граничного елемента з номером i , викликані дією всіх джерел з інтенсивностями $q(\vec{\xi}^j)$. Перепишемо рівняння (6) у більш зручному вигляді:

$$\varphi^i = \sum_{j=1}^N G^{ij} q^j, \quad V_n^i = \sum_{j=1}^N G_n^{ij} q^j. \quad (7)$$

Кожний елемент G^{ij} та G_n^{ij} є результатом інтегрування, зокрема, першим елементом першого рів-

няння в співвідношенні (7) буде:

$$G^{i1} = \int_{\Delta S^1} G(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^1) dS.$$

Алгоритм визначення інтегралів докладно описаний раніше [4]. Якщо аналогічні операції інтегрування провести для всіх граничних елементів ($i = 1, 2, \dots, N$), то одержимо співвідношення для $\vec{\varphi}$ і \vec{V}_n в матричному вигляді:

$$\vec{\varphi} = G^S \vec{q}, \quad \vec{V}_n = G_n^S \vec{q}, \quad (8)$$

де очевидно $\vec{\varphi}, \vec{V}_n, \vec{q}$ – N -вимірні вектори граничних значень, а G^S і G_n^S – матриці розміром $N \times N$.

Знаходження дотичних швидкостей на граничній поверхні. Невідомі в рівняннях (8) q^1, q^2, \dots, q^N можуть бути знайдені звичайними методами матричної алгебри шляхом обертання матриці розміром $N \times N$. Далі, підставляючи \vec{q} по чергово в кожне з рівнянь (8), ми можемо визначити значення потенціалу та нормальної швидкості на всій поверхні S . Також за допомогою другого з рівнянь (8) може бути вирахована величина швидкості у довільному напрямку $\vec{k}(\vec{x}_0^i)$.

Для знаходження дотичних швидкостей на граничній поверхні скористаємось рівняннями

$$V_\tau^i = \sum_{j=1}^N G_\tau^{ij} q^j,$$

де V_τ^i – невідома дотична швидкість у напрямку $\vec{\tau}(\vec{x}_0^i) = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ на довільному елементі; q^j – відомі значення фіктивних джерел на поверхні S , знайдені з співвідношення (8);

$$G_\tau^{ij} = \int_{\Delta S^j} G_\tau(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS.$$

Знаходження потенціалу та швидкості у внутрішніх точках області. Значення потенціалу у внутрішніх точках \vec{x}^i області Ω вираховуються за відомими значеннями \vec{q} за допомогою рівнянь, аналогічних рівнянням (6). Компоненти швидкості в тих самих точках \vec{x}^i в певному напрямку $\vec{k}(\vec{x}^i)$ також можуть бути знайдені з рівнянь аналогічних (6).

Для розрахунку потенціалу швидкості у внутрішніх точках області в (6) замість точки поверхні \vec{x}_0^i потрібно підставити точку \vec{x}_*^i .

Методи обчислень інтегралів

$$\int_{\Delta S^j} G(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS, \quad \int_{\Delta S^j} G_n(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS \quad \text{та} \quad \int_{\Delta S^j} G_\tau(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS$$

описані у роботі [4].

2. ВИЗНАЧЕННЯ СИЛ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ

При маневруванні декількох суден гідродинамічна взаємодія між ними може викликати значні додаткові навантаження (сили і моменти). Ці гідродинамічні навантаження мають практичне значення, коли відстань між суднами невелика, а глибина води обмежена.

Гідродинамічні сили F_i можна знайти як інтеграл від тиску по зануреній поверхні тіла S_B :

$$F_i = \int_{S_B} p n_i dS = -\rho \int_{S_B} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \varphi \right) n_i dS. \quad (9)$$

Тут $\partial/\partial t$ – похідна по часу в нерухомій системі координат. Якщо перейти до системи координат, зв'язаної з тілом, то рівняння (9) запишеться у вигляді:

$$F_i = -\rho \frac{d}{dt} \int_{S_B} \varphi n_i dS + \rho \int_{S_B} \int \left((\vec{v}_0 + [\vec{\omega}_0 \times \vec{r}]) \vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} \varphi \right) n_i dS, \quad (10)$$

де \vec{v}_0 та $\vec{\omega}_0$ відповідно поступальна та обертальна швидкості рухомої системи координат.

Другий підхід до визначення сил і моментів пов'язаний з застосуванням рівнянь Лагранжа 2-го роду [4, 7, 8, 14].

Введемо узагальнені координати $x_i, i = 1, \dots, 12$, де x_1, x_2, x_3 – зміщення геометричного центру першого тіла відносно початкового положення; x_4, x_5, x_6 – кути повороту першого тіла відносно його центра; x_7, \dots, x_{12} – відповідно зміщення і кути повороту другого тіла; узагальнені швидкості $u_i = \dot{x}_i$. Аналогічним чином введемо потенціали φ_i та $n_i = \partial \varphi_i / \partial n, i = 1, \dots, 12$. Функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{12}$ відповідають різним випадкам руху тіл. (Наприклад, φ_1 – випадку руху тіл, коли $u_1 = 1, u_2 = u_3 = \dots = u_{12} = 0$). Кожен потенціал φ_i задовільняє рівнянню Лапласа (1). Тоді:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{12} \varphi_i u_i.$$

Для кінетичної енергії рідини, пов'язаної з рухом суден, маємо:

$$T = \frac{\lambda_{jk} u_j u_k}{2},$$

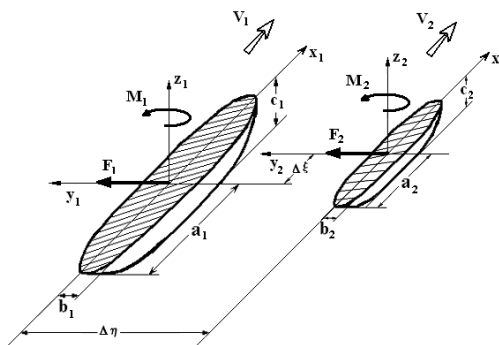


Рис. 2. Схема руху двох суден

$$\lambda_{jk} = \rho \int_{S_B} \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS \quad (j, k = 1, 2, \dots, 12), \quad (11)$$

де λ_{jk} – тензор приєднаних мас, елементи якого залежать від форми обводів судна та глибини води. Тут і далі за індексами, що повторюються, потрібно виконувати сумування.

Узагальнені сили обчислюються із рівняння Лагранжа:

$$F_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Після ряду тотожних перетворень одержимо:

$$F_i = -\lambda_{ij} \dot{u}_j - u_j u_k \left(\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_{jk}}{\partial x_i} \right).$$

У випадку, коли одне тіло рухається з постійною швидкістю V_i , а інше залишається нерухомим, маємо:

$$F_i = -V_1^2 \left(\frac{\partial \lambda_{i1}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial x_i} \right) = -V_1^2 \left(\frac{\partial \lambda_{1i}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial x_i} \right).$$

Коли два тіла рухаються з постійними швидкостями V у безграничній рідині або вздовж осі каналу постійного поперечного перерізу, кінетична енергія рідини буде залежати лише від їхнього взаємного розташування:

$$F_i = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_{11} + 2\lambda_{17} + \lambda_{77}).$$

Підхід, що ґрунтується на використанні системи рівнянь Лагранжа 2-го роду, часто є простішим і ефективнішим. (Саме він застосовувався в розрахунках, результати яких наведені нижче). Якщо швидкість визначена експериментально з напівемпіричних міркувань чи вирахована з достатньою

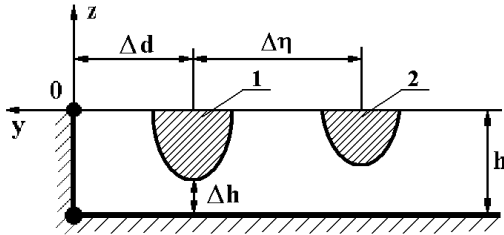


Рис. 3. Схема поперечного перерізу несиметричного каналу та розташування суден

точністю, для визначення сил краще скористатись рівняннями (10).

Розрахунок приєднаних мас. Основними складовими при розрахунку сил гідродинамічної взаємодії є приєднані маси тіл та їх похідні. Приєднані маси в загальному випадку визначаються з рівняння (11). Враховуючи дискретизацію поверхні, інтеграл у правій частині рівняння (11) вираховується наступним чином:

$$\lambda_{jk} = \sum_{i=1}^{N_B} \varphi_j^i \frac{\partial \varphi_k^i}{\partial n} \Delta S^i,$$

де N_B – кількість панелей на тілі; ΔS^i – площа i -тої панелі; φ_j^i – значення потенціалу φ_j на i -тій панелі (визначається з рівнянь (8)).

3. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Для моделювання задачі взаємодії суден було проведено перехід від форми суден зі складними обрисами до еквівалентних еліпсоїдів. Півосі еліпсоїдів – $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$. Система координат $0x_i y_i z_i$ вибрана таким чином, що велика піввісь еліпсоїда a_i розташована вздовж осі $0x_i$, піввісь b_i – вздовж осі $0y_i$, а піввісь c_i – вздовж осі $0z_i$ (рис. 2). Кількість плоских елементів на поверхні кожного еліпсоїда $n = 360$.

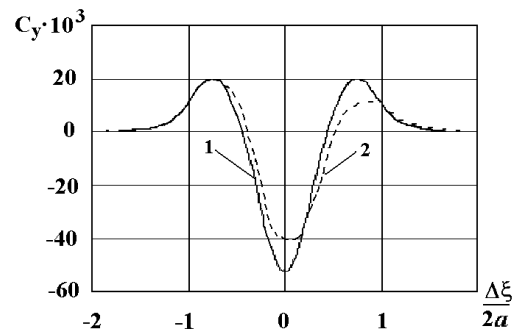
Для дискретизації поверхні тіла використовувалась система координат (φ, ψ) : координати точки на поверхні вираховувались за формулами: $x_i = a_i \cos \psi$, $y_i = b_i \sin \psi \cos \varphi$ та $z_i = c_i \sin \psi \sin \varphi$. Причому кути φ і ψ змінювались рівномірно з однаковою кроком $\pi/10$.

Рух еліпсоїда поблизу дна. Для розрахунку поля гідродинамічних характеристик при русі еліпсоїда поблизу дна (рис. 3) при малих числах Фруда можна використовувати два еквівалентні

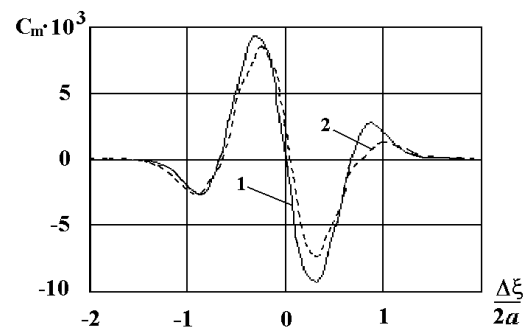
підходи [8, 14]. Перший із них ґрунтується на розбитті дна та нижньої половини еліпсоїда на плоскі панелі. На кожній панелі вводяться фіктивні джерела інтенсивності q , які визначаються із граничних умов на дні та на поверхні еліпсоїда (8). Таким чином можна врахувати і деформації вільної поверхні.

Інший підхід передбачає використання функції Гріна, яка повністю чи частково задовільняє граничні умови. Таку функцію можна побудувати методом дзеркальних відображень (4). Як показує досвід проведення розрахунків, щоб досягнути задовільної точності, можна обмежитись 41-м членом ряду (4), тобто $k = -20, \dots, 20$. У цьому випадку на панелі слід розбивати лише нижню половину еліпсоїда. Тут застосовувався саме такий алгоритм.

У випадку руху суден біля стінки (рис. 3) додатково проводилось відображення системи відносно вертикальної стінки.

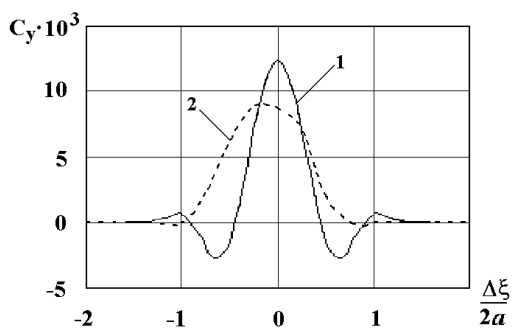


а

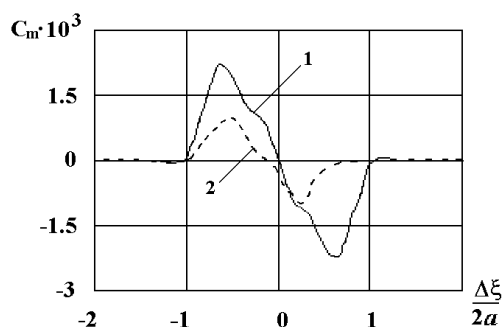


б

Рис. 4. Порівняння коефіцієнтів бокової сили C_y (а) та моменту C_m (б), що діє на нерухоме судно з циліндричною боковою поверхнею при проходженні повз нього іншого судна, таких же розмірів $b = a/8, c = a/16, h = 1.2c$ на відстані $\Delta \eta = 2.672b$: 1 – чисельні розрахунки, 2 – експеримент Коена і Бека



а



б

Рис. 5. Порівняння коефіцієнтів бокової сили C_y (а) та моменту C_m (б), що діє на рухоме судно з циліндричною боковою поверхнею при проходженні повз інше нерухоме судно, таких же розмірів $b = a/8$, $c = a/16$, $h = 1.2c$ на відстані $\Delta\eta = 2.672b$: 1 – чисельні розрахунки, 2 – експеримент Коена і Бека

4. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СУДЕН НА МІЛКОВОДІ

Для оцінки точності розрахунку сил та моментів взаємодії суден на мілкій воді було виконано порівняння чисельних розрахунків з даними гідродинамічного експерименту [9]. В цій роботі Коен і Бек досліджували взаємодію рухомого та нерухомого суден в умовах мілкої води. Модель судна мала форму циліндра з параболічною боковою поверхнею, що описується рівнянням $b(x) = b \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$. Під час експерименту вимірювалися гідродинамічні сили, що діяли як на рухоме, так і на нерухоме судно.

На рис. 4–5 наведено порівняння чисельних розрахунків з результатами експерименту [9]. Можна помітити, що для нерухомого тіла, (рис. 4), результати розрахунків та експериментів співпада-

ють або досить близькі (максимальне розходження складає близько 20%).

В той же час сили та моменти, що діють на рухоме тіло, співпадають тільки якісно (рис. 5). Це можна пояснити формуванням пограничного шару на корпусі судна та генерацією корабельних хвиль. Крім того, значення сил та моментів, що діють на рухоме судно, більш "чутливі" до припущень і наближень (спрощення форми судна, припущення про відсутність хвиль, похибки чисельного методу, похибки вимірювань і т. п.).

Було проведено розрахунки сил та моментів, що виникають при взаємодії суден на мілководді для різних випадків руху. Для того щоб уникнути плутанини, у роботі наведено тільки коефіцієнти сил та моментів, які діють на перше судно, (рис. 2). Будемо також вважати, що $\Delta\xi = x_{2,m} - x_{1,m}$, де $x_{1,m}$, $x_{2,m}$ – абсциси міделів відповідно першого та другого суден у довільній нерухомій системі координат.

Розглядалися декілька випадків руху суден.

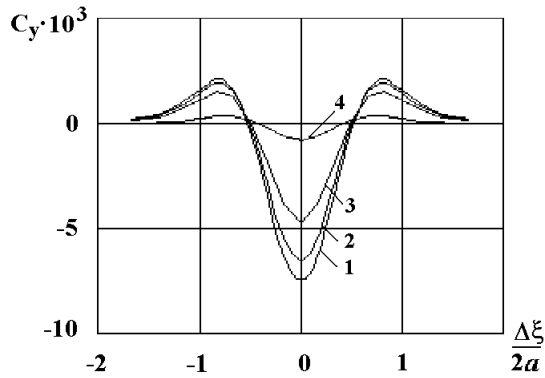
1. Два однакових еліпсоїди зі співвідношенням осей $b = a/6$, $c = a/12$ рухаються з однаковими швидкостями в одному напрямку в умовах мілкої води (рис. 6–7). При цьому в одному випадку відстань між тілами залишається постійною $\Delta\eta = 4b$, а змінюється глибина води (рис. 6). А в іншому випадку навпаки, глибина води залишається постійною $h = 1.1c$, а змінюється відстань між тілами (рис. 7).

2. Перший еліпсоїд зі співвідношенням осей $b = a/6$, $c = a/12$ залишається нерухомим, а другий (таких самих розмірів) рухається повз нього в умовах мілкої води (рис. 8, 9). В першому випадку відстань між еліпсоїдами залишається постійною $\Delta\eta = 4b$, а глибина води змінюється (рис. 8), в другому – глибина води залишається постійною $h = 1.1c$, а змінюється відстань між тілами (рис. 9).

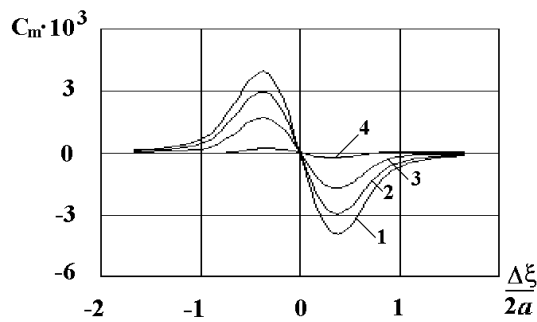
3. Два однакових еліпсоїди зі співвідношенням осей $b = a/6$, $c = a/12$ рухаються з рівними по величині швидкостями у протилежних напрямках в умовах мілкої води (рис. 10, 11). На рис. 10 відстань між тілами залишається постійною $\Delta\eta = 4b$, а змінюється глибина води. На рис. 11 глибина води залишається постійною $h = 1.1c$, а відстань між еліпсоїдами змінюється.

4. Перший еліпсоїд зі співвідношенням осей $b_1 = a_1/6$, $c_1 = a_1/12$ залишається нерухомим, а повз нього рухаються еліпсоїди різних розмірів в умовах мілкої води (рис. 12). При цьому глибина води та відстань між осями еліпсоїдів залишаються постійними $h = 2.5c_1$, $\Delta\eta = 4b_1$.

5. Один еліпсоїд зі співвідношенням осей $b_1 =$



а

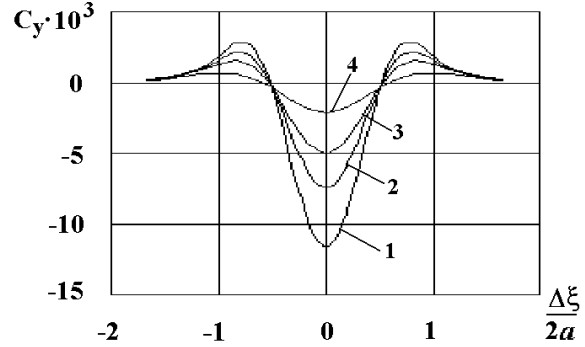


б

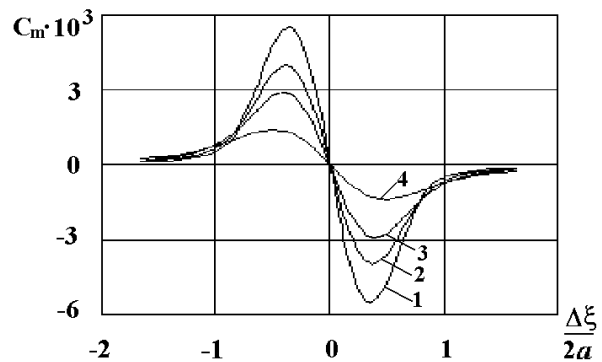
Рис. 6. Порівняння коефіцієнтів бокової сили C_y (а) та моменту C_m (б) при русові суден в одному напрямку з однаковими швидкостями $b = a/6, c = a/12, \Delta\eta = 4b$ на різних глибинах: 1 – $h = 1.1c$, 2 – $h = 1.2c$, 3 – $h = 1.5c$, 4 – $h = \infty$

$a_1/6, c_1 = a_1/12$ стоїть біля вертикальної стінки на відстані $\Delta\eta = 1.1b_1$ і залишається нерухомим, а повз нього рухаються еліпсоїди різних розмірів в умовах мілкої води (рис. 13). При цьому глибина води та відстань між осями еліпсоїдів залишаються постійними $h = 2.5c_1, \Delta\eta = 4b_1$.

Розрахунки показали, що при розходженні суден, а також при обгоні та при проходженні одного судна повз інше характер залежності бокової сили від поздовжнього зміщення близький для різних глибин, поперечних відстаней між судами та швидкостей суден. Поперечна сила діє на обидва судна наступним чином: при зменшенні відстані між міделлями суден спочатку відбувається відштовхування, далі – притягання, після проходження міделля – знову відштовхування. При наближенні носа одного судна до траверзу корми іншого



а



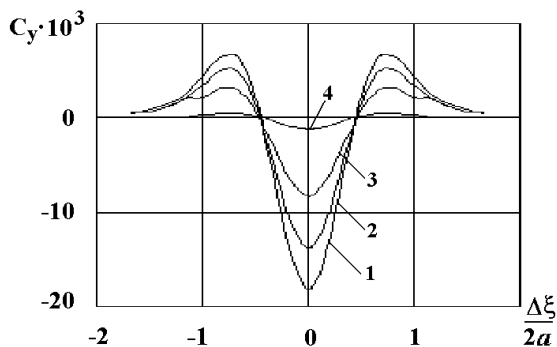
б

Рис. 7. Порівняння коефіцієнтів бокової сили C_y (а) та моменту C_m (б) при русові суден в одному напрямку з однаковими швидкостями $b = a/6, c = a/12, h = 1.1c$ при різних відстанях між суднами: 1 – $\Delta\eta = 3b$, 2 – $\Delta\eta = 4b$, 3 – $\Delta\eta = 5b$, 4 – $\Delta\eta = 8b$

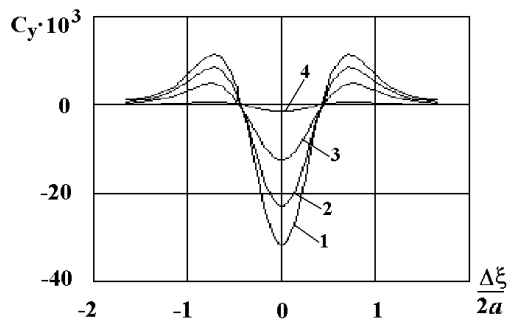
судна (при обгоні) або коли носи обох суден знаходяться на одному траверсі (при зустрічному розходженні) на обидва судна діє сила відштовхування.

Відстань між міделлями двох суден $|\Delta\xi_{max}|$, при якій сила відштовхування набуває максимального значення, залежить від розміру суден. Якщо взаємодіють два судна однакового розміру довжиною $2a$ кожне, то значення сили відштовхування досягає максимуму при $|\Delta\xi_{max}| \approx \frac{3}{2}a$. При взаємодії судна довжиною $2a$ з більшим судном значення $|\Delta\xi_{max}|$ збільшується. При взаємодії цього ж судна з судном менших розмірів значення $|\Delta\xi_{max}|$ зменшується, (рис. 12, а, рис. 13, а).

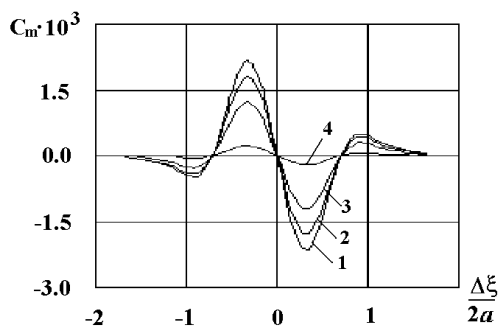
Зі зменшенням відстані між міделлями суден сила відштовхування переростає в силу притягання,



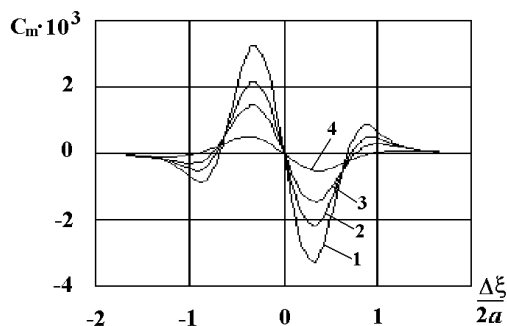
а



а



б



б

Рис. 8. Порівняння коефіцієнтів бокової сили C_y (а) та моменту C_m (б), що діє на нерухоме судно при проходженні повз нього іншого судна, таких же розмірів $b = a/6, c = a/12, \Delta\eta = 4b$ на різних глибинах: 1 – $h = 1.1c, 2 - h = 1.2c, 3 - h = 1.5c, 4 - h = \infty$

Рис. 9. Порівняння коефіцієнтів бокової сили C_y (а) та моменту C_m (б), що діє на нерухоме судно при проходженні повз нього іншого судна, таких же розмірів $b = a/6, c = a/12, h = 1.1c$ на різних відстанях: 1 – $\Delta\eta = 3b, 2 - \Delta\eta = 4b, 3 - \Delta\eta = 5b, 4 - \Delta\eta = 8b$

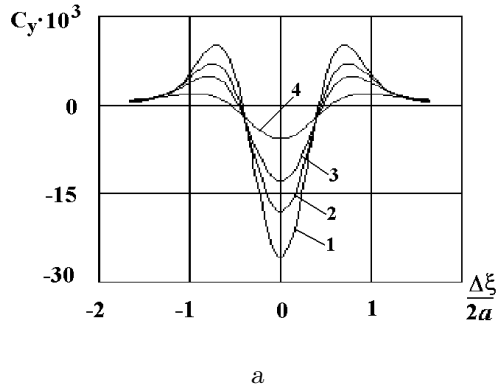
яка набуває максимального значення при розташуванні міделів суден на одному траверсі. Слід зазначити, що максимальне значення сили притягання значно більше максимального значення сили відштовхування.

Бокова сила гідродинамічної взаємодії суден значно більша у випадку розходження (судна рухаються в протилежних напрямках), ніж при рухові суден в одному напрямку. Сила, що діє на пришвартоване судно при проходженні повз нього іншого судна, більша, ніж при рухові суден в одному напрямку, але менша за ту, яка б виникла при рухові суден у протилежних напрямках.

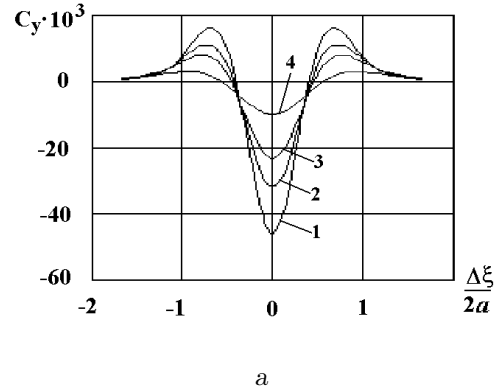
Характер залежності відхиляючого гідродинамічного моменту від поздовжнього зміщення $\Delta\xi$ при розходженні суден, при обгоні та при проходженні одного судна повз інше, більш-менш однаковий для різних глибин, поперечних відстаней між суднами та швидкостей суден. Для обох суден

залежність від часу відхиляючого моменту має такий вигляд: спочатку відворот від судна партнера, далі поворот до судна-партнера і знову відворот від судна-партнера. При взаємодії суден однакових розмірів максимальне значення моменту повороту досягається при відстані між міделями двох суден $|\Delta\xi_{max,in}| \approx \frac{a}{3}$, максимальне значення моменту відвороту – при $|\Delta\xi_{max,out}| \approx \frac{4}{3}a$. Значення $|\Delta\xi_{max,in}|$ та $|\Delta\xi_{max,out}|$ можуть змінюватись в залежності від форми суден, співвідношень між осями та в залежності від співвідношень розмірів двох суден (рис. 12, б, 13, б).

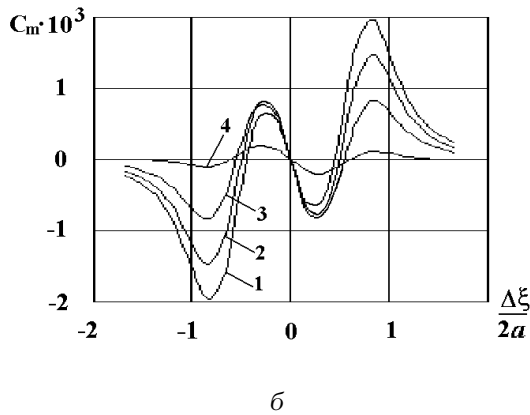
При рухові суден в одному напрямку з різними швидкостями, або у випадку, коли одне з суден нерухоме, максимальне значення моменту повороту до судна-партнера більше, ніж максимальне значення моменту відвороту від судна-партнера (рис.



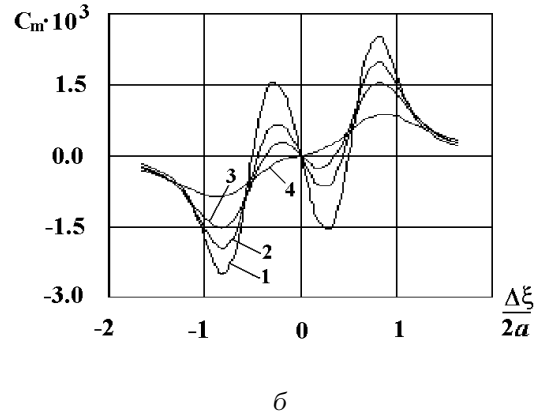
a



a



б



б

Рис. 10. Порівняння коефіцієнтів бокової сили C_y (а) та моменту C_m (б) при розходженні суден $b = a/6, c = a/12, \Delta\eta = 4b$ на різних глибинах: 1 – $h = 1.1c$, 2 – $h = 1.2c$, 3 – $h = 1.5c$, 4 – $h = \infty$

Рис. 11. Порівняння коефіцієнтів бокової сили C_y (а) та моменту C_m (б) при розходженні суден $b = a/6, c = a/12, h = 1.1c$ на різних відстанях: 1 – $\Delta\eta = 3b$, 2 – $\Delta\eta = 4b$, 3 – $\Delta\eta = 5b$, 4 – $\Delta\eta = 8b$

8, б, 9, б). При розходженні суден може виникнути протилежна ситуація, тобто максимальне значення моменту відвороту від судна-партнера може бути більшим, ніж максимальне значення моменту повороту до судна-партнера (рис. 10, б, 11, б).

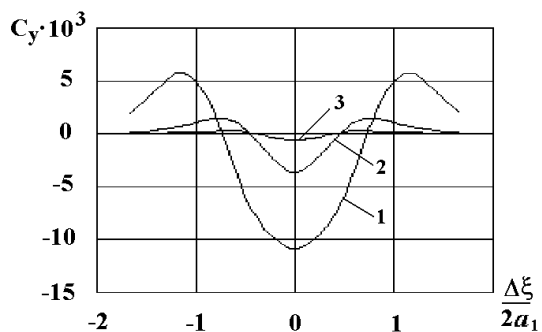
При рухові суден в одному напрямку з приблизно однаковими швидкостями відворот від судна партнера може бути взагалі відсутнім (рис. 6, б, 7, б). В такому випадку взаємодія суден характеризується двохпиковим поворотом до судна-партнера, тобто при відставанні даного (першого) судна від судна-партнера ($\Delta\xi < 0$) момент гідродинамічної взаємодії намагається повернути ніс даного судна до корми судна-партнера, при розташуванні міделів суден на одному траверсі момент взаємодії зменшується до нуля, а при проходженні міделя судна-партнера ($\Delta\xi > 0$) момент змінює знак і намагається повернути корму даного судна до носу судна-партнера.

При рухові двох суден з різними швидкостями

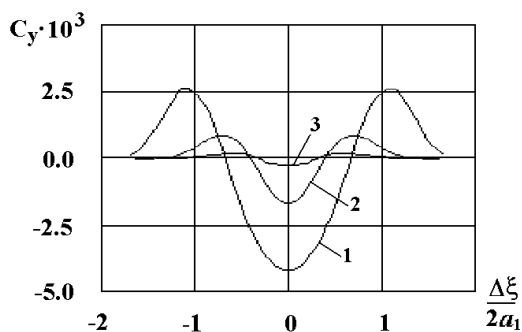
більша гідродинамічна сила та момент діють на те судно, що рухається повільніше. Бокова сила та відхиляючий момент, що діє на більш повільне судно, зростають зі збільшенням швидкості та розмірів судна-партнера. Бокова сила та відхиляючий момент, які діють на пришвартоване судно, пропорційні квадрату швидкості судна, яке проходить повз нього.

Значення сил і моментів, що діють на взаємодіючі судна, збільшуються зі зменшенням глибини води, а також при зменшенні відстані між суднами.

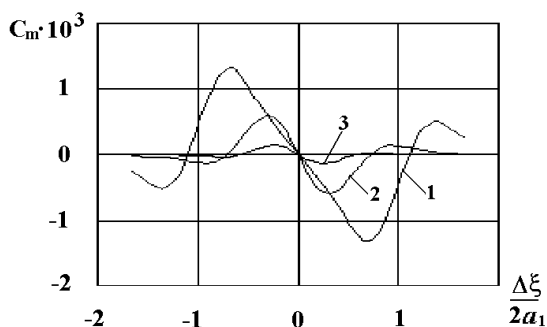
Сили і моменти, що діють на пришвартоване поблизу вертикальної стінки судно при проходженні повз нього іншого судна, будуть меншими порівняно з ситуацією, коли вертикальна стінка відсутня. Тобто вплив стінки зменшує дію рухомого судна на нерухоме. У той же час сили, що діють на рухоме судно, будуть більшими у випадку присутності стінки.



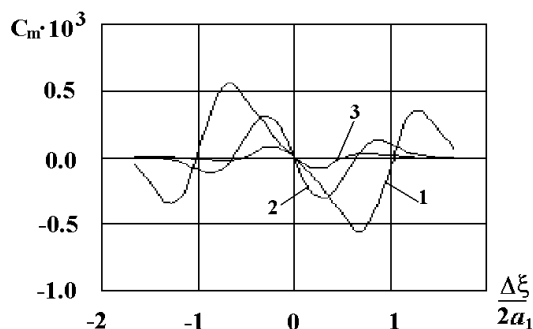
a



a



б



б

Рис. 12. Порівняння коефіцієнтів бокової сили C_y (a) та моменту C_m (б), що діє на нерухоме судно $b_1 = a_1/6, c_1 = a_1/12$, при проходженні повз нього іншого судна $\Delta\eta = 4b_1$, різних розмірів з таким же співвідношенням осей:
 $1 - a_2 = 2a_1, 2 - a_2 = a_1, 3 - a_2 = a_1/2$

Рис. 13. Порівняння коефіцієнтів бокової сили C_y (a) та моменту C_m (б), що діє на нерухоме судно, яке стоїть біля стінки $b_1 = a_1/6, c_1 = a_1/12$, при проходженні повз нього іншого судна $\Delta\eta = 4b_1$, різних розмірів з таким же співвідношенням осей:
 $1 - a_2 = 2a_1, 2 - a_2 = a_1, 3 - a_2 = a_1/2$

Форма суден більше впливає на відхиляючий момент, ніж на бокову силу. При розрахунку бокової сили часто формою судна можна знехтувати.

Зазначимо, що симетрія залежностей коефіцієнтів гідродинамічних сил від відстані пов'язана з використанням моделі потенціальної безвідривної течії, яка не враховує генерацію хвиль. Внаслідок роботи рушії та генерації корабельних хвиль залежності $C_x(\Delta\xi), C_y(\Delta\xi), C_m(\Delta\xi)$ стають несиметричними, наприклад, сили, коли рухоме судно розташоване перед і за пришвартованим, будуть різними.

ВИСНОВКИ

У роботі за допомогою чисельного методу граничних інтегральних рівнянь були розв'язані зада-

чі взаємодії двох суден на мілкій воді, та поблизу вертикальної стінки в порту. Розглянуто випадки однакових та різних (за розмірами) еліпсоїдів, коли вони рухаються в одному чи в протилежних напрямках та коли один еліпсоїд рухається, а другий залишається нерухомим. Дослідження показали, що сили гідродинамічної взаємодії між двома суднами значно збільшуються при русі на обмеженому фарватері. Ефекти взаємодії збільшуються на мілкій воді. Виникаючі гідродинамічні сили та моменти обернено пропорційні глибині води та відстані між суднами. Сили та моменти взаємодії залежать від розмірів суден, відстані між ними, від напрямку руху суден, а також від співвідношення їхніх швидкостей. Якщо рухоме судно взаємодіє з нерухомим, то сили, що діють на нерухоме судно, значно більші за сили, що діють на рухоме судно.

Розраховані за допомогою методу граничних

елементів сили та моменти взаємодії двох суден на мілкій воді порівнювались з відомими результатами експериментів. Порівняльний аналіз засвідчив високу ефективність панельного методу.

Із проведених досліджень випливає, що гідродинамічна взаємодія між двома суднами значно збільшується при рухові на обмеженому фарватері та отримані залежності дозволяють проводити аналіз спеціальних режимів руху суден, зокрема в річках, каналах, поблизу гідротехнічних споруд у широкому діапазоні параметрів.

1. Бенержи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках.– М.: Мир, 1984.– 494 с.
2. Горбань И. Н. Исследование вихревых течений в ограниченных областях. Диссерт. на соиск. уч. ст. к.ф.-м. н.– К.: ИГМ НАНУ, 1993.– 236 с.
3. Горбань В. А. О динамике систем тел в идеальной жидкости.– К.: Гидромеханика, 1983.– 236 с.
4. Горбань В. О., Масюк С. В. Чисельне моделювання гідродинамічної взаємодії тіл, що рухаються в рідині // Прикладна гідромеханіка.– 2006.– 8, N 3.– P. 27-49.
5. Костюков А. А. Взаимодействие тел, движущихся в жидкости.– Л.: Судостроение, 1972.– 310 с.
6. Мاستушкин Ю. М. Гидродинамическое взаимодействие судов при встречах и обгонах.– Л.: Судостроение, 1987.– 311 с.
7. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидромеханика.– М.: Мир, 1964.– 555 с.
8. Brodie J. H. Ship interactions in arbitrary channels.– Submitted to the department of ocean engineering in partial fulfillment of the requirements for the degrees of bachelor of science and master of science in ocean engineering at the Massachusetts institute of technology engineering at the: Massachusetts institute of technology, 1998.– 97 p.
9. Cohen S., Beck R. Experimental and theoretical hydrodynamic forces on a mathematical model in confined waters // Journal of Ship Research.– 1983.– 27, N 2.– P. 75-89.
10. Gui Q. Y., Chuang J. M., Hsiung C. C. A discussion on irregularities which occur in computation of ship manoeuvring in a restricted waterway using the numerical conformal mapping method // Int. Shipbuild. Progr.– 1992.– 39, N 417.– P. 55-67.
11. Hess J. L., Smith A. M. O. Calculations of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies // Journal of Ship Research.– 1964.– 8, N 2.– P. 22-44.
12. Hsiung C. C., Gui Qianyi Computing interaction forces and moments on a ship in restricted waterways // Int. Shipbuild. Progr.– 1988.– 35, N 403.– P. 219-254.
13. King G. W. Unsteady hydrodynamic interactions between ships // Journal of Ship Research.– 1977.– 21.– P. 157-164.
14. Korsmeyer F. T., Lee C.-H., Newman J. N. Computation of Ship Interaction forces in restricted waters // Journal of Ship Research.– 1993.– 37, N 4.– P. 298-306.
15. Krishnankutty P. Forces between ships during sid-sea replenishment and harbour transit // IE(I) Journal-MR.– 2004.– 84, N 2.– P. 54-56.
16. Krishnankutty P., Varyani K. S. Force on the mooring lines of a ship due the hydrodynamic interaction effects of a passing ship // Int. Shipbuild. Progr.– 2004.– 51, N 1.– P. 33-57.
17. Lin L. Numerical seakeeping predictions of shallow water effect on two ship interactions in waves.– Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy at: Dalhousie university, 2001.– 200 p.
18. Tuck E. O. Ship Motions in Shallow Water // Journal of Ship Research.– 1970.– 14.– P. 317-328.
19. Vantorre M., Laforce E., Verzhbitskaya E. Model tests based formulations of ship-ship interaction forces for simulation purposes.– IMSF 28th Annual General Meeting: „, Genova.– 2001 p.
20. Weihs D., Ringel M., Victor M. Aerodynamic interactions between adjacent slender Bodies // AI-AA Journal.– 2006.– 44, N 3.– P. 481-484.
21. Yeung R. W., Tan W. T. Hydrodynamic interactions of ships with fixed obstacles // Journal of Ship Research.– 1980.– 24, N 1.– P. 50-59.
22. Zhi Guo, Allen T. Cnwang Oblique Impact of Two Cylinders in a Uniform Flow // Journal of Ship Research.– 1991.– 35, N 3.– P. 219-229.
23. Kyulevcheliyev S., Georgiev S. Experimental observations of ship wavemaking at trans- and supercritical speeds.– Euro-Conference HADMAR 2001: Varna, Bulgaria, 2001.– 105 p.