УДК 539.3

# Устойчивость цилиндрических оболочек с учетом рассеянного трещинообразования в материале

**Д. В. Бабич**

Институт механики им. С. П. Тимошенко, Киев, Украина

*Выполнены постановка и решение задач о бифуркационной устойчивости цилиндрических оболочек с учетом поврежденности материала в докритическом напряженном состоянии. Поврежденность материала обусловлена неоднородностью его микропрочности и моделируется системой плоских эллиптических и круговых трещин, статистически однородно изотропно распределенных по объему оболочки. Математическая постановка задачи осуществлена в рамках гипотез Кирхгоффа–Лява с использованием концепции продолжающегося нагружения. Построено решение задачи при всестороннем сжатии оболочки.*

***Ключевые слова***: поврежденность материала, эллиптические и круговые микротрещины, устойчивость, цилиндрическая оболочка.

Задачи устойчивости оболочек из поврежденных материалов рассматривались ранее [1, 2]. Поврежденность отождествлялась со статистически однородно изотропно распределенными дефектами типа плоских эллиптических и круговых трещин постоянной концентрации. При решении задач устойчивости учитывалось, что изотропный материал с подобного рода повреждениями при сложном напряженном состоянии, сопровождающемся растяжением и сжатием, ведет себя как анизотропная физически нелинейная среда [1, 2]. Механизм физической нелинейности в этом случае обусловлен различием в характере взаимодействия поверхностей разориентированных микротрещин. Известен также другой механизм нелинейного деформирования повреждающейся среды, связанный с изменением концентрации трещин в зависимости от уровня нагружения ввиду неоднородности прочностных свойств структурных элементов материала.

Один из способов описания совместного деформирования и повреждаемости материала предложен в [3, 4], где разрушенные микрообъемы моделируются структурными микроэлементами в виде микропор.

В работе рассматривается континуальная модель деформирования упругохрупких материалов с накоплением повреждений в виде плоских микротрещин, случайным образом расположенных на всевозможных плоскостях сечений представительного объема, в котором заданы средние однородные напряжения. Полагаем, во-первых, что определяющие размеры и формы микротрещин близки к таковым характерных сечений структурных элементов материала и, во-вторых, что в процессе деформирования микротрещины не растут и не взаимодействуют между собой, а объемная плотность (концентрация) микродефектов изменяется с ростом уровня средних напряжений ввиду неоднородности микропрочности материала и определяется относительной долей разрушенных структурных элементов, содержащихся в единичном объеме.

Модель используется для постановки задач о бифуркационной устойчивости цилиндрических оболочек в рамках гипотез Кирхгоффа–Лява. Нелинейность уравнений состояния из-за зависимости концентрации микротрещин в материале от уровня нагружения усложняет решение задач устойчивости тонкостенных элементов конструкций. При обсуждении данной проблемы аналогом могут служить задачи устойчивости для упругопластических тел [5]. Подобно ситуации при исследовании устойчивости за пределом упругости в случае трещиноватых оболочек имеют место два варианта потери устойчивости, а именно: потеря устойчивости при продолжающемся нагружении (касательно-модульная нагрузка) и при постоянном (приведенно-модульная нагрузка). Во втором случае вследствие искривления оболочки возмущения напряжений изменяют знак по толщине, т.е. возникают участки разгрузки и догрузки основного напряженного состояния. На участках разгрузки концентрация трещин не меняется, поэтому деформирование происходит по линейному закону. При догрузке материал деформируется нелинейно за счет увеличения концентрации трещин. В случае деформирования оболочки при постоянном нагружении характерным является то, что приведенно-модульная нагрузка выше касательно-модульной.

Учитывая, что теоретические значения критических напряжений, как правило, выше экспериментальных, по-видимому, вариант теории устойчивости при продолжающемся нагружении – наиболее приемлемый подход к исследованию устойчивости оболочек с рассеянной по объему трещиноватостью как с точки зрения точности результатов, так и простоты постановки и решения задачи устойчивости, поскольку нет необходимости определять области разгрузки и догрузки.

**Связанное деформирование и трещинообразование материала**. Ранее [1, 2] с использованием энергетического метода [6] получены уравнения состояния для поврежденного материала с постоянной концентрацией плоских микродефектов. Связь между средними напряжениями и деформациями для изотропного трещиноватого материала при всестороннем сжатии либо растяжении имеет вид

$$\sigma_{11} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Theta + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{11}, \qquad \sigma_{12} = G\varepsilon_{12}, \tag{1}$$

$$\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

Соотношения для других напряжений получаются круговой перестановкой индексов 1, 2, 3. В отличие от сплошного материала, выражения для технических постоянных в (1) при растяжении ($\sigma_{ii} > 0$, $i = 1, 2, 3$) и сжатии ($\sigma_{ii} < 0$) с учетом трения скольжения поверхностей микротрещин определяются через постоянные упругости сплошной среды $E_0$, $G_0$, $\nu_0$ и параметры микротрещин [1, 2]

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} + a'_{11}, \qquad -\frac{\nu}{E} = -\frac{\nu_0}{E_0} + a'_{12}, \qquad \frac{1}{G} = \frac{1}{G_0} + a'_{66}, \tag{2}$$

где слагаемые $a'_{ij}$ в случае изотропного материала, поврежденного дефектами в виде эллиптических трещин с полуосями $a$, $b$, которые статистически однородно изотропно распределены по объему, в зависимости от наводимого в теле напряженного состояния и характера взаимодействия поверхностей трещин будут определяться по следующим соотношениям [1, 2]:

1) всестороннее растяжение, сопровождающееся раскрытием трещин ($\sigma_{ii} > 0$):

$$\begin{cases} a'_{11} = \varepsilon\left[\dfrac{2}{15}(A_1 + A_2) + \dfrac{2}{5}A_3\right], \\ a'_{12} = \varepsilon\left[-\dfrac{1}{15}(A_1 + A_2) + \dfrac{2}{15}A_3\right], \\ a'_{66} = \varepsilon\left[\dfrac{2}{5}(A_1 + A_2) + \dfrac{8}{15}A_3\right]; \end{cases} \tag{3}$$

2) всестороннее сжатие с учетом трения скольжения ($\sigma_{ii} < 0$):

$$\begin{cases} a'_{11} = \varepsilon\left[\dfrac{2}{15}(1 - 3f^2)(A_1 + A_2)\right], \\ a'_{12} = \varepsilon\left[-\dfrac{1}{15}(1 + 2f^2)(A_1 + A_2)\right], \\ a'_{66} = \varepsilon\left[\dfrac{2}{15}(3 - 4f^2)(A_1 + A_2)\right]. \end{cases} \tag{4}$$

В (3), (4) приведены такие обозначения:

$$\begin{aligned} &A_1 = \frac{(1-\nu_0)}{E_0}R(k,\nu_0); \quad A_2 = \frac{(1-\nu_0)}{E_0}Q(k,\nu_0); \quad A_3 = \frac{(1-\nu_0)}{E(k)E_0}; \\ &R(k,\nu_0) = k^2[(k^2 - \nu_0)E(k) + \nu_0 k_1^2 K(k)]^{-1}; \\ &Q(k,\nu_0) = k^2[(k^2 + \nu_0 k_1^2)E(k) - \nu_0 k_1^2 K(k)]^{-1}; \end{aligned} \tag{5}$$

$\varepsilon$ – малый параметр, определяющий концентрацию трещин, $\varepsilon =$ $= -\dfrac{4\pi}{3}\int\int ab^2 F(a,b)dadb = \dfrac{4\pi}{3}N_0\langle ab^2\rangle$; $F(a,b)$ – плотность распределения микротрещин по размерам; $f$ – коэффициент трения скольжения; $N_0$ – количество трещин в единичном объеме; $k^2 = 1 - b^2/a^2$, $k_1^2 = 1 - k^2$, $K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Приведенные выражения получены в предположении образования в материале трещин с одинаковыми отношениями полуосей $a$, $b$. Для среды, ослабленной круговыми трещинами радиуса $a$, имеют место соотношения:

$$A_1 = A_2 = \frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi(2-\nu_0)E_0}, \qquad A_3 = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}, \qquad \varepsilon = \frac{4\pi}{3}N_0\langle a^3\rangle. \tag{6}$$

При $\varepsilon << 1$ постоянные упругости при всестороннем растяжении и сжатии соответственно будут определяться формулами

$$E = E_0 \left[ 1 - \frac{4}{15\pi} (10 - 3\nu_0) \frac{(1-\nu_0^2)}{(2-\nu_0)} \varepsilon \right],$$
$$\nu = \nu_0 \left[ 1 - \frac{4}{15\pi} (3 - \nu_0) \frac{(1-\nu_0^2)}{(2-\nu_0)} \varepsilon \right], \qquad (7)$$
$$G = G_0 \left[ 1 - \frac{4}{15\pi} \frac{(10 - 2\nu_0)}{(1+\nu_0)} \frac{(1-\nu_0^2)}{(2-\nu_0)} \varepsilon \right];$$

$$E = E_0 \left[ 1 - \frac{16}{15\pi} (1 - 3f^2) \frac{(1-\nu_0^2)}{(2-\nu_0)} \varepsilon \right],$$
$$\nu = \nu_0 + \frac{8}{15\pi} \left[ 1 - 2\nu_0 + 2f^2 (1 + 3\nu_0) \frac{(1-\nu_0^2)}{(2-\nu_0)} \varepsilon \right], \qquad (8)$$
$$G = G_0 \left[ 1 - \frac{8}{15\pi} (3 - 2f^2) \frac{(1-\nu_0^2)}{(2-\nu_0)} \varepsilon \right].$$

В случае одноосного сжатия характер поведения изотропной трещиноватой среды аналогичен таковому трансверсально изотропной с плоскостью изотропии, нормальной к направлению сжатия. Приращения податливостей при этом будут определяться комбинацией второго и третьего соотношений из (3) и первого из (4).

Для описания процесса совместного деформирования и трещинообразования упругохрупких материалов с использованием приведенных выше соотношений необходимо найти зависимость обьемной концентрации микротрещин $\varepsilon$ от уровня нагружения. Приемлемой в этом случае является структурная модель накопления повреждений Даниэлса [7]. Изменение обьемной концентрации микротрещин $\varepsilon$ зависит от механизма микроразрушений в материале, распределения прочностных свойств по обьему, а также от истории нагружения. Ниже в качестве примера рассматривается микроразрушение типа отрыва. Аналогично может быть рассмотрено и разрушение, связанное со сдвигом. За критерий разрушения структурных элементов материала принимаются соотношения первой теории прочности [8]:

$$\sigma_n \geq \sigma, \qquad (9)$$

где $\sigma$ – случайная величина, которая может обозначать предельные значения растягивающих либо сжимающих напряжений, вызывающих разрушение структурных элементов материала. Предполагается, что по достижении истинными растягивающими напряжениями $\sigma_n$ значения $\sigma$ на соответствующей площадке образуется микротрещина с плоскостью, нормальной к направлению их действия. В случае сжимающих напряжений $\sigma_n$ микротрещины ориентируются преимущественно параллельно их направлению [8].

Если в качестве представительного объема выбрать шар некоторого радиуса, в котором заданы средние напряжения $\sigma_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, то нормальное напряжение $\sigma_n$ на площадке, ориентация нормали к которой задана сферическими координатами $\theta$ (широта) и $\varphi$ (долгота), будет определяться выражением

$$\sigma_n = \sigma_{11}\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\varphi\sin^2\theta + \sigma_{33}\cos^2\theta +$$

$$+ 2\sigma_{12}\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta + 2\sigma_{13}\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 2\sigma_{23}\sin\varphi\sin\theta\cos\theta. \quad (10)$$

Истинное растягивающее напряжение $\sigma'_n$ на этой площадке в результате уменьшения несущей площади сечения определяется по соотношению

$$\sigma'_n = \sigma_n / [1 - P_n(\sigma'_n)], \quad (11)$$

где $P_n(\sigma'_n)$ – относительная часть площади пересечения разрушенных структурных элементов. Концентрация плоских микродефектов в случайном сечении представительного объема определяется вероятностью $P_n(\sigma'_n \geq \sigma)$ того, что значения нормального напряжения $\sigma'_n$ будут не меньше прочности частиц микроструктуры $\sigma$, являющейся случайной величиной. При сжатии $(\sigma_n < 0)$ несущая площадь не изменяется $(\sigma'_n = \sigma_n)$. Для аппроксимации распределения прочностных свойств кристаллитов и зерен различной ориентации по аналогии с моделью Даниэлса [7] используется степенной закон:

$$P(\sigma) = \begin{cases} 0 & (\sigma < \sigma_0); \\ (\sigma - \sigma_0)^\alpha / (\sigma_c - \sigma_0)^\alpha & (\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_c); \\ 1 & (\sigma > \sigma_c), \end{cases} \quad (12)$$

где параметры распределения определяются с помощью метода моментов [9] приравниванием выборочных моментов и моментов распределения (12), зависящих от $\sigma_0$, $\sigma_c$ и $\alpha$. Основные моменты (средняя микропрочность $\langle\sigma\rangle$ и дисперсия $D^2$) для распределения (12) имеют вид

$$\langle\sigma\rangle = \frac{\alpha}{\alpha + 1}(\sigma_c - \sigma_0) + \sigma_0; \quad (13)$$

$$D^2 = \frac{\alpha}{\alpha + 2}\sigma_c^2 - \frac{2\alpha\langle\sigma\rangle\sigma_c}{\alpha + 1} + \langle\sigma\rangle^2. \quad (14)$$

С учетом (11) средняя вероятность разрушения элементов структуры, пересекающих единицу поверхности представительного объема, определяется по соотношению

$$p=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}P_n\sin\theta d\theta d\varphi,\qquad P_n=P(\sigma'_n). \tag{15}$$

Физический смысл величины $p$ заключается в том, что она представляет относительную долю единицы площади поверхности шара, на которой нормальные напряжения $\sigma_n$ превышают предел прочности $\sigma$ пересекаемых поверхностью шара микрочастиц. При этом в случае растяжения частицы растрескиваются по поверхностям, нормальным к $\sigma_n$, при сжатии – в направлении действия $\sigma_n$. Объемная концентрация плоских микродефектов $\varepsilon$ в (3), (4), (6)–(8) определяется отношением количества разрушенных микрочастиц $N_{\text{p}}$ к их общему количеству $N$ в представительном объеме. При этом $\varepsilon = p$. Такой результат можно получить с помощью приема, который применяется в петрографии для анализа тонких срезов осадков [10].

Пусть в случайном шаре единичного объема имеется в среднем $N$ микроструктурных элементов среднего объема $\langle V\rangle$, из которых $N_0$ – разрушены. Введем следующие обозначения: $\lambda$, $\lambda_{\text{p}}$ – среднее количество пересечений на единицу площади поверхности шара соответственно всех и разрушенных структурных элементов; $\langle S\rangle$ – средняя площадь пересечений. Тогда согласно [10] получим

$$\lambda\langle S\rangle = N\langle V\rangle,\qquad \lambda_{\text{p}}\langle S\rangle = N_0\langle V\rangle,$$

откуда с учетом $\lambda = 1/\langle S\rangle$ и $\lambda_{\text{p}}/\lambda = p$ следует

$$\varepsilon = N_0\langle V\rangle = p. \tag{16}$$

Таким образом, связанный процесс деформирования и дисперсного разрушения в виде образования системы стохастически ориентированных плоских микротрещин моделируется замкнутой системой нелинейных уравнений (1)–(4), (9)–(12), (15), (16).

Отметим, что параметр $P_n$ существенно зависит от характера нагружения тела. В частности, при однократном нагружении сплошного тела растягивающими усилиями указанный параметр находится по формуле (12) при $\sigma'_n = \sigma_n$. При пошаговом нагружении для определения $\sigma'_n$ в качестве $P_n$ используется значение, соответствующее предшествующему этапу нагружения. Следует также иметь в виду, что при сжатии изменение эффективной площади случайных сечений представительного объема не влияет на значения нормального напряжения $\sigma_n$.

Для постановки задач об устойчивости оболочек с учетом микроповреждаемости материала в дальнейшем необходимо использовать приведенные выше уравнения состояния для плоского напряженного состояния ($\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{23} = 0$). С учетом равенства $\varepsilon_{33} = -\dfrac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})$ уравнения (1) принимают вид

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22});\quad \sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11});\quad \sigma_{12}=G\varepsilon_{12};$$
$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}(\sigma_{11}-\nu\sigma_{22});\quad \varepsilon_{22}=\frac{1}{E}(\sigma_{22}-\nu\sigma_{11});\quad \varepsilon_{12}=\frac{1}{G}\sigma_{12}, \tag{17}$$

где $E$, $G$, $\nu$ – секущие характеристики упругости, зависящие от наводимого в теле напряженного состояния.

**Устойчивость оболочек из поврежденного материала**. С целью упрощения выкладок рассматривается оболочка средней длины [5] толщиной $h$ и длиной $L$, отнесенная к системе координат $0x_1x_2x_3$, связанной со срединной поверхностью радиуса $R$. Координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ отсчитываются соответственно в осевом, окружном и нормальном к срединной поверхности направлениях. Перемещения точек срединной поверхности в указанных направлениях обозначаются соответственно $u$, $v$, $w$. При решении задач устойчивости данного типа оболочек можно воспользоваться аппаратом теории пологих оболочек [5]. Тогда в рамках гипотез Кирхгоффа–Лява в произвольной точке цилиндрической оболочки деформации будут определяться по соотношениям

$$\varepsilon_{ij}=e_{ij}+x_3\chi_{ij}\qquad (i,j=1,2), \tag{18}$$

где $e_{ij}, \chi_{ij}$ – соответственно деформации, кривизна и кручение срединной поверхности,

$$e_{11}=u_{,1},\qquad e_{22}=v_{,2}-\frac{w}{R},\quad e_{12}=u_{,2}+v_{,1};$$
$$\chi_{11}=-w_{,11},\quad \chi_{22}=-w_{,22},\quad \chi_{12}=-2w_{,12}. \tag{19}$$

Уравнения равновесия в возмущенном состоянии в смешанной форме представляются следующим образом [5]:

$$M_{11,11}+2M_{12,12}+M_{22,22}-\left(\sigma_{11}^0 w_{,11}+2\sigma_{12}^0 w_{,12}+\sigma_{22}^0 w_{,22}-\frac{\Phi_{,11}}{R}\right)h=0;$$
$$\bar{e}_{11,22}+\bar{e}_{22,11}-\bar{e}_{12,12}=-\frac{1}{R}w_{,11}, \tag{20}$$

где $M_{ij}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}x_3\bar{\sigma}_{ij}dx_3$, $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{e}_{ij}$, $\chi_{ij}$, $w$ – приращения моментов и напряжений в оболочке вследствие изгиба, а также мембранных деформаций, кривизн, кручения срединной поверхности и прогибов в возмущенном состоянии; $\sigma_{ij}^0$ – напряжения в основном безмоментном напряженном состоянии. К этим уравнениям необходимо добавить выражения для возмущений мембранных напряжений через функцию напряжений $\Phi$:

$$\bar{\bar{\sigma}}_{11}=\Phi_{,22},\qquad \bar{\bar{\sigma}}_{22}=\Phi_{,11},\qquad \bar{\bar{\sigma}}_{12}=-\Phi_{,12}. \tag{21}$$

Приращения полных напряжений $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$ и деформаций $\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0$ определяются путем варьирования в окрестности основного напряженно-деформированного состояния уравнений (17), связывающих конечные значения напряжений и деформаций для повреждающейся среды, с учетом зависимости секущих модулей от концентрации микротрещин $\varepsilon$. В результате возмущения напряжений и деформаций представляются в виде

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= a_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + a_{12}\bar{\varepsilon}_{22} + a_{13}\bar{\varepsilon}_{12}, \\ \bar{\sigma}_{22} &= a_{21}\bar{\varepsilon}_{11} + a_{22}\bar{\varepsilon}_{22} + a_{23}\bar{\varepsilon}_{12}, \\ \bar{\sigma}_{12} &= a_{31}\bar{\varepsilon}_{11} + a_{32}\bar{\varepsilon}_{22} + a_{33}\bar{\varepsilon}_{12}; \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= A_{11}\bar{\sigma}_{11} + A_{12}\bar{\sigma}_{22} + A_{13}\bar{\sigma}_{12}, \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= A_{21}\bar{\sigma}_{11} + A_{22}\bar{\sigma}_{22} + A_{23}\bar{\sigma}_{12}, \\ \bar{\varepsilon}_{12} &= A_{31}\bar{\sigma}_{11} + A_{32}\bar{\sigma}_{22} + A_{33}\bar{\sigma}_{12}, \end{aligned} \tag{23}$$

где коэффициенты $a_{ij}$, $A_{ij}$, определяемые по соотношениям

$$a_{11} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{11}}, \quad a_{12} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{22}}, \quad \ldots, \quad A_{11} = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \sigma_{11}}, \quad A_{12} = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \sigma_{22}}, \quad \ldots,$$

имеют вид

$$\begin{cases} a_{11} = \dfrac{E}{1-\nu^2} - \alpha_{11}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{11}}, & a_{12} = \dfrac{\nu E}{1-\nu^2} - \alpha_{11}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{22}}, \quad a_{13} = -\alpha_{11}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{12}}, \\ a_{21} = \dfrac{\nu E}{1-\nu^2} - \alpha_{22}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{11}}, & a_{22} = \dfrac{E}{1-\nu^2} - \alpha_{22}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{22}}, \quad a_{23} = -\alpha_{22}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{12}}, \\ a_{31} = -\alpha_{12}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{11}}, & a_{32} = -\alpha_{12}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{22}}, \quad a_{33} = G - \alpha_{12}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{12}}, \\ \alpha_{ii} = \sigma_{ii}^0 E\dfrac{a_{ii}'}{\varepsilon} \quad (i=1,2), & \alpha_{12} = \sigma_{12}^0 G\dfrac{a_{66}'}{\varepsilon}; \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} A_{11} = \dfrac{1}{E} + \beta_{11}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{11}}, & A_{12} = -\dfrac{\nu}{E} + \beta_{11}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{22}}, \quad A_{13} = \beta_{11}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{12}}, \\ A_{21} = -\dfrac{\nu}{E} + \beta_{22}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{11}}, & A_{22} = \dfrac{1}{E} + \beta_{22}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{22}}, \quad A_{23} = \beta_{22}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{12}}, \\ A_{31} = \beta_{12}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{11}}, & A_{32} = \beta_{12}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{22}}, \quad A_{33} = \dfrac{1}{G} + \beta_{12}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{12}}, \\ \beta_{11} = (\sigma_{11}^0 - \nu\sigma_{22}^0)\dfrac{a_{11}'}{\varepsilon}, & \beta_{22} = (\sigma_{22}^0 - \nu\sigma_{11}^0)\dfrac{a_{11}'}{\varepsilon}, \quad \beta_{12} = \sigma_{12}^0\dfrac{a_{66}'}{\varepsilon}. \end{cases} \tag{25}$$

Представленные соотношения справедливы для общего случая напряженно-деформированного состояния оболочки. Ниже будут рассматриваться оболочки в предположении независимости геометрических и механических параметров от координат. В этом случае уравнения (20) с учетом соотношений (21)–(25), справедливых для цепных и полных напряжений и деформаций, принимают вид

$$D[a_1 w_{,1111} + a_2 w_{,1122} + a_3 w_{,2222} + 2a_4 w_{,1112} + 2a_5 w_{,1222}] +$$
$$+ T_{11}^0 w_{,11} + T_{22}^0 w_{,22} + 2T_{12}^0 w_{,12} - \frac{h\Phi_{,11}}{R} = 0; \tag{26}$$
$$\overline{A}_1 \Phi_{,1111} + \overline{A}_2 \Phi_{,1122} + A_3 \Phi_{,2222} - \overline{A}_4 \Phi_{,1112} - \overline{A}_5 \Phi_{,1222} = -\frac{E_0}{R} w_{,11},$$

где

$$\overline{a}_{ij} = a_{ij}/E_0; \qquad \overline{A}_{ij} = E_0 A_{ij};$$

$$a_1 = \overline{a}_{11}; \;\; a_2 = \overline{a}_{12} + \overline{a}_{21} + 4\overline{a}_{33}; \;\; a_3 = \overline{a}_{22}; \;\; a_4 = \overline{a}_{13} + \overline{a}_{31}; \;\; a_5 = \overline{a}_{23} + \overline{a}_{32};$$

$$\overline{A}_1 = \overline{A}_{22}; \;\; \overline{A}_2 = \overline{A}_{12} + \overline{A}_{21} + \overline{A}_{33}; \;\; \overline{A}_3 = \overline{A}_{11}; \;\; A_4 = \overline{A}_{32} + \overline{A}_{23}; \;\; \overline{A}_5 = \overline{A}_{13} + \overline{A}_{31};$$

$D = E_0 h^3/12$; $T_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 h$ – погонные тангенциальные усилия докритического напряженного состояния. К уравнениям (26) необходимо добавить краевые условия, соответствующие характеру закрепления торцов оболочки.

**Всестороннее сжатие оболочки**. В качестве примера рассмотрим устойчивость оболочки при всестороннем внешнем давлении интенсивностью $q$. В этом случае $T_{11}^0 = qR/2$, $T_{22} = qR$. Предполагалось, что торцы оболочки оперты на диафрагмы, абсолютно жесткие в своей плоскости и гибкие из нее:

$$w = M_{11} = \Phi_{,22} = \Phi_{,12} = 0, \quad x_1 = 0; L. \tag{27}$$

При указанном виде нагружения в уравнениях (26) коэффициенты $a_4 = a_5 = \overline{A}_4 = \overline{A}_5 = 0$.

Решение системы уравнений (26), (27) представляется следующим образом:

$$w = A \sin\frac{m\pi x_1}{L} \sin\frac{n x_2}{R}; \qquad \Phi = B \sin\frac{m\pi x_1}{L} \sin\frac{n x_2}{R}. \tag{28}$$

Выражение для безразмерного параметра критического давления имеет вид

$$\overline{q} = \left\{\frac{1}{12}\eta[a_1\theta^4 + a_2\theta^2 + a_3] + \frac{\theta^4}{\eta(\overline{A}_1\theta^4 + \overline{A}_2\theta^2 + \overline{A}_3)}\right\}\left(\frac{1}{2}\theta^2 + 1\right)^{-1}, \tag{29}$$

где $\overline{q} = qR^2/E_0 h^2$; $\theta = m\pi R/nL$; $\eta = n^2 h/R$.

Если по аналогии с линейно-упругой задачей принять $m = 1$ и $\theta << 1$, то (29) приближенно можно записать так:

$$\bar{q} = \frac{1}{12} a_3 \eta + \frac{\theta^4}{\bar{A}_3 \eta}. \tag{30}$$

В результате минимизации по $n$ выражение (30) принимает вид

$$\bar{q} = \frac{\sqrt{6}\pi R}{9L} \left( \frac{h}{R} \right)^{1/2} \sqrt[4]{\frac{a_3^3}{\bar{A}_3}}. \tag{31}$$

Для сплошного материала ($\varepsilon = 0$) выражение (31) совпадает с классической формулой [5]

$$\bar{q} = \frac{\sqrt{6}\pi R}{9(1 - \nu_0^2) L} \left( \frac{h}{R} \right)^{1/2}. \tag{32}$$

Окружное и осевое критические напряжения определяются соответственно по выражениям

$$\sigma_{22}^0 = \frac{\sqrt{6} E_0 \pi h}{9L} \left( \frac{h}{R} \right)^{1/2} \sqrt[4]{\frac{a_3^3}{\bar{A}_3}}; \qquad \sigma_{11}^0 = \frac{1}{2} \sigma_{22}^0. \tag{33}$$

Полагая, что в материале при рассматриваемом виде нагружения происходит накопление микродефектов типа круговых трещин, коэффициенты $a_3$, $\bar{A}_3$ в (31), (33) находятся по формулам (24), (25), в которых концентрация микротрещин $\varepsilon$ при двухпараметрическом распределении микропрочности (формула (12) при $\sigma_0 = 0$) в зависимости от сжимающих напряжений $\sigma_{11}^0$, $\sigma_{22}^0$ определяется по соотношению

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\sigma_c} \right)^{\alpha} (\sigma_{11}^0 \cos^2 \varphi + \sigma_{22}^0 \sin^2 \varphi)^{\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta \partial\theta \partial\varphi. \tag{34}$$

Правые части выражений (31), (33) представляют собой нелинейные зависимости от сжимающих напряжений $\sigma_{11}^0$, $\sigma_{22}^0$. Влияние трещинообразования в докритическом состоянии на критическое значение давления можно оценить путем сравнения относительных толщин оболочек для заданной последовательности критических значений напряжений:

$$\frac{h}{R} = \sqrt[3]{\left( \frac{9\sigma_{22}^0}{\sqrt{6}\pi E_0} \frac{L}{R} \sqrt[4]{\frac{\bar{A}_3}{a_3^3}} \right)^2}. \tag{35}$$

Расчеты проводились для оболочек из материала, имеющего такие характеристики:

$$E_0 = 4{,}2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \ \nu_0 = 0{,}2; \ \langle \sigma \rangle = 1{,}9 \cdot 10^9 \text{ Па}; \ D = 0{,}672 \cdot 10^9 \text{ Па}; \ f = 0{,}2. \tag{36}$$

При этом получены следующие значения параметров: $\alpha = 2; \sigma_c = 2{,}8 \cdot 10^9$ Па;

$$\varepsilon = \frac{1}{15}\left( \frac{3(\sigma_{11}^0)^2 + 2\sigma_{11}^0 \sigma_{22}^0 + 3(\sigma_{22}^0)^2}{\sigma_c^2} \right)^2 \tag{37}$$

и коэффициентов

$$a_3 = \frac{E}{(1-\nu^2)E_0} \frac{1 + (\alpha_{11} - \nu \alpha_{22}) \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{11}^0}}{1 + \alpha_{11} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{11}^0} + \alpha_{22} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_{22}^0}};$$

$$\overline{A}_3 = \frac{E_0}{E} + \frac{8E_0 \sigma_{11}^0 (\sigma_{11}^0 - \nu \sigma_{22}^0)}{15\sigma_c^2} \left( \frac{a_{11}'}{\varepsilon} \right), \tag{38}$$

где $\sigma_{11}^0$, $\sigma_{22}^0$ определяются выражениями (33), а параметры $E$, $\nu$ – по формулам (8).

Результаты расчетов для оболочки с относительной длиной $L/R = 4$ представлены в таблице, где индексами $n$ и $y$ обозначены относительные толщины, полученные соответственно с учетом и без учета поврежденности материала.

**Зависимость критических напряжений в цилиндрической оболочке от относительной толщины с учетом $(h/R)_n$ и без учета $(h/R)_y$ поврежденности материала**

| $\sigma_{22}^0/10^9$, Па | $\varepsilon \cdot 10$ | $(h/R)_n \cdot 10$ | $(h/R)_y \cdot 10$ |
|---|---|---|---|
| 0,280 | 0,032 | 0,209 | 0,208 |
| 0,560 | 0,127 | 0,334 | 0,332 |
| 0,840 | 0,165 | 0,439 | 0,435 |
| 1,120 | 0,285 | 0,537 | 0,527 |
| 1,400 | 0,507 | 0,629 | 0,612 |
| 1,680 | 0,792 | 0,719 | 0,691 |
| 1,960 | 1,140 | 0,807 | 0,765 |
| 2,240 | 2,026 | 0,986 | 0,837 |
| 2,520 | 2,565 | 1,297 | 0,905 |

## Резюме

Виконано постановку та розв'язок задач про біфуркаційну стійкість циліндричних оболонок з урахуванням пошкодженості матеріалу в докритичному напруженому стані. Пошкодженість матеріалу зумовлена неоднорідністю його мікроміцності і моделюється системою плоских еліптичних та кругових тріщин, що статистично однорідно ізотропно розподілені по об'єму оболонки. Математична постановка задачі здійснена в рамках гіпотез Кірх-

гоффа–Лява з використанням концепції продовжуючого навантаження. Побудовано розв'язок задачі про стійкість при всебічному стисненні оболонки.

1. *Бабич Д. В.* Приближенный учет поврежденности материала в задачах о равновесии упругих оболочек // Пробл. прочности. – 1996. – № 3. – С. 20 – 30.
2. *Babich D. V.* Study of the stability of composite sells with allowance for the cracked state of components of the material // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, No. 11. – P. 1123 – 1131.
3. *Khoroshun L. P.* Principles of the micromechanics of material damage. 1. Short-term damage // Ibid. – 1998. – **34**, No. 10. – P. 1035 – 1041.
4. *Khoroshun L. P. and Shikula E. N.* Micromechanics of short-term damage of laminated-fibrous composites // Ibid. – 2001. – **37**, No. 5. – P. 1171 – 1177.
5. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 879 с.
6. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149 – 158.
7. *Болотин В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
8. *Германович Л. Н., Дыскин А. В.* Модель разрушения хрупкого материала с трещинами при одноосном нагружении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 2. – С. 118 – 131.
9. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
10. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. – М.: Наука, 1972. – 192 с.

Поступила 06. 11. 2002