

УДК 532.465

МОДЕЛЮВАННЯ РІЗНОМАСШТАБНИХ ПРОЦЕСІВ У ВОДОЙМАХ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Р. БЕЖЕНАР,* В. МАДЕРИЧ**

*Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, Київ,

** Department of Environmental Science, Hankuk University of Foreign Studies,
Yongin Shi, Kyoungki Do, Korea

Одержано 26.04.2007

Алгоритм двостороннього вкладення застосовано до чисельного моделювання різномасштабних процесів на криволінійній ортогональній сітці на прикладі розповсюдження тепла у водоймі складної форми. Співставлені результати розрахунків на трьох різних сітках: прямокутній, криволінійній і криволінійній з вкладеною областю поблизу джерела теплового забруднення. Показано, що використання алгоритму двостороннього вкладення дозволяє краще описати процеси поблизу джерела теплового забруднення при помірному об'ємі розрахунків.

Алгоритм двостороннього вложення применен к численному моделированию разномасштабных процессов на криволинейной ортогональной сетке на примере распространения тепла в водоеме сложной формы. Сопоставлены результаты расчетов на трех разных сетках: прямоугольной, криволинейной и криволинейной с вложенной областью вблизи источника теплового загрязнения. Показано, что использование алгоритма двостороннего вложення позволяет лучше описать процессы вблизи источника теплового загрязнения при умеренном объеме расчетов.

The algorithm of two-way nesting was applied for numerical modelling of multi-scale processes on the curvilinear orthogonal grid in the problem of heat dispersion in the water body of complicate shape. The results of calculations on three different grids: rectangular, curvilinear and curvilinear with nested area around the source of heat pollution, were compared. It was concluded that using algorithm of two-ways nesting allow us to describe the processes around the source of heat pollution with high resolution for moderate amount of calculations.

ВСТУП

В багатьох проблемах гідродинаміки оточуючого середовища необхідно одночасне моделювання процесів різного масштабу, які протікають в областях складної форми. Наприклад, моделювання процесів теплового забруднення водойм охолоджувальними системами електростанцій та інших промислових об'єктів повинно включати моделювання процесів як в ближній, так і в дальній зонах по відношенню до джерела теплового забруднення. В ближній зоні надходження води з охолоджувальної системи формує плавучий струмінь, який взаємодіє з течіями у водоймі (річці, водосховищі або прибережній зоні моря). Таким чином, чим точніше змодельовані процеси в ближній зоні, тим менша помилка при моделюванні дальньої зони.

Точність чисельного моделювання з використанням кінцево-різницевих методів залежить від роздільної здатності сітки та порядку апроксимації членів диференціальних рівнянь. Є кілька способів покращити роздільну здатність сітки:

1. Згущення всієї області при використанні рівномірної прямокутної ортогональної сітки, на якій відносно легко будувати чисельні схеми високого порядку. Очевидним недоліком є неприйнятне збільшення об'єму та часу розрахунків.

2. Згущення області у ближній зоні при вико-

ристанні криволінійної ортогональної нерівномірної сітки. За рахунок зменшення загальної кількості розрахункових комірок, у порівнянні з попереднім випадком, зменшується час розрахунку. Але, як правило, розрахункова область при моделюванні процесів у природному басейні має складну геометрію, що накладає обмеження на можливість згущення. При використанні явних схем часовий крок у всій розрахунковій області визначається мінімальним просторовим кроком. При використанні неявних схем виникає проблема апроксимації нелінійних адвективних членів у зоні згущення в рівняннях імпульсу та переносу скалярів, які звичайно розраховуються на попередньому кроці.

3. Використання неструктурованих сіток у методах скінчених об'ємів дозволяє поряд з можливістю описання басейнів складної форми проводити бажане згущення в ближній зоні. Але при використанні явних схем залишається обмеження на часовий крок, як і проблема апроксимації нелінійних адвективних членів при використанні неявних схем.

4. Використання вкладеної більш детальної сітки з двосторонньою взаємодією між областю, що покрита вкладеною сіткою, та рештою розрахункової області забезпечує точність у ближній зоні, покритій вкладеною областю, та зменшує обсяг розрахунків в основній області. Вказаний підхід

може бути використаний як на структурованих, так і на неструктурованих сітках. Труднощі в такому підході пов'язані з описом взаємодії процесів на грубій та детальній сітках.

Для моделювання процесів циркуляції та переносу домішок у різних водоймах була розроблена тривимірна модель турбулентних стратифікованих течій з вільною поверхнею THREEETOX [1], в якій рівняння гідродинаміки в наближеннях Бусінеска та гідростатики були доповнені рівняннями переносу тепла, солі, рівняннями стану та рівняннями $k-\epsilon$ моделі турбулентності. Чисельні розрахунки в моделі велись з використанням подвійної сигма-системи координат у вертикальному напрямку та рівномірної декартової сітки по горизонталі. В даній роботі наведено узагальнення чисельної реалізації моделі, пов'язане з використанням ортогональної криволінійної системи координат, схеми адвекції другого порядку та вкладеної сітки. За останні роки було розроблено декілька чисельних алгоритмів двосторонньої взаємодії грубої та детальної сіток [2–6]. Ми взяли за основу підхід [2, 4, 6], сумісний з методом розщеплення задачі на внутрішню і зовнішню моди [8], який використовується в моделі THREEETOX. Наведено також приклад застосування моделі в криволінійній системі координат з вкладеною областю для моделювання дисперсії води з системи охолодження електростанції на річці Амер (Нідерланди).

1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

В наближенні Бусінеска та гідростатики система усереднених по Рейнольдсу рівнянь нерозривності, руху і переносу тепла та солі в криволінійній ортогональній по горизонталі і σ -системі координат по вертикалі має вигляд:

$$\frac{1}{h_y} \frac{\partial(Duh_y)}{\partial x} + \frac{1}{h_x} \frac{\partial(Dvh_x)}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial\sigma} + \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(uD)}{\partial t} + \frac{1}{h_y} \frac{\partial(u^2Dh_y)}{\partial x} + \frac{1}{h_x} \frac{\partial(uvDh_x)}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial(u\omega)}{\partial\sigma} - (f + \tilde{f}_u)vD + gD \frac{\partial\eta}{\partial x} + \\ & + \frac{gD^2}{\rho_0} \int_{\sigma}^0 \left(\frac{\partial\rho'}{\partial x} - \frac{\sigma'}{D} \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial\rho'}{\partial\sigma'} \right) d\sigma' = \\ & = \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{K_M}{D} \frac{\partial u}{\partial\sigma} \right) + F_x, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(vD)}{\partial t} + \frac{1}{h_y} \frac{\partial(uvDh_y)}{\partial x} + \frac{1}{h_x} \frac{\partial(v^2Dh_x)}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial(v\omega)}{\partial\sigma} + (f + \tilde{f}_v)uD + gD \frac{\partial\eta}{\partial y} + \\ & + \frac{gD^2}{\rho_0} \int_{\sigma}^0 \left(\frac{\partial\rho'}{\partial y} - \frac{\sigma'}{D} \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial\rho'}{\partial\sigma'} \right) d\sigma' = \\ & = \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{K_M}{D} \frac{\partial v}{\partial\sigma} \right) + F_y, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(TD)}{\partial t} + \frac{1}{h_y} \frac{\partial(TuDh_y)}{\partial x} + \frac{1}{h_x} \frac{\partial(TvDh_x)}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial(T\omega)}{\partial\sigma} = \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{K_H}{D} \frac{\partial T}{\partial\sigma} \right) + F_T - \frac{\partial R}{\partial\sigma}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(SD)}{\partial t} + \frac{1}{h_y} \frac{\partial(SuDh_y)}{\partial x} + \frac{1}{h_x} \frac{\partial(SvDh_x)}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial(S\omega)}{\partial\sigma} = \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{K_H}{D} \frac{\partial S}{\partial\sigma} \right) + F_S, \quad (5) \end{aligned}$$

де $D = \eta - H$ – повна глибина; η – відхилення вільної поверхні; H – відстань до дна від незбуреної поверхні води; t – час; (u, v, ω) – компоненти швидкості в x , y , і σ напрямках відповідно; σ – координата, яка пов'язана з направленою вгору вертикальною координатою z співвідношенням

$$\sigma = \frac{z - H}{\eta - H}; \quad (6)$$

T – температура; S – солоність; g – прискорення вільного падіння; ρ – густина води; ρ_0 – густина води в незбуреному стані; K_M , K_H – коефіцієнти вертикальної турбулентної в'язкості і дифузії, відповідно; F_x , F_y , F_T , F_S – доданки, що описують горизонтальну в'язкість і дифузію, відповідно; R – доданок, що описує потік короткохвильової радіації; h_x , h_y – метричні коефіцієнти; f – параметр Коріоліса; \tilde{f}_u , \tilde{f}_v – криволінійні члени, які мають вигляд

$$\tilde{f}_u = \frac{v}{h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} + \frac{u}{h_x} \frac{\partial h_x}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\tilde{f}_v = \frac{u}{h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} + \frac{v}{h_x} \frac{\partial h_x}{\partial y}. \quad (8)$$

Для опису турбулентності використовується $k-\epsilon$ модель, яка детально описана в [1]. В якості граничних умов для дна використовуються умови прилипання та відсутності потоків скалярних

величин. На вільній поверхні задаються дотичні напруження, які виникають за рахунок вітру, а також потоки тепла розраховані в залежності від температури повітря, вологості, хмарності, атмосферного тиску та кута падіння сонячних променів. На відкритих границях від граничних умов залежить від напрямку потоків через границю [1].

2. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Для дискретизації рівнянь використовується метод кінцевих об'ємів, який забезпечує збереження маси, на рознесеній сітці С-типу, де значення компонент швидкостей задаються в центрі бокових граней комірки, на верхній і нижній гранях визначаються також значення коефіцієнтів вертикальної в'язкості і дифузії, а значення решти скалярних компонентів задаються в центрі комірки. Для дискретизації конвективних членів у рівняннях руху використовується схема першого порядку точності по просторових координатах. Для дискретизації адвективних членів у рівняннях переносу скалярів використовується модифікована [9] TVD-схема Ван Леера [10]. Для прикладу запишемо компоненту на вісь x адвективного члена у рівнянні переносу температури (4) у вигляді:

$$\frac{1}{h_y} \frac{\partial(Tu Dh_y)}{\partial x} = \quad (9)$$

$$= \frac{1}{\Delta y_{i,j} \Delta x_{i,j}} (FLUX_{i+1} - FLUX_i),$$

де $FLUX$ – залежна від часу величина переносу температури через одну з граней розрахункової комірки в напрямі "проти потоку", яка записана у вигляді

$$FLUX_i = u_{i,j} D_{i,j} \Delta y_{i,j} \times \left(T_{i-1,j} + \frac{\Delta T_{i-1,j}}{2} (1 - C_{i,j}^-) \right) \quad (10)$$

для $u_{i,j} \geq 0$, та

$$FLUX_i = u_{i,j} D_{i,j} \Delta y_{i,j} \times \left(T_{i,j} - \frac{\Delta T_{i,j}}{2} (1 + C_{i,j}^+) \right) \quad (11)$$

для $u_{i,j} < 0$, де

$$C_{i,j}^- = \frac{u_{i,j} \Delta t}{\Delta x_{i-1,j}}, \quad C_{i,j}^+ = \frac{u_{i,j} \Delta t}{\Delta x_{i,j}}. \quad (12)$$

Тут $\Delta T_{i,j}$ є різниця між значеннями температури на правій і лівій гранях комірки. При $\Delta T_{i,j} = 0$ для всіх значень i та j отримуємо схему першого порядку "проти потоку". В моделі ТРИТОКС

використовується схема другого порядку точності з обмеженнями, які забезпечують монотонність і позитивну означеність схеми [9]:

$$\Delta T_{i,j} = \text{sign}([\Delta T_{i,j}]_{aver}) \times \quad (13)$$

$$\times \min(|[\Delta T_{i,j}]_{aver}|, 2(T_{i,j} - T_{i,j}^{\min}), 2(T_{i,j}^{\max} - T_{i,j})).$$

Тут

$$T_{i,j}^{\min} = \min(T_{i-1,j}, T_{i,j}, T_{i+1,j}), \quad (14)$$

$$T_{i,j}^{\max} = \max(T_{i-1,j}, T_{i,j}, T_{i+1,j}), \quad (15)$$

$$[\Delta T_{i,j}]_{aver} = \frac{\delta T_{i,j} + \delta T_{i+1,j}}{2} \quad (16)$$

де

$$\delta T_{i,j} = T_{i,j} - T_{i-1,j}. \quad (17)$$

Відхилення вільної поверхні η та усереднені по глибині швидкості U і V розраховуються з усереднених по глибині рівнянь нерозривності та руху. Оскільки фазові швидкості поверхневих гравітаційних хвиль значно більші, ніж швидкості внутрішніх хвиль, у роботі застосовувався метод розщеплення задачі на внутрішню і зовнішню моди [8]. Розрахунки двовимірної зовнішньої моди (U, V, η) велись з використанням явної схеми другого порядку з часовим кроком Δt_e . Розрахунок тривимірної системи рівнянь для полів швидкості (u, v, w) та скалярів (T, S, k, ϵ) проводиться з використанням схеми другого порядку з більшим часовим кроком $\Delta t_i = N \Delta t_e$, де N є цілим, але члени з вертикальною в'язкістю та дифузиею розраховуються за неявною схемою.

3. АЛГОРИТМ ДВОСТОРОННЬОГО ВКЛАДЕННЯ

Розглянемо сумісний з методом розщеплення задачі на внутрішню і зовнішню моди алгоритм двостороннього вкладення на криволінійній сітці. Відношення просторових кроків на грубій сітці ($\Delta x_c, \Delta y_c$) до просторових кроків на детальній сітці ($\Delta x_f, \Delta y_f$) є порядком вкладення M :

$$\frac{\Delta x_c}{\Delta x_f} = \frac{\Delta y_c}{\Delta y_f} = M. \quad (18)$$

В моделі використовується рекомендований [2] порядок вкладення $M = 3$. Схема двостороннього вкладення на криволінійній сітці наведена на рис. 1. Для виконання законів збереження при обміні

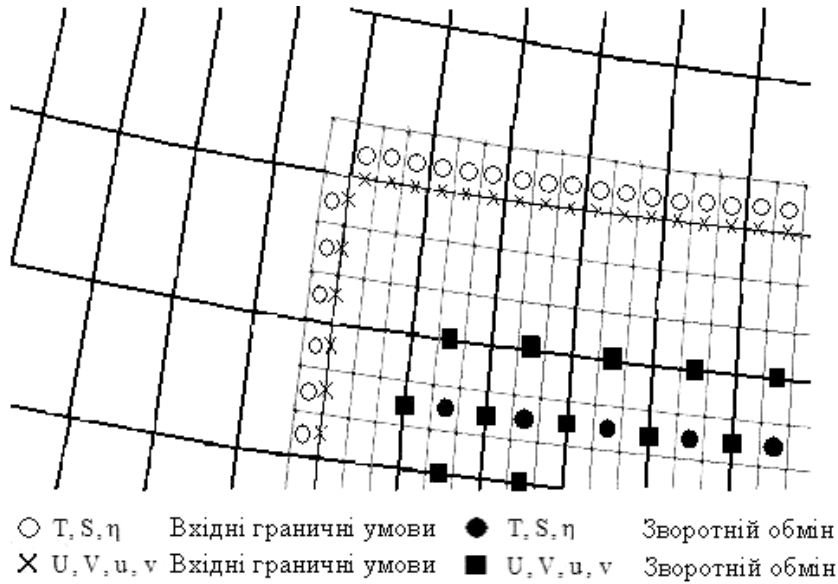


Рис. 1. Метод вкладення для порядку вкладення $M = 3$

масою, імпульсом та іншими величинами між сітками проводилась корекція рельєфу дна на грубій сітці в області перекриття сіток за виключенням комірок на границі. З метою досягнення рівності суми $M \times M$ об'ємів на детальній сітці відповідному об'єму на грубій сітці корекція проводилась згідно з формулою

$$H_c^{New} = H_c + \frac{\sum_{i,j}^{M \times M} H_{ij}^f S_{ij}^f - H_c S_c}{S_c}, \quad (19)$$

де H_c і H^f – глибини відносно незбуреної поверхні на грубій і детальній сітках відповідно; H_c^{New} – глибина на грубій сітці після корекції; S_c і S^f – площа розрахункової комірки на грубій і детальній сітках відповідно. Рельєф дна в граничних комірках детальної сітки отримувався лінійною інтерполяцією з грубої сітки.

Співвідношення між часовими кроками на грубій сітці ($\Delta t_{ce}, \Delta t_{ci}$) та на детальній сітці ($\Delta t_{fe}, \Delta t_{fi}$) повинно бути рівним порядку вкладення M :

$$\frac{\Delta t_{ce}}{\Delta t_{fe}} = \frac{\Delta t_{ci}}{\Delta t_{fi}} = M. \quad (20)$$

Приведемо короткий опис операцій в межах одного часового кроку Δt_{ci} . Наступний (чи попередній) часовий крок аналогічний до описаного. Спочатку робиться крок по часу на грубій сітці $\Delta t_{ci} = N \Delta t_{ce}$, що дає можливість отримати значення всіх величин в моменти часу t_n і t_{n+1} . Потім – три кроки по часу $\Delta t_{fi} = N \Delta t_{fe}$ на детальній

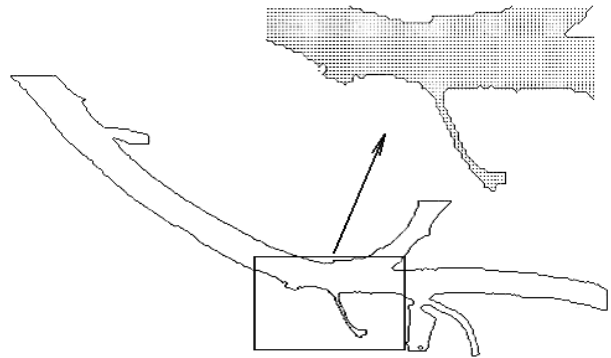


Рис. 2. Розрахункові вузли прямокутної сітки

сітці. При цьому на кожному кроці потрібно мати граничні умови для детальної сітки. Їх можна взяти з грубої сітки, використовуючи часову і просторову інтерполяцію. В даній роботі була використана лінійна інтерполяція. Після трьох кроків відбувається зворотній обмін (розраховані величини повертаються з детальної на грубу сітку). Причому для недопущення передачі чисельних шумів, які генеруються біля границі області вкладення на детальній сітці через відмінність просторового кроку на обох сітках [2], у граничній полосі передача не здійснюється (див. рис. 1) на відміну від [4, 6].

Кожній величині на грубій сітці в області, де груба і детальна сітки перекриваються, присвоюється нове значення, яке є усередненим з детальної сітки в процесі зворотнього зв'язку. Всього є $M \times M$ комірок детальної сітки в межах однієї

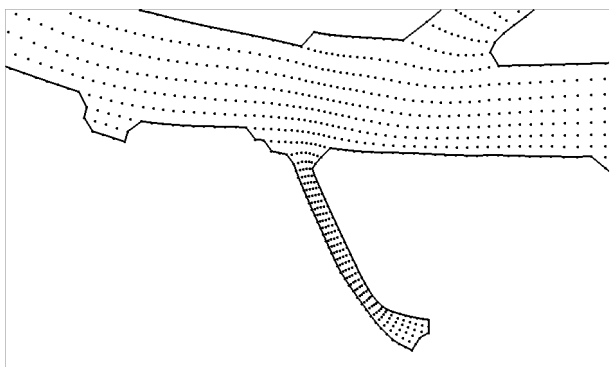


Рис. 3. Розрахункові вузли криволінійної сітки

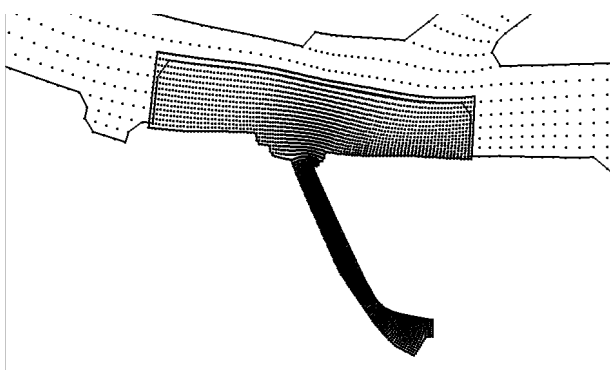


Рис. 4. Розрахункові вузли криволінійної сітки з вкладеною областю (подвійною лінією показана границя між грубою і детальною сітками)

комірки грубої сітки. Значення, яке присвоюється величині на грубій сітці, є усередненим значенням по $M \times M$ величинах на вкладеній сітці з врахуванням об'ємів комірок згідно рівняння

$$(X^c)^{New} = \frac{\sum_{i,j}^{M \times M} V_{ij} X_{ij}^f}{\sum_{i,j}^{M \times M} V_{ij}}, \quad (21)$$

де X_c – значення, яке присвоюється величині на грубій сітці; X_f – відповідне значення на детальній сітці; V_{ij} – об'єм комірки на детальній сітці. Такий спосіб передачі забезпечує збереження величини, яка передається.

4. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

Для розрахунку була використана ділянка річки Амер (Голландія) в районі теплової електростанції (див. рис. 2). В даній водоймі є три відкриті границі. В розрахунках на правій і верхній границях задавалися витрати води, а на лівій грани-

ці – рівень вільної поверхні. Задання на одній з відкритих границь граничною умовою рівня вільної поверхні регулює загальний рівень води в водоймі. Граничні умови для температури на відкритих границях були задані згідно з даними вимірів, проведеними на ділянці річки, де вже немає впливу гарячої води з системи охолодження електростанції. Вода з системи охолодження електростанції потрапляє в канал з заданою витратою та температурою. Було проведено три розрахунки:

1) на прямокутній сітці з роздільною здатністю 20 м (рис. 2);

2) на криволінійній сітці з роздільною здатністю 20 м поблизу витоку гарячої води і 100 м у віддалених областях (рис. 3);

3) на криволінійній сітці з вкладенням (груба криволінійна сітка така сама, як на (рис. 3), 3-кратне вкладення в районі витоку) (рис. 4).

У першому випадку кількість розрахункових точок дорівнювала 9000, у другому – 1700, у третьому – 1700 на грубій сітці і 3800 на детальній сітці. Час розрахунку на криволінійній сітці був в 5 разів менший порівняно з першим випадком, тоді як на криволінійній сітці з вкладенням цей час в 2 рази більший порівняно з першим випадком, за рахунок детального опису ближньої зони. Але цей час може бути значно скорочено, якщо проводити розрахунки в два етапи: на першому етапі розраховуються процеси дисперсії на грубій сітці, а на другому – розрахунок продовжується з вкладеною сіткою і початковими полями, що розраховані на першому етапі.

На рис. 5–7 зображена поверхнева температура та вертикальний профіль температури в один і той же момент часу для трьох випадків відповідно. Видно, що чим детальніша сітка, тим менше розповзається пляма теплої води за рахунок зменшення підсіткової дифузії. Аналіз результатів розрахунку показує, що у випадку більш детальної сітки, особливо добре це видно на вкладеній області (у 3-му випадку), тепла вода більш рівномірно розподіляється по глибині, крім того, всередині каналу вода дещо тепліша. Треба відмітити відсутність збурень на границі вкладеної і грубої сіток, що підтверджує ефективність застосованого алгоритму, навіть без додаткового зглажування, використаного в [2, 4, 6].

ВИСНОВКИ

Впроваджені в модель THREETOX схема адвекції високого порядку та алгоритм двостороннього вкладення застосовано до чисельного моделювання різномасштабних процесів на криволіній-

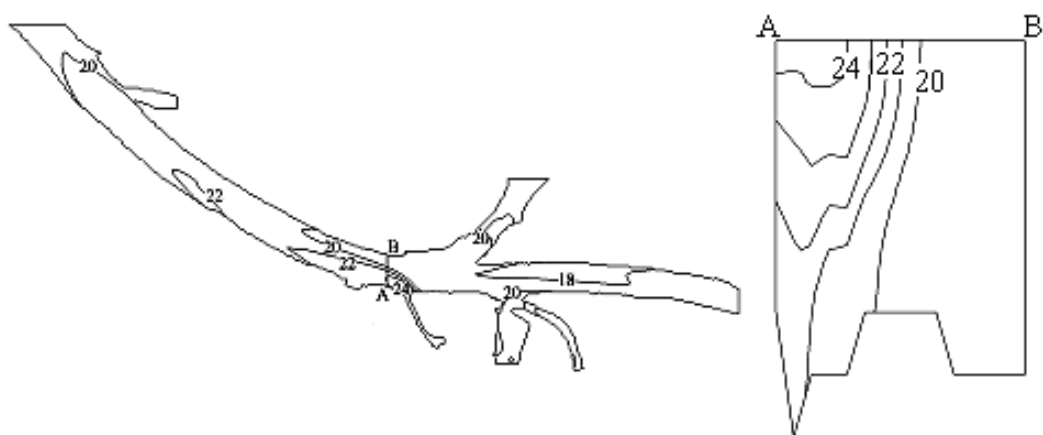


Рис. 5. Ізолінії поверхневої температури та вертикальний профіль по перерізу АВ для прямокутної сітки

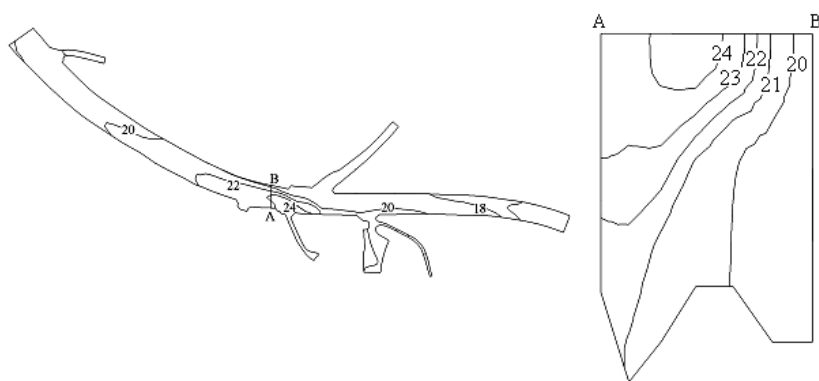


Рис. 6. Ізолінії поверхневої температури та вертикальний профіль по перерізу АВ для криволінійної сітки

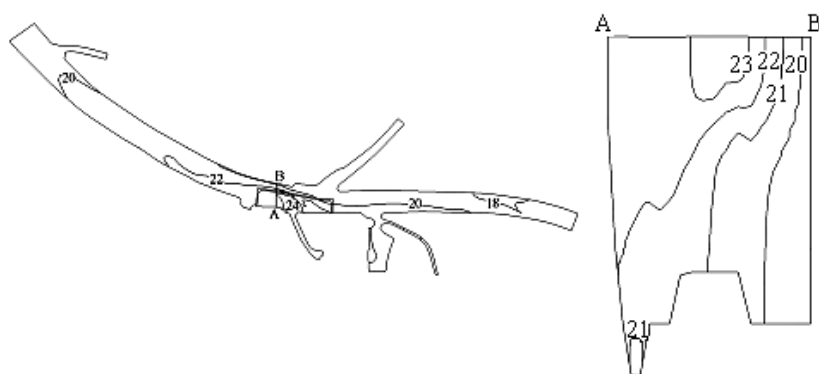


Рис. 7. Ізолінії поверхневої температури та вертикальний профіль по перерізу АВ для криволінійної сітки з вкладеною областю

ній ортогональній сітці на прикладі розповсюдження тепла у водоймі складної форми. Співставлені результати розрахунків на трьох різних сітках: прямокутній, криволінійній і криволінійній з вкладеною областю поблизу джерела теплового забруднення. Показано, що використання алгоритму двостороннього вкладення дозволяє краще описати процеси поблизу джерела теплового забруднення при помірному об'ємі розрахунків.

Використовувати механізм вкладення можна як для моделювання деякої області з високою роздільною здатністю, наприклад в ближній зоні біля джерела забруднення, так і при необхідності моделювання дуже великої області зі значно меншою внутрішньою областю, в моделюванні якої, власне, ми зацікавлені. Прикладом може слугувати річковий естуарій, течії в якому залежать від процесів у відносно великій зоні шельфу.

This work was supported by Hankuk University of Foreign Studies Research Fund of 2007.

1. Кошебуцкий В., Мадерич В., Нестеров А., Хелинг Р. Моделирование распространения тепла во внутренних водах и прибрежных областях морей // Прикладная гидромеханика.– 2004.– 6.– С. 205-230.
2. Zhang, D. L., H. R. Chang, N. L. Seaman, T. T. Warner, J. M. Fritsch A two-way interactive nesting

procedure with variable terrain resolution // Mon. Wea. Rev.– 1986.– 114.– P. 1330-1339.

3. Spall M. A., Holland W. R. A nested primitive equation model for oceanic applications // J. Phys. Oceanogr.– 1991.– 21.– P. 205-220.
4. Oey L. -Y., Chen P. A nested-grid model: with application to the simulation of meanders and eddies in the Norwegian coastal current // J. Geophys. Res.– 1992.– 97.– P. 20063-20086.
5. Fox A.D., Maskell S.J. Two-way interactive nesting of primitive equation ocean models with topography // J. Phys. Oceanogr.– 1995.– 25.– P. 2977-2996.
6. Miyazawa Y., Minato S. POM and two-way nesting POM study of Kuroshio damping phenomenon caused by a strong wind // Journal of Oceanography.– 2000.– 56.– P. 275-294.
7. Mellor G.L. User's guide for a three-dimensional, primitive equation, numerical ocean model. Program in Atmospheric and Oceanic Sciences.– Princeton NJ: Princeton University, 2003.– 53 p.
8. Blumberg A.F., Mellor G.L. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation models // Three-Dimensional Coastal Ocean Models.– 1987, N. Heaps (ed), Washington, D.C., Am. Geoph. Union.– P. 208.
9. Lin S-J., Chao W.C., Sud Y.C., Walker J.K. A class of the van Leer-type transport schemes and its application to the moisture transport in general circulation model // Monthly Weather Rev.– 1994.– 122.– P. 1575-1593.
10. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V: A second order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys.– 1979.– 32.– P. 101-136.