

УДК 551.511.001: 551.593

## РОЗСІЯННЯ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ НА ДВОВИМІРНІЙ ПЕРЕМІШАНІЙ ЛОКАЛІЗОВАНІЙ ОБЛАСТІ, ЩО ПЕРЕБУВАЄ НА В'ЯЗКІЙ СТАДІЇ СВОЄЇ ЕВОЛЮЦІЇ

О. Г. СТЕЦЕНКО

*Інститут гідромеханіки НАН України, Київ*

*Одержано 15.03.2007*

Розв'язана двовимірна нестационарна задача розсіяння фонові монохроматичної внутрішньої хвилі на повністю перемішаній інтрузійній плямі, яка знаходиться в шарі скінченної товщини лінійно стратифікованої рідини і перебуває на в'язкій стадії своєї еволюції. Використання наближеної апроксимації реальної геометрії плями змінним  $U$  часі прямокутником дозволило одержати розв'язок в аналітичному вигляді. Визначено структуру і характеристики розсіяних внутрішніх хвиль, амплітуди яких мають слабку параметричну залежність від часу. Визначено величину потоку енергії розсіяних хвиль в одиницю часу.

Решена двухмерная нестационарная задача рассеяния фоновой монохроматической внутренней волны на полностью перемешанном интрузионном пятне, находящемся в слое конечной толщины линейно стратифицированной жидкости и пребывающем на вязкой стадии своей эволюции. Использование приближенной аппроксимации реальной геометрии пятна переменным во времени прямоугольником позволило получить решение в аналитическом виде. Определена структура и характеристики рассеянных внутренних волн, амплитуды которых имеют слабую параметрическую зависимость от времени. Определена величина потока энергии рассеянных волн в единицу времени.

A solution is provided to the two-dimensional non-steady problem of scattering the background monochromatic internal wave on a completely mixed intrusion patch located in the finite thickness layer of linear stratified fluid, the said patch being in the viscous stage of its evolution. The use of a close approximation of actual patch geometry with time-dependent rectangle has provided an analytical solution. The structure and characteristics of scattered internal waves, the amplitudes of which have weak time parametric dependency, was determined. An energy flow of scattered waves in a unit of time was determined.

### ВСТУП

Структуротворчі процеси в реальних морях і океанах обумовлені наявністю великого ряду механізмів різної фізичної природи, які визначають динаміку рухів у цих акваторіях і характер їхніх гідрофізичних полів.

Одним із механізмів, які формують структуру цих полів, є взаємодія фонових внутрішніх хвиль (ВХ) з локалізованими перемішаними областями. Такі області, через низку причин, пов'язаних з втратою стійкості руху середовища, постійно генеруються в морському і океанському середовищах, відіграючи там істотну роль у процесах переносу маси і енергії. Еволюція таких зон, які називаються плямами (інтрузіями, інтрузійними плямами) і які в момент утворення турбулізовані за своєю природою, є окремим напрямком вивчення турбулентності в стратифікованих середовищах. Динаміку таких турбулентних областей вивчали в багатьох роботах [1–7]. Детальний аналіз фізики явища, розгляд характерних стадій еволюції цих областей з відповідним аналізом опублікованих робіт зроблено у [8]. Виконані дослідження обмежувались випадками двохшарової та лінійної стратифікації. Самі перемішані області, як правило, мають трьохвимірний характер своєї геометрії. Однак, у

багатьох випадках, наприклад, внаслідок обвалу на фронті нелінійної внутрішньої хвилі, або внаслідок проходження підводного тіла, така область матиме протяжний вигляд, коли один із її характерних горизонтальних розмірів набагато більший від іншого. В цьому випадку можна говорити про область з двовимірною структурою.

Враховуючи важливу роль наявності таких перемішаних плям у структуротворчих процесах верхнього шару океану, дослідження взаємодії фонових внутрішніх хвиль з такими утвореннями представляє безперечний інтерес. Сама задача взаємодії відноситься до так званого класу задач про міжмодові взаємодії; в даному випадку це взаємодія інтрузій (плям) і внутрішніх хвиль. У залежності від співвідношення характерних масштабів руху у внутрішніх хвилях і плямах така взаємодія може бути як взаємною, так і односторонньою.

Дослідження таких процесів є достатньо складною задачею, оскільки воно передбачає одночасний аналіз двох процесів істотно різної природи, які описуються різними системами рівнянь і, в той самий час, взаємодіють між собою, впливаючи на еволюцію один одного. Тому природним є підхід до вивчення спрощеного варіанту такої міжмодової взаємодії, коли розглядаються нетурбулізовані плями. Незважаючи на ряд істотних відмінностей

в характері початкового етапу еволюції турбулізованої плями порівняно з нетурбулізованою, на фінальній стадії її еволюції турбулентні пульсації під дією сил в'язкості вироджуються і об'єм плями практично не змінюється, а профіль густини всередині плями близький до перемішаного. Але це фактично відповідає в'язкій стадії еволюції нетурбулізованої плями відповідного об'єму. Враховуючи те, що ця стадія є найбільш тривалою серед стадій, протягом яких взаємодія плям з фоновими внутрішніми хвилями є найбільш енергетичною, що дуже важливо з точки зору структуротворчих можливостей результатів такої взаємодії, зрозумілим є інтерес до даного класу задач.

Ще у 80-тих роках минулого століття з'явилися роботи по вивченню взаємодії фонових внутрішніх хвиль з локалізованими неоднорідностями поля густини [9–14]. Характерною особливістю цих робіт було припущення замороженості структури локалізованих збурень. Вони приймалися повністю перемішаними з незмінною формою геометрії, що, звичайно, не відповідає дійсності. Структура і енергетика поля розсіяних ВХ у цих роботах практично не проаналізовані. Однак, в даних дослідженнях встановлені такі цікаві факти, як утворення зон концентрації енергії розсіяних хвиль, насичення набігаючої ВХ високочастотними гармоніками та характер впливу її параметрів на кут нахилу зон концентрації розсіяних ВХ. В дослідженнях [15–16] задач взаємодії даного класу вперше врахована реальна динаміка еволюції двовимірної перемішаної плями на її в'язко-дифузійній стадії. В роботі [15] розглянуто випадок взаємодії, коли характерний горизонтальний розмір плями значно менший від довжини ВХ і має місце максимальний вплив хвилі на процес еволюції плями. В цій роботі показано, що навіть у такому випадку взаємодії еволюція плями дуже слабо залежить від присутності набігаючої ВХ. Зміни геометричних розмірів плями вкрай незначні, а має місце періодичне (з періодом ВХ) незначне перекошення генерованих в околі плями вихорів. Асимптотика затухання збурень всередині плями також не змінюється. Отже, впливом фонових ВХ на еволюцію плями можна знехтувати в силу малості градієнтів полів швидкості і тиску в полі хвиль. Тому задачу динаміки еволюції перемішаної плями можна розглядати в умовах нерухомого навколишнього середовища, яке, враховуючи співвідношення між характерними горизонтальним  $l_H$  і вертикальним  $l_V$  розмірами плями

$$l_V \ll l_H,$$

можна приймати лінійно стратифікованим з гра-

дієнтом профілю густини, відповідним горизонту центра плями. Поле розсіяних внутрішніх хвиль, як результат взаємодії фонові ВХ з двовимірною плямою, що перебуває на в'язко-дифузійній стадії своєї еволюції, тобто має змінну в часі структуру і геометрію області, вперше одержано в [16]. В цій роботі структура середовища всередині плями і його гідродинамічні характеристики визначалися у результаті розв'язання нелінійної системи рівнянь руху рідини в частинних похідних з врахуванням процесів молекулярної дифузії. Така модель є достатньо складною для знаходження та аналізу розв'язку задачі. У виконаних дослідженнях одержано лише нульове наближення розв'язку, в якому час використовується в якості параметра, що не дозволяє оцінити вплив нестационарності процесу еволюції плями на поле розсіяних внутрішніх хвиль. Не проаналізована також енергетика поля розсіяних ВХ.

Таким чином, у проблемі вивчення розсіяних на інтрузійних плямах внутрішніх хвиль залишається низка невирішених питань, головними з яких є врахування реальної нестационарності такого роду задач, обумовлених як еволюцією динаміки розтікання плями, так і формуванням у часі області розсіяних внутрішніх хвиль, а також дослідження впливу на структуру і енергетику поля розсіяних ВХ характеристик плями і фонових ВХ.

У даній роботі розглядається задача розсіяння фонових внутрішніх хвиль на двовимірній нетурбулізованій, повністю перемішаній плямі (густина середовища всередині плями стала і дорівнює густині навколишнього середовища на горизонті центра плями), яка перебуває на в'язкій стадії своєї еволюції. Ця стадія еволюції плями вивчена в роботах [17, 18]. Використання результатів цих досліджень дозволяє розробити просту інтегральну модель, яка описує процес формування і поширення поля розсіяних внутрішніх хвиль на такого роду перемішаних областях для даного етапу їхньої еволюції. Цей етап відбувається протягом тривалого періоду і відповідає найбільшій інтенсивності розсіяння фонових внутрішніх хвиль. У виконаних тут дослідженнях розглянуто однократне розсіяння монохроматичної фонові внутрішньої хвилі на плямі, яка знаходиться в шарі скінченої товщини лінійно стратифікованої рідини. Для такого середовища має місце точний розв'язок задачі про структуру лінійної набігаючої ВХ. Приймається, що хвильовий вектор фонові ВХ перпендикулярний вісі двовимірної перемішаної плями.

## 1. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Як і у роботі [16], використовується система рівнянь у наближенні Бусинеска, яка описує рух середовища в області взаємодії фонові внутрішньої хвилі з двовимірною ентрузійною областю. Застосовується представлення для збурених компонент горизонтальної  $u(x, z, t)$  і вертикальної  $w(x, z, t)$  складових швидкості, тиску  $p(x, z, t)$  і плавучості  $b(x, z, t) = -g(\rho - \rho_c)/\rho_0$ , де  $\rho(x, z, t)$  – густина середовища;  $\rho_c$  – незбурена густина середовища, яка є функцією координати  $z$ , а  $\rho_0$  – деяке характерне значення густини середовища, у вигляді

$$u(x, z, t) = u_i(x, z, t) + u_0(x, z, t) + u_1(x, z, t),$$

$$w(x, z, t) = w_i(x, z, t) + w_0(x, z, t) + w_1(x, z, t),$$

$$p(x, z, t) = p_i(x, z, t) + p_0(x, z, t) + p_1(x, z, t),$$

$$b(x, z, t) = b_i(x, z, t) + b_0(x, z, t) + b_1(x, z, t).$$

Тут індекс “ $i$ ” відноситься до складової від інтрузійного процесу розтікання плями, а індекси “0” та “1” відповідно до набігаючої та розсіяних хвиль. У результаті можна одержати таку систему рівнянь, яка описує поле розсіяних внутрішніх хвиль:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} - b_1 = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial t} + N^2 w_1 = 0, \quad (4)$$

де  $N^2(z) = \partial b/\partial z$  – розподіл квадрату частоти В'яйсяля-Брента у незбуреному середовищі.

Переходячи до безрозмірних величин, використовуючи для цього в якості лінійного масштабу величину  $H$  – товщину шару середовища та масштабів часу –  $N_*^{-1}$ , де  $N_*$  – деяке характерне значення  $N(z)$ , тиску –  $\rho_0 H^2 N_*^2$  і плавучості –  $H N_*^2$ , систему (1)–(4) можна звести до одного рівняння відносно вертикальної складової швидкості:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) + N^2(z) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \\ = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( u_0 \frac{\partial b_i}{\partial x} + w_0 \frac{\partial b_i}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (5) повинен задовольняти граничним умовам, які з використанням на

вільній поверхні наближення “твердої кришки” набувають вигляду

$$w_1 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{і} \quad z = -1, \quad (6)$$

та початковим умовам

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (7)$$

Складові рівняння (8) з  $b_i$  задаються із розв'язку інтрузійної задачі для лінійно стратифікованого середовища з градієнтом густини, відповідним горизонту розміщення центра плями.

## 2. НАБЛИЖЕНА МОДЕЛЬ ЕВОЛЮЦІЇ ДВОВИМІРНОЇ ПЕРЕМІШАНОЇ ПЛЯМИ НА ЇЇ В'ЯЗКІЙ СТАДІЇ

Після утворення перемішаної нетурбулізованої локалізованої області вона проходить чотири характерні стадії еволюції: 1) початкова, коли сили плавучості домінують над всіма іншими; 2) проміжна, коли рух характеризується рівновагою між силами плавучості, інерційними силами і хвильовим опором плями; 3) в'язка, коли має місце рівновага сил в'язкості і плавучості; 4) дифузійно-в'язка, коли разом з силами в'язкості і плавучості ефективними стають і явища дифузії тепла або солі. З результатів дослідження гідродинаміки процесів на відмічених стадіях еволюції плям впливає, що тривалість першого етапу еволюції становить  $3Nt$ , а тривалість другого етапу відноситься до проміжку часу від  $3Nt$  до  $25Nt$ . В кінці проміжної стадії і, отже, на початку в'язкої стадії відповідно до даних експериментальних досліджень характерні значення безрозмірних комплексів  $\delta$  і  $\delta \cdot Re$ , де  $\delta = l_V/L_H$ , а  $Re = u_c l_H/\nu$  ( $u_c$  – горизонтальна швидкість розтікання плями,  $\nu$  – кінематична в'язкість середовища), задовольняють умовам

$$\delta \gg 1 \quad \text{і} \quad \delta \cdot Re = 30 \div 40. \quad (8)$$

В роботі [18] для повністю перемішаної плями (густина всередині плями стала величина, що відповідає значенню густини зовнішнього середовища на горизонті центра плями), яка знаходиться у лінійно стратифікованій рідині, розв'язана задача про характер її еволюції на в'язкій стадії. При цьому використано гідростатичне наближення в системі рівнянь, яка описує рух середовища, і знехтувано горизонтальним обміном імпульсом. За таких умов одержані закономірності зміни геометрії області плями в часі. Якщо  $2h$  і  $2a$  – відповідно вертикальний і горизонтальний розміри плями, то для двовимірної області зміна цих величин

відбувається у відповідності до залежностей

$$a(t) = \zeta_0 \left[ \frac{\kappa S^4}{16} (t - t_1) \right]^{\frac{1}{6}}, \quad (9)$$

$$h(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta_0^2}{15} \right)^{\frac{1}{4}} \left[ \frac{4\kappa}{S^2} (t - t_1) \right]^{-\frac{1}{6}} \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2(t)} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (10)$$

де

$$\zeta_0 = (15)^{\frac{1}{6}} \left[ \frac{2\Gamma(5/4)}{\Gamma(1/2)\Gamma(5/4)} \right]^{\frac{2}{3}}; \quad \kappa = \frac{N^2}{240\nu};$$

$S$  – площа перерізу плями, яка не змінюється в часі;  $\Gamma(k)$  – гамма-функція;  $t_1$  – стала інтегрування, яка вибирається так, щоб розв'язок для геометрії області “зшився” із заданими початковими розмірами перемішаної області. Побудова на підставі виразів (9),(10) залежності  $h$  від  $a$  показує, що  $h$  мало змінюється вздовж плями практично до її краю, про що свідчать експериментальні дослідження [19, 20], в яких також встановлено, що характер течії всередині плями подібний до течії в'язкої рідини між паралельними стінками.

Відмічені особливості геометрії плями та характер руху рідини всередині неї дозволяють істотно спростити розв'язання задачі, замінивши реальну геометрію плями на змінний в часі прямокутник з основою  $2a(t)$ , де  $a(t)$  визначається з (9), та висотою  $2h(t)$ , яка відповідає заданій площі плями:

$$2h(t) = \frac{S}{2a(t)} = \frac{S^{\frac{1}{3}}}{2\zeta_0} \left( \frac{16}{\kappa} \right)^{\frac{1}{6}} (t - t_1)^{-\frac{1}{6}}. \quad (11)$$

Таке представлення виявляється надзвичайно зручним при розв'язанні задачі про розсіяння внутрішньої хвилі. При виборі початкових значень  $a(0)$  і  $h(0)$  необхідно задовольняти співвідношення (8), покладаючи там  $l_V(0) = 2h(0)$ ,  $l_H(0) = 2a(0)$  та умову

$$u_c(0) = \frac{da}{dt}(0).$$

Якщо в якості початкового моменту часу береться значення  $t = 0$ , то співвідношення (9) і (11) необхідно представити у вигляді

$$a(t) = \zeta_0 \left[ \frac{\kappa S^4}{16} (t + t_0) \right]^{\frac{1}{6}}, \quad (12)$$

$$2h(t) = \frac{S}{2h(t)} = \frac{S^{\frac{1}{3}}}{2\zeta_0} \left( \frac{16}{\kappa} \right)^{\frac{1}{6}} (t + t_0)^{-\frac{1}{6}}, \quad (13)$$

де значення  $t_0$  відповідає тій величині  $t - t_1$  у залежностях (9) і (11), яка визначає початкові значення  $a_0$  та  $h_0$  для вибраного моменту початку в'язкого етапу еволюції плями. Як відмічалось раніше, в

реальному процесі розтікання інтрузії  $t_0 \approx 25N^{-1}$ , а в розв'язках (12), (13) ця величина інша, оскільки вона відповідає тому значенню часу, який минув би, якби процес інтрузії з самого початку мав би ті закони еволюції, які відповідають в'язкому етапу.

### 3. ЗАДАЧА РОЗСІЯННЯ ВХ НА ПЛЯМІ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ В ШАРІ СКІНЧЕНОЇ ТОВЩИНИ ЛІНІЙНО СТРАТИФІКОВАНОЇ РІДИНИ

Розглядається двовимірною задачею однократного розсіяння монохроматичної фонові ВХ на перемішаній плямі, що перебуває на в'язкій стадії еволюції і знаходиться у шарі скінченої товщини  $H$  лінійно стратифікованої рідини з  $N = 1$  (оскільки  $N_* = (\beta g)^{1/2}$  (спрощений варіант наближення Бусинеска). Розподіл незбуреної густини в шарі рідини відповідає залежності

$$\rho_s(z) = \rho_0(1 - \beta z),$$

де  $\beta > 0$ . У відповідності з цим, густина середовища всередині плями стала і визначається виразом

$$\rho = \rho_0(1 - \beta z_0),$$

де  $z_0$  – координата горизонту, на якому знаходиться центр плями. Тоді розподіл плавучості всередині області плями  $B(x, z)$  представляється як

$$b_i = -\beta g(z - z_0) \quad \text{для } (x, z) \in B(x, z),$$

або в безрозмірній формі

$$b_i = -(z - z_0) \quad \text{для } (x, z) \in B(x, z). \quad (14)$$

При заміні реальної геометрії області плями  $B(x, z)$  прямокутником зі сторонами  $2a(t)$  і  $2h(t)$ , які визначаються у відповідності з (12) (13), має місце представлення для  $b_i(x, z, t)$  у рівнянні (5):

$$b_i = -(z - z_0) \quad \text{при } -a \leq x \leq a \text{ і } (-h \leq z \leq h) \quad (15)$$

$$b_i = 0 \quad \text{для всіх інших } x, z.$$

Компоненти швидкості набігаючої внутрішньої хвилі  $n$ -ї моди задаються виразами, які відповідають розв'язку лінійної задачі для даної області стратифікованої рідини [21]

$$u_0 = \frac{\pi n A_0 \omega_n}{k} \cos(\pi n z) e^{i(kx - \omega_n t)}, \quad (16)$$

$$w_0 = -i A_0 \omega_n \sin(\pi n z) e^{i(kx - \omega_n t)}, \quad (17)$$

де  $A_0$  – амплітуда набігаючої хвилі, хвильове число  $k$  і частота  $\omega_n$  якої зв’язані дисперсійним співвідношенням [21]

$$\omega_n = \frac{k}{\sqrt{\pi^2 n^2 + k^2}}, \quad k = \frac{\pi n \omega_n}{\sqrt{1 - \omega_n^2}}.$$

Для заданих  $b_i, u_0, w_0$  рівняння (5) набирає вигляду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \omega_n A_0 e^{-i\omega_n t} \times \quad (18)$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ e^{ikx} \left[ -\frac{m}{k} \cos(\pi n z) \frac{\partial b_i}{\partial x} + i \sin(\pi n z) \frac{\partial b_i}{\partial z} \right] \right].$$

Його розв’язок шукається у вигляді

$$w_1 = \bar{w}(x, z, t) e^{-i\omega_n t}, \quad (19)$$

де зміна в часі  $\bar{w}$  обумовлена повільною зміною геометрії плями. Підстановка представлення (19) у (18) дає таке рівняння відносно  $\bar{w}$ :

$$L_t \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = \omega_n A_0 \times \quad (20)$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ e^{ikx} \left[ -\frac{m}{k} \cos(\pi n z) \frac{\partial b_i}{\partial x} + i \sin(\pi n z) \frac{\partial b_i}{\partial z} \right] \right],$$

де

$$L_t = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2i\omega_n \frac{\partial}{\partial t} - \omega_n^2 \right).$$

Граничні та початкові умови для  $\bar{w}(x, z, t)$  співпадають відповідно з умовами (6) та (7) для  $w_1$ .

Розв’язок для  $\bar{w}(x, z, t)$  знаходиться у вигляді розкладу його в ряд по власним функціям відповідної лінійної хвильової задачі

$$\bar{w}(x, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m z) \cdot \Phi_m(x, t). \quad (21)$$

Підставляючи представлення (21) і (14) у рівняння (20), потім домноживши всі його складові на  $\sin(\pi m z)$  і виконавши інтегрування поперек шару рідини по  $z$  від -1 до 0 та враховуючи, що

$$\int_{-1}^0 \sin(\pi m z) \sin(\pi n z) dz = \frac{1}{2} \quad \text{при } m = n$$

і дорівнює 0 при  $m \neq n$ , можна одержати рівняння відносно  $\Phi_m$ :

$$L_t \left( \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} - \pi^2 m^2 \Phi_m \right) + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} = e^{ikx} F_m, \quad (22)$$

де величину  $F_m$  можна представити з допомогою одиничних функцій Хевісайда  $H(x)$  як

$$F_m = i A_0 \omega_n k^2 G \cdot [H(x+a) - H(x-a)].$$

Тут

$$G = \frac{\{\sin[\pi(m-n)(z_0+h)] - \sin[\pi(m-n)(z_0-h)]\}}{\pi(m-n)} - \frac{\{\sin[\pi(m+n)(z_0+h)] - \sin[\pi(m+n)(z_0-h)]\}}{\pi(m+n)}$$

при  $m \neq n$  і

$$G = 2h - \frac{1}{\pi m} \sin(2\pi m h) \cos(2\pi m z_0)$$

при  $m = n$ .

Представлення розв’язку для  $\bar{w}(x, z, t)$  у вигляді (21) автоматично задовольняє нульові граничні умови при  $z = 0$  і  $z = -1$ . Нульові початкові умови повинен задовольнити розв’язок для  $\Phi_m$ .

Оскільки зміна в часі функції  $\Phi_m(x, t)$  є слабкою, розв’язок рівняння (22) можна представити у вигляді суми двох складових

$$\Phi_m(x, t) = \Phi_{m0}(x, t) + \Phi_{m1}(x, t),$$

де  $\Phi_{m0}(x, t)$  задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 \Phi_{m0}}{\partial x^2} + \frac{\pi^2 m^2 \omega_n^2}{1 - \omega_n^2} \Phi_{m0} = \frac{e^{ikx} F_m}{1 - \omega_n^2}, \quad (23)$$

а  $\Phi_{m1}(x, t)$  – відповідно рівнянню

$$\frac{\partial^2 \Phi_{m1}}{\partial x^2} + \frac{\pi^2 m^2 \omega_n^2}{1 - \omega_n^2} \Phi_{m1} = \frac{D_m}{1 - \omega_n^2}, \quad (24)$$

де

$$D_m = \left( 2i\omega_n \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi_{m0}}{\partial x^2} - \pi^2 m^2 \omega_n^2 \Phi_{m0} \right).$$

Початкові умови для  $\Phi_{m0}$  та  $\Phi_{m1}$  такі ж, як і для  $\Phi_m$ , тобто

$$\Phi_{m0} = \Phi_{m1} = \frac{\partial \Phi_{m0}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial t} = 0.$$

Розв’язок рівняння (23) має вигляд [22]

$$\Phi_{m0} = \frac{\sqrt{1 - \omega_n^2}}{\pi m \omega_n} \times \quad (25)$$

$$\times \left[ \int_{-\infty}^x f_m(x_1, t) dx_1 - \int_x^{\infty} f_m(x_1, t) dx_1 \right],$$

де

$$f_m(x, t) = \frac{e^{ikx} F_m}{1 - \omega_n^2} \cdot \sin \left[ \frac{\pi m \omega_m}{\sqrt{1 - \omega_n^2}} \right].$$

Для точок, які знаходяться за межами області перемішаної плями, його вираз набирає вигляду

$$\Phi_{m0} = \frac{\sqrt{1 - \omega_n^2}}{\pi m \omega_n} \int_{-a}^a f(x_1, t) dx_1. \quad (26)$$

Як видно,  $\Phi_{m0}(x, t)$  містить час в якості параметра і, враховуючи вид функції  $F_m$ , він представляється в аналітичному вигляді

$$\Phi_{m0} = \Phi_{m0}^r + i\Phi_{m0}^i, \quad (27)$$

де

$$\Phi_{m0}^r(x, t) = \frac{A_0 k G S_m^r}{\pi m \sqrt{1 - \omega_n^2}} \cos \left( \frac{m}{n} kx \right), \quad (28)$$

$$\Phi_{m0}^i(x, t) = \frac{A_0 k G S_m^i}{\pi m \sqrt{1 - \omega_n^2}} \sin \left( \frac{m}{n} kx \right), \quad (29)$$

а  $S_m^r(t)$  і  $S_m^i(t)$  визначаються виразами

$$\begin{aligned} S_m^r(t) &= -\frac{n}{m+n} \sin \left[ ka \left( \frac{m}{n} + 1 \right) \right] + \\ &\quad + \frac{n}{m-n} \sin \left[ ka \left( \frac{m}{n} - 1 \right) \right], \\ S_m^i(t) &= \frac{n}{m+n} \sin \left[ ka \left( \frac{m}{n} + 1 \right) \right] + \\ &\quad + \frac{n}{m-n} \sin \left[ ka \left( \frac{m}{n} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

при  $m \neq n$  і

$$\begin{aligned} S_m^r(t) &= -\frac{1}{2} \sin(2ka) + ka, \\ S_m^i(t) &= \frac{1}{2} \sin(2ka) + ka \end{aligned}$$

при  $m = n$ .

В наведених виразах враховано, що у розв'язку (25) величину  $\pi m \omega_n / \sqrt{1 - \omega_n^2}$  можна замінити на величину  $mk/n$ , оскільки це впливає з дисперсійного співвідношення задачі.

Одержаний розв'язок для  $\Phi_{m0}$  з часом  $t$  в якості параметра не дозволяє безпосередньо задовольнити нульовим початковим умовам. Цим умовам можна задовольнити лише на основі використання особливостей фізики формування області розсіяних внутрішніх хвиль. Оскільки тут не розглядаються хвильові збурення середовища, які передували початку в'язкої стадії еволюції плями, то вважається, що в деякий момент часу  $t$ , який відповідає початку цієї стадії еволюції і приймається за

нульовий, починає формуватись область  $B(x, z, t)$  розсіяних внутрішніх хвиль. Її формують два передні фронти ВХ, які поширюються в обидві сторони від плями зі швидкістю, що відповідає фазовій швидкості старшої гармоніки ( $m = 1$ ) представлення (19), (21) (в силу її найбільшого значення). Відповідно до одержаного розв'язку для  $\Phi_{m0}$  має місце  $\Phi_{m0} \sim e^{i\frac{m}{n}kx}$ . Отже дискретна структура розсіяних монохроматичних внутрішніх хвиль даної задачі така, що для  $m$ -ої складової розв'язку (19) (враховуючи представлення (21)) для  $w_{1m}$  маємо

$$w_{1m} \sim e^{i(\frac{m}{n}kx - \omega_n t)}.$$

Фазова швидкість  $c_{fm}$  поширення такої  $m$ -ої складової визначається як

$$c_{fm} = \frac{n\omega_n}{mk}.$$

Таким чином, якщо прийняти, що область розсіяних ВХ у довільний момент часу займає в усій товщі стратифікованої рідини інтервал  $-c_{f1}t < x < c_{f1}t$ , зовні якого хвильові збурення відсутні, то нульові початкові умови виконуються автоматично, оскільки в цьому випадку в момент  $t = 0$  в усьому середовищі відсутні будь-які збурення. Слід відмітити, що такий підхід був би строго справедливим для випадку нульового горизонтального розміру плями в початковий момент. Оскільки це не так, одержаний розв'язок буде задовільно описувати розсіяну хвильову картину для таких значень  $t$ , які відповідають умові

$$c_{f1}t \gg a(t).$$

Однак, саме за таких умов розв'язок задачі і представляє інтерес.

Розв'язок для  $\Phi_{m1}$  знаходиться аналогічно розв'язку для  $\Phi_{m0}$ . На підставі представлення

$$\Phi_{m1} = \Phi_{m1}^r + i\Phi_{m1}^i, \quad (30)$$

із виразу (24) впливає, що дійсна і уявна частини в (30) задовольняють відповідно рівнянням

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Phi_{m1}^r}{\partial x^2} + \frac{\pi^2 m^2 \omega_n^2}{1 - \omega_n^2} \Phi_{m1}^r = \\ &= -\frac{1}{1 - \omega_n^2} \left( \frac{\partial^2 \Theta_m^r}{\partial t^2} + 2\omega_n \frac{\partial \Theta_m^i}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Phi_{m1}^i}{\partial x^2} + \frac{\pi^2 m^2 \omega_n^2}{1 - \omega_n^2} \Phi_{m1}^i = \\ &= -\frac{1}{1 - \omega_n^2} \left( \frac{\partial^2 \Theta_m^i}{\partial t^2} - 2\omega_n \frac{\partial \Theta_m^r}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

де

$$\Theta_m^r = \frac{\partial^2 \Phi_{m0}^r}{\partial x^2} - \pi^2 m^2 \omega_n^2 \Phi_{m0}^r,$$

$$\Theta_m^i = \frac{\partial^2 \Phi_{m0}^i}{\partial x^2} - \pi^2 m^2 \omega_n^2 \Phi_{m0}^i.$$

Як і в попередньому випадку, у рівняннях для складових  $\Phi_{m1}$  час фігурує в якості параметра, тому їх розв'язок знаходиться в такий же спосіб. Враховуючи, що на підставі (27)–(29) в області зовні плями має місце співвідношення для  $\Phi_{m0}$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{m0}}{\partial x^2} - \pi^2 m^2 \omega_n^2 \Phi_{m0} =$$

$$= -m^2 \left( \frac{k^2}{n^2} + \pi^2 m^2 \omega_n^2 \right) \cdot \Phi_{m0}$$

та аналогічні для  $\Phi_{m0}^r$  та  $\Phi_{m0}^i$ , розв'язок рівнянь (31) і (32) має вигляд

$$\Phi_{m1}^r = B_m (\Phi_{m1}^{r-} - \Phi_{m1}^{r+}), \quad (33)$$

$$\Phi_{m1}^i = -B_m (\Phi_{m1}^{i-} - \Phi_{m1}^{i+}), \quad (34)$$

де

$$\Phi_{m1}^{r-} = \int_{-\infty}^x \Theta_{m*}^r \sin \left[ \frac{m}{n} k(x - x_1) \right] dx_1;$$

$$\Phi_{m1}^{r+} = \int_x^{\infty} \Theta_{m*}^r \sin \left[ \frac{m}{n} k(x - x_1) \right] dx_1;$$

$$\Phi_{m1}^{i-} = \int_{-\infty}^x \Theta_{m*}^i \sin \left[ \frac{m}{n} k(x - x_1) \right] dx_1;$$

$$\Phi_{m1}^{i+} = \int_x^{\infty} \Theta_{m*}^i \sin \left[ \frac{m}{n} k(x - x_1) \right] dx_1;$$

$$\Theta_{m*}^r(x, t) = 2\omega_n \frac{\partial \Phi_{m0}^i}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_{m0}^r}{\partial t^2};$$

$$\Theta_{m*}^i(x, t) = 2\omega_n \frac{\partial \Phi_{m0}^r}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Phi_{m0}^i}{\partial t^2};$$

$$B_m = \frac{m}{\pi \omega_n \sqrt{1 - \omega_n^2}} \left( \frac{k^2}{n^2} + \pi^2 \omega_n^2 \right).$$

Проблема виконання нульових початкових умов для  $\Phi_{m1}$  вирішується ідентично випадку для  $\Phi_{m0}$  в рамках фізики формування області розсіяних внутрішніх хвиль  $B(x, z, t)$ .

Представлення для  $\Phi_{m0}$  у вигляді (28), (29) дозволяє взяти інтеграли у розв'язках (33), (34) в явній формі. В результаті, обчислюючи відповідні

вирази

$$I_{m1} = \int_{-L_x}^x \sin \left[ \frac{m}{n} k(x - x_1) \right] \cos \left( \frac{m}{n} kx_1 \right) dx_1 =$$

$$= \frac{1}{2} (L_x + x) \sin \left( \frac{m}{n} kx \right) +$$

$$+ \frac{n}{4mk} \left[ \cos \left( \frac{m}{n} kx \right) - \cos \left[ \frac{m}{n} k(2L_x + x) \right] \right],$$

$$I_{m2} = \int_{-L_x}^x \sin \left[ \frac{m}{n} k(x - x_1) \right] \sin \left( \frac{m}{n} kx_1 \right) dx_1 =$$

$$= -\frac{1}{2} (L_x + x) \cos \left( \frac{m}{n} kx \right) +$$

$$+ \frac{n}{4mk} \left[ \sin \left( \frac{m}{n} kx \right) + \sin \left[ \frac{m}{n} k(2L_x + x) \right] \right],$$

$$I_{m3} = \int_x^{L_x} \sin \left[ \frac{m}{n} k(x - x_1) \right] \cos \left( \frac{m}{n} kx_1 \right) dx_1 =$$

$$= \frac{1}{2} (L_x - x) \sin \left( \frac{m}{n} kx \right) -$$

$$- \frac{n}{4mk} \left[ \cos \left( \frac{m}{n} kx \right) - \cos \left[ \frac{m}{n} k(2L_x - x) \right] \right],$$

$$I_{m4} = \int_x^{L_x} \sin \left[ \frac{m}{n} k(x - x_1) \right] \sin \left( \frac{m}{n} kx_1 \right) dx_1 =$$

$$= -\frac{1}{2} (L_x - x) \cos \left( \frac{m}{n} kx \right) +$$

$$+ \frac{n}{4mk} \left[ \sin \left( \frac{m}{n} kx \right) - \sin \left[ \frac{m}{n} k(2L_x - x) \right] \right]$$

можна одержати аналітичне представлення розв'язку для  $\Phi_{m1}$ :

$$\Phi_{m1}^r(x, t) = \frac{B_m A_0 k G}{\pi m \sqrt{1 - \omega_n^2}} \Upsilon_m^r(x, t), \quad (35)$$

$$\Phi_{m1}^i(x, t) = -\frac{B_m A_0 k G}{\pi m \sqrt{1 - \omega_n^2}} \Upsilon_m^i(x, t), \quad (36)$$

де

$$\Upsilon_m^r = 2\omega_n (I_{m2} - I_{m4}) \frac{\partial S_m^i}{\partial t} +$$

$$+ (I_{m1} - I_{m3}) \frac{\partial^2 S_m^r}{\partial t^2},$$

$$\Upsilon_m^i = 2\omega_n (I_{m1} - I_{m3}) \frac{\partial S_m^r}{\partial t} -$$

$$- (I_{m2} - I_{m4}) \frac{\partial^2 S_m^i}{\partial t^2}.$$

Дійсна частина загального розв'язку для  $w_1(x, z, t)$  на підставі (21), (27)–(30), (35) і (36) набуває вигляду

$$w_1(x, z, t) = \sum_{m=1}^{m_*} \sin(\pi m z) \times \quad (37)$$

$$\times [\Phi_m^r \cos(\omega_n t) + \Phi_m^i \sin(\omega_n t)],$$

де

$$\Phi_m^r(x, t) = \Phi_{m0}^r(x, t) + \Phi_{m1}^r(x, t),$$

$$\Phi_m^i(x, t) = \Phi_{m0}^i(x, t) + \Phi_{m1}^i(x, t),$$

а  $m_*$  в кожній розрахунковій точці дорівнює кількості хвильових гармонік, які, зважаючи на те, що кожна з них має свою фазову швидкість, у розрахунковий момент встигають прийти в цю точку.

Одержаний розв'язок (37) можна представити у вигляді суми двох ВХ, які поширюються в різні сторони від плями:

$$w_1(x, z, t) = H(x)w_{11}(x, z, t) + H(-x)w_{12}(x, z, t). \quad (38)$$

Якщо обмежитись нульовим наближенням, то представлення для  $w_{11}(x, z, t)$  і  $w_{12}(x, z, t)$  мають вигляд

$$w_{11}(x, z, t) = \frac{A_0 k G}{2\pi \sqrt{1 - \omega_n^2}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{m_*} \frac{\sin(\pi m z) (S_m^r - S_m^i)}{m} \cdot \cos\left(\frac{m}{n} k x - \omega_n t\right),$$

$$w_{12}(x, z, t) = \frac{A_0 k G}{2\pi \sqrt{1 - \omega_n^2}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{m_*} \frac{\sin(\pi m z) (S_m^r + S_m^i)}{m} \cdot \cos\left(\frac{m}{n} k x + \omega_n t\right).$$

Складова  $w_{11}(x, z, t)$  відповідає хвилям, які поширюються вправо від плями (область додатніх  $x$ ), а складова  $w_{12}(x, z, t)$  – хвилям, які поширюються вліво від плями (область від'ємних  $x$ ).

При побудові картини розсіяних ВХ слід врахувати параметричний характер слабкої залежності одержаного розв'язку для  $\Phi_m(x, z, t)$  від часу через  $a(t)$  у виразах  $S_m^r$  і  $S_m^i$  та через  $h(t)$  у виразі  $G$ . Як впливає з одержаного розв'язку задачі у вигляді (37), картина поля розсіяних хвиль у будь-який момент часу визначається геометричними параметрами плями, які відповідають саме цьому моменту часу. Але, насправді, це не так, тому що такий результат протирічить фізиці процесу породження поля цих ВХ. З використаної тут схеми формування поля розсіяних хвиль випливає,

що в довільний момент часу  $t$  в центрі плями породжується елемент кожної із спектра монохроматичних хвиль, який визначається значенням геометричних розмірів плями  $2a(t)$  і  $2h(t)$ , які відповідають саме цьому моменту часу  $t$ . При подальшому поширенні від плями ці елементи хвильової структури не змінюються, несучи, таким чином, інформацію про динаміку плями в момент своєї генерації. Оскільки фазова швидкість  $c_{fm}$  поширення кожної гармоніки ВХ є сталою величиною протягом всього часу формування поля розсіяних хвиль, то для врахування відміченого параметричного впливу зміни геометрії плями в часі на хвильову картину необхідно у виразах  $S_m^r$  і  $S_m^i$  розв'язку (38) замість  $a(t)$  брати  $a\left(t - \frac{|x|}{c_{fm}}\right)$  і відповідно у виразі для  $G(t)$  замість  $h(t)$  брати  $h\left(t - \frac{|x|}{c_{fm}}\right)$ . Таку заміну необхідно робити в обох наближеннях одержаного розв'язку.

#### 4. ЕНЕРГЕТИКА РОЗСІЯНИХ НА ПЛЯМІ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ

Представляє інтерес визначення потоків енергії, які несуть розсіяні внутрішні хвилі в обидві сторони від інтрузійної плями. Для цього можна використати відомий підхід [22], в якому обчислюється кількість кінетичної  $E_k$  та потенціальної  $E_p$  енергії в межах довжини хвилі.

На підставі одержаного розв'язку для вертикальної складової швидкості мають місце такі представлення для горизонтальної складової швидкості  $u(x, z, t)$  та амплітуди розсіяних ВХ  $\eta(x, z, t)$ :

а) для хвиль, які поширюються вправо від плями (область  $x > 0$ )

$$u(x, z, t) = -\frac{\pi n}{2k} \sum_{m=1}^{m_*} \cos(\pi m z) \times$$

$$\times (\Phi_{m_*}^r - \Phi_{m_*}^i) \sin\left(\frac{m}{n} k x - \omega_n t\right), \quad (39)$$

$$\eta(x, z, t) = -\frac{1}{2\omega_n} \sum_{m=1}^{m_*} \sin(\pi m z) \times$$

$$\times (\Phi_{m_*}^r - \Phi_{m_*}^i) \sin\left(\frac{m}{n} k x - \omega_n t\right), \quad (40)$$

де

$$\Phi_{m_*}^r = \frac{A_0 S_m^r(t)}{\pi m \sqrt{1 - \omega_n^2}}; \quad \Phi_{m_*}^i = \frac{A_0 S_m^i(t)}{\pi m \sqrt{1 - \omega_n^2}};$$

б) для хвиль, які поширюються вліво від плями



(область  $x < 0$ )

$$u(x, z, t) = -\frac{\pi n}{2k} \sum_{m=1}^{m_*} \cos(\pi m z) \times (\Phi_{m_*}^r + \Phi_{m_*}^i) \sin\left(\frac{m}{n} k x + \omega_n t\right), \quad (41)$$

$$\eta(x, z, t) = \frac{1}{2\omega_n} \sum_{m=1}^{m_*} \sin(\pi m z) \times (\Phi_{m_*}^r + \Phi_{m_*}^i) \sin\left(\frac{m}{n} k x + \omega_n t\right). \quad (42)$$

Для  $m$ -ої гармоніки ВХ в межах довжини хвилі  $\lambda_m = 2\pi n/mk$  безрозмірені значення (в якості масштабу береться величина  $\rho_0 H^4 N^2$ ) кінетичної  $E_{km}$  та потенціальної  $E_{pm}$  енергії визначаються такими виразами:

$$E_{km} = \int_0^{\lambda_m} \int_{-1}^0 (u_m^2 + w_m^2) dx dz, \quad (43)$$

$$E_{pm} = \frac{1}{Fr} \int_0^{\lambda_m} \int_{-1}^0 \eta_m dx dz, \quad (44)$$

де  $Fr = HN^2/g$ .

На підставі (38)–(42) із (43) і (44) для хвиль в області  $x > 0$

$$E_{kp} = \frac{\pi^3 n^3}{8k^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\Phi_{m_*}^r - \Phi_{m_*}^i)^2, \quad (45)$$

$$E_{pp} = 0. \quad (46)$$

Аналогічно для хвиль в області  $x < 0$

$$E_{kl} = \frac{\pi^3 n^3}{8k^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\Phi_{m_*}^r + \Phi_{m_*}^i)^2, \quad (47)$$

$$E_{pl} = 0. \quad (48)$$

Як неважко переконатись, час генерації однієї довжини хвилі  $T_m$  є однаковою величиною для всіх гармонік ВХ. Справді,

$$T_m = \frac{\lambda_m}{c_{fm}} = \frac{2\pi^2 n}{k\sqrt{1-\omega_n^2}} = T,$$

де величина  $T$  визначається параметрами фонові ВХ. Тоді потік енергії в одиницю часу визначиться наступними виразами :

а) для хвиль в області  $x > 0$

$$\frac{E_p}{T} = \frac{\pi n^2}{16k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\Phi_{m_*}^r - \Phi_{m_*}^i)^2, \quad (49)$$

б) для хвиль в області  $x < 0$

$$\frac{E_l}{T} = \frac{\pi n^2}{16k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\Phi_{m_*}^r + \Phi_{m_*}^i)^2. \quad (50)$$

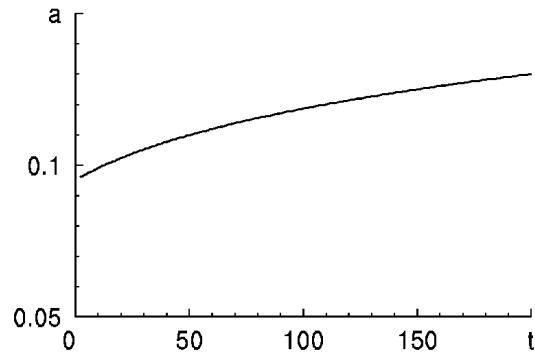


Рис. 1. Зміна в часі половини горизонтального розміру плями

## 5. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ

На підставі одержаного розв'язку задачі були проведені розрахунки полів розсіяних ВХ на перемішаних плямах для різних фонових ситуацій. В процесі чисельних експериментів значення частоти В'яйсяля-Брента приймалось рівним  $N = 5 \cdot 10^{-4}$ . Розглянуті різні комбінації значень хвильового числа  $k$  і номера моди  $n$  набігаючої хвилі в шарі лінійно стратифікованої рідини товщиною 200 м. Інтрузійна перемішана пляма з незмінною в часі площею перерізу  $25 \text{ м}^2$  в початковий момент часу має горизонтальну протяжність  $2a_0 = 58 \text{ м}$ . Розрахунки виконувались для часових інтервалів у межах  $t$  від 20 до 200. Значення  $a(t)$  і  $h(t)$  визначалися з виразів (12), (13). На рис.1 представлено характер зміни величини  $a(t)$  впродовж цього інтервалу часу. Амплітуда набігаючої хвилі  $A_0 = 5 \text{ м}$ . Параметри набігаючих хвиль вибирались такими, що діапазон їхніх довжин містив як значно більші від горизонтальної протяжності плями, так і порядку цієї величини.

Оцінка кількості складових  $m$  у розв'язку (21) показала, що для практичних розрахунків цілком достатньо обмежитись двадцятьма членами ряду, які можуть давати вклад у розв'язок у розрахунковій точці. В проведених розрахунках це забезпечувало відносну точність в межах 0.1 відсотка. Оцінка вкладу у рзв'язок задачі складових першого наближення показала, що він знаходиться в межах 0.5 відсотка. Тому в наведених тут ілюстраціях використано лише нульове наближення розв'язку.

На рис. 2 та 3 наведена картина розсіяних ВХ на п'яти горизонтах стратифікованого шару рідини в межах одного і того ж інтервалу  $x$ -ів, але для різних значень часу. В першому випадку (рис. 2)

представлена повна картина ВХ для моменту  $t = 20$ , в іншому (рис. 3) – для моменту часу  $t = 200$ , але в межах зони  $x$ -ів, що відповідають рис. 2. Як видно, хвильова картина на цих рисунках істотно відрізняється.

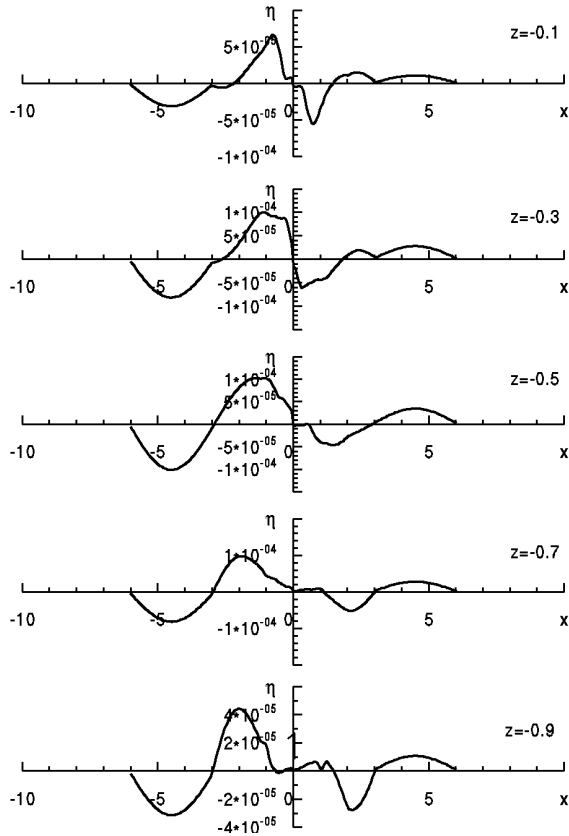


Рис. 2. Хвильова картина на п'яти горизонтах  $z$  для  $k = 2; n = 2; z_0 = -0.25$ ; при  $t = 20$

Причина таких відмінностей полягає в тому, що для  $t = 20$  зображена вся зона  $x$ -ів області хвильових збурень, коли в кожній розрахунковій точці присутні різні кількості гармонік розсіяних ВХ, у той час як на рис.3 для  $t = 200$  в усіх точках цього інтервалу  $x$ -ів присутні по 20 гармонік розсіяних ВХ. В останньому випадку хвильова картина близька до тієї, яка має місце для стаціонарного розв'язку у випадку незмінності в часі геометрії і структури плями. Якщо побудувати характер зміни величини модуля вертикальної складової збуреної швидкості в нульовому наближенні такого стаціонарного розв'язку

$$|\bar{w}| = \sqrt{w_{m0r}^2 + w_{m0i}^2},$$

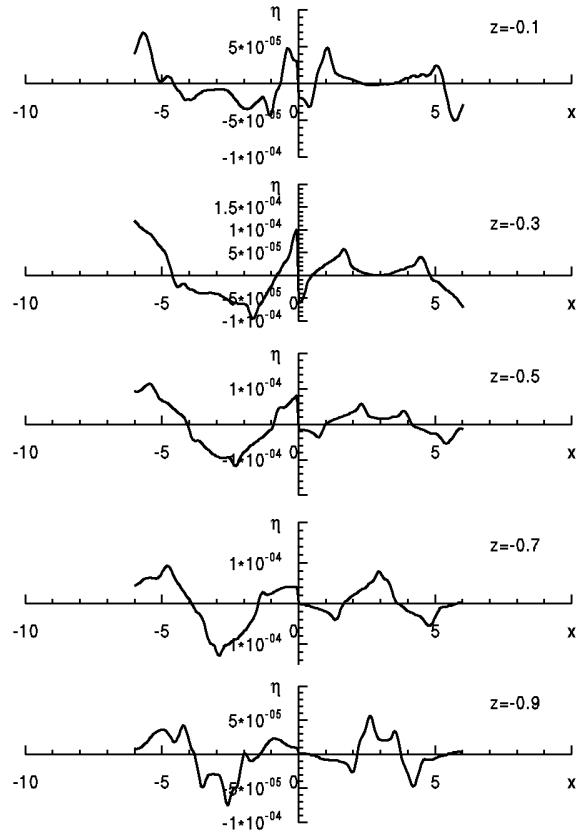


Рис. 3. Хвильова картина на п'яти горизонтах  $z$  для  $k = 2; n = 2; z_0 = -0.25$ ; при  $t = 200$  в межах зони  $x$ -ів хвильової області, відповідної  $t = 20$

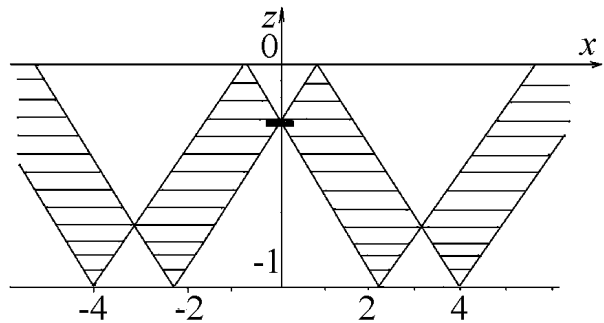


Рис. 4. Картина розміщення зон максимальних амплітуд стаціонарного розв'язку для  $k = 2; n = 2; z_0 = -0.25$

де

$$w_{m0r}(x, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m z) \Phi_{m0}^r(x, t),$$

$$w_{m0i}(x, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m z) \Phi_{m0}^i(x, t),$$

то має місце характерна картина розміщення зон максимальних значень амплітуд, яка для розрахункового режиму має вигляд, представлений на рис. 4. Ці зони мають вигляд системи двох періодично (з періодом  $2\pi n/k$ ) розміщених похилих полос, які проходять через пляму, починаються від неї і мають кути нахилу  $\alpha$  до вісі  $x$  такі, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{k}{\pi n}.$$

Саме такого типу зони максимальних амплітуд

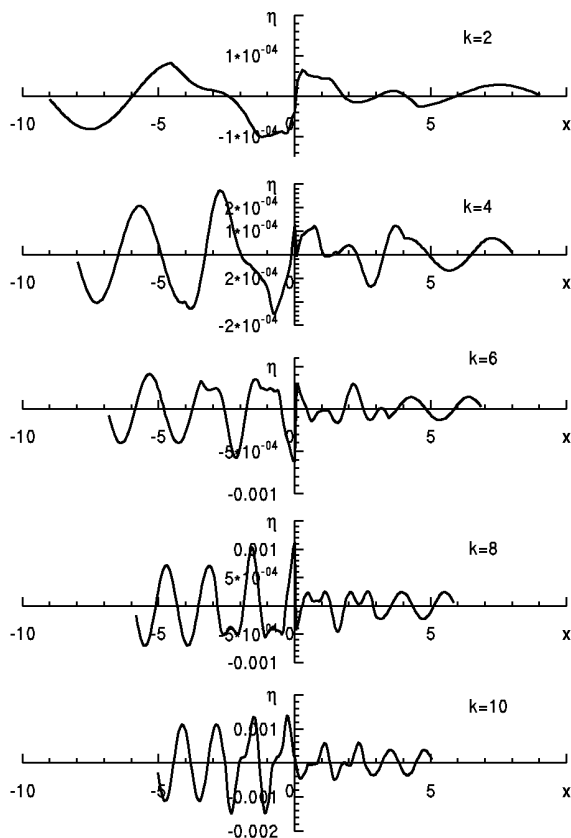


Рис. 5. Залежність характеру хвильової картини від хвильового числа фонової ВХ для  $n = 2$ ;  $z_0 = -0.25$ ;  $z = -0.3$ ; при  $t = 30$

вперше були отримані в роботах [9, 11, 12]. Співставлення рис. 3 і 4 показує наявність певної кореляції між положенням зон максимальних значень модуля комплексної швидкості стаціонарного розв'язку та зонами максимальних амплітуд розсіяних ВХ при  $t = 200$ . Слід відмітити при цьому, що представлена на рис. 4 картина  $|\bar{w}|$  не включає наявності у розв'язку множника  $e^{-i\omega_n t}$ , який приводить до зміщення зон максимумів амплітуд вздовж вісі  $x$ -ів. Характерним також є те, що зображені на рис. 4 зони є саме зонами найбільших

амплітуд, поза якими також наявні хвильові збурення.

На рис. 5 наведені хвильові картини на горизонті  $z = -0.3$  для різних значень хвильового числа при фіксованому значенні номера моди фонової ВХ, а на рис. 6 – аналогічні картини розсіяних ВХ для різних значень номерів мод фонової ВХ при фіксованому значенні хвильового числа. В обох випадках хвильова картина істотно змінюється при відповідних змінах параметрів, а як видно з рис. 5, від зміни хвильового числа  $k$  набігаючої ВХ істотно залежить горизонтальний розмір області розсіяних ВХ. Збільшення величини  $k$  призводить до зменшення ширини області розсіяних ВХ.

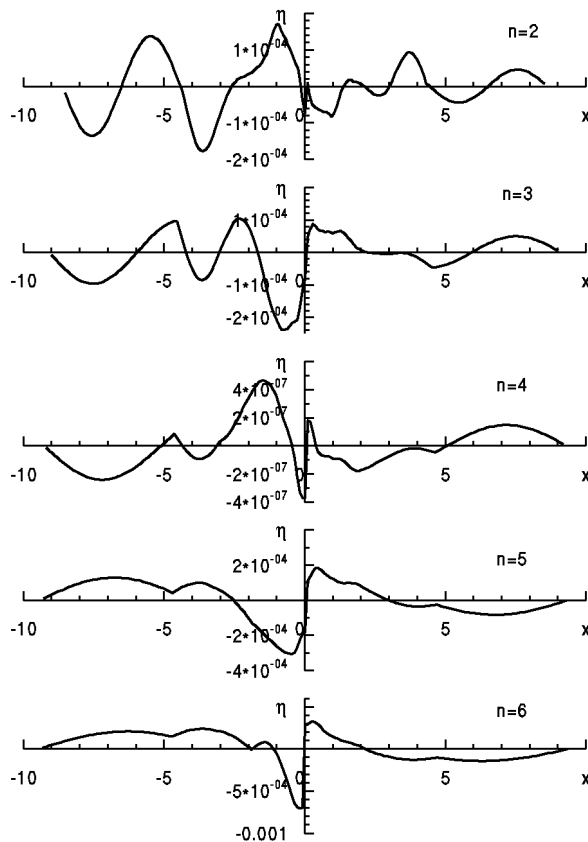


Рис. 6. Залежність характеру хвильової картини від номера моди фонової ВХ для  $k = 3$ ;  $z_0 = -0.25$ ;  $z = -0.3$ ; при  $t = 30$

Характерною особливістю всіх одержаних у процесі розрахунків хвильових картин розсіяних ВХ, як це видно із наведених рисунків, є більша енергетичність тих з них, які поширюються вліво від плями в напрямку, протилежному напрямку поширення фонової ВХ. Про це можна судити також безпосередньо з виразів (45) і (47) для відповідних

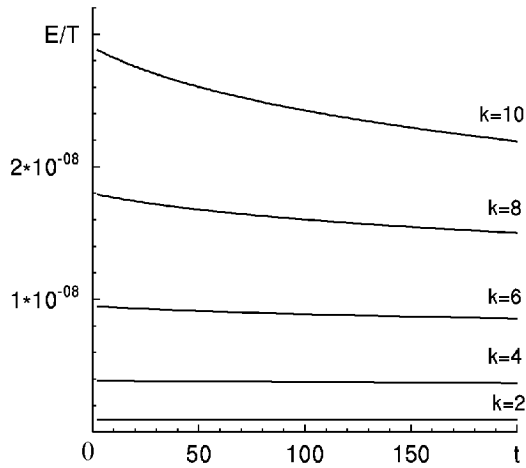


Рис. 7. Зміна в часі потоку енергії розсіяних хвиль для  $n = 3$ ;  $z_0 = -0.25$ ;  $z = -0.3$

значень потоків кінетичної енергії в одиницю часу.

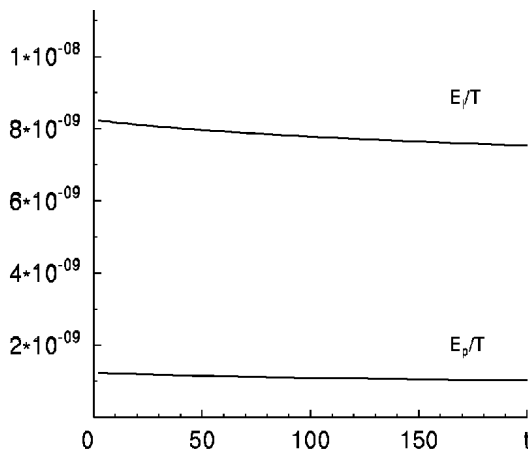


Рис. 8. Зміна в часі потоку енергії розсіяних хвиль, які поширюються по і проти напрямку поширення фонові ВХ. для  $n = 3$ ;  $k = 6$ ;  $z_0 = -0.25$ ;

Важливим ефектом розсіяння фонових ВХ на перемішаних плямах є насичення стратифікованого середовища високочастотними складовими (гармоніками). Особливо це характерно при розсіянні коротких внутрішніх хвиль. Проведені розрахунки показали також, що не відповідає дійсності твердження робіт [9,11,12] про те, що поза межами зон концентрації енергії розсіяних хвиль хвильові збурення відсутні. Про це можна судити на підставі всіх наведених тут хвильових картин.

Характер зміни потоку кінетичної енергії розсіяних ВХ у часі для різних значень хвильового числа фонові ВХ при фіксованому номері її моди

наведено на рис. 7. Як видно, зі зростанням хвильового числа набігаючої ВХ енергетика розсіяних хвиль істотно зростає. З ростом  $t$  для всіх випадків спостерігається повільне зменшення потоку енергії в одиницю часу. На рис. 8 дано порівняння величин потоку кінетичної енергії розсіяних хвиль  $E_l$  та  $E_p$ , яке підтверджує відмічену раніше більшу енергетичність хвиль, які поширюються в сторону, протилежну напрямку поширення фонові ВХ.

## 6. ЗАКЛЮЧЕННЯ

Розроблена тут проста інтегральна модель дозволяє описувати нестационарну картину поля розсіяних внутрішніх хвиль, утворених при взаємодії монохроматичної фонові внутрішньої хвилі з двовимірною перемішаною інтрузійною областю, що знаходиться на в'язкій стадії своєї еволюції. Застосування наближеної (але достатньо точної) апроксимації геометрії реальної області, одержаної в розв'язку Г. І. Баренблата [18], змінним у часі прямокутником дозволяє одержати аналітичний розв'язок відповідної задачі розсіяння ВХ на плямі, яка знаходиться в шарі скінченної товщини лінійно стратифікованої рідини. Подібного результату можна досягти і для інших схем стратифікації, якщо для них можна одержати аналітичне представлення для компонент швидкості руху середовища в полі лінійної фонові ВХ.

Виконані розрахунки показали ефективність запропонованого методу. Одержані результати узгоджуються з одержаними раніше результатами в цьому напрямку і, в силу своєї аналітичності, дозволяють більш просто і наочно описати структуру і енергетику поля розсіяних внутрішніх хвиль, їх зв'язок з геометрією області плями, характером стратифікації та характеристиками фонових ВХ.

Одержано, що розсіяні на плямі внутрішні хвилі в кожній точці представляють скінчену суму монохроматичних гармонік,  $m$ -та з яких виражається через параметри плями та фонові ВХ як

$$\eta_m = A_m(k, n, a(t), h(t))e^{i(\frac{m}{n}k - \omega_n t)},$$

де  $A_m(k, n, a(t), h(t))$  – амплітудний множник, який визначається параметрами плями і набігаючої фонові ВХ. В силу слабкої залежності  $A_m$  від часу при його обчисленні достатньо обмежитись нульовим наближенням розв'язку, де час виступає в якості параметра. Як показали відповідні розрахунки, складові першого наближення вносять поправку у розв'язок задачі в межах 0.5 відсотка.

Нестационарність задачі визначається експонен-

ційним множником розв'язку

$$e^{i(\frac{m}{n}kx - \omega_n t)}$$

та змінністю в часі ширини  $2L_x$  області, зайнятої власне розсіяними внутрішніми хвилями. Ця ширина формується передніми фронтами старших ( $m = 1$ ) гармонік розсіяних хвиль (в обидві сторони від плями), швидкість поширення яких є фазовою швидкість цих гармонік:

$$c_{f1} = \frac{n\omega_n}{k}.$$

Якщо прийняти, що геометрія плями не змінюється з часом ( $a = \text{const}$  і  $h = \text{const}$ ), то це відповідає стаціонарному розв'язку задачі, такому, як розглянуті в [9, 11, 12], коли розсіяні ВХ мають структуру, відповідну тій, яка б мала місце для випадку, коли вони заповнюють всю область хвилевода ( $L_x = \infty$ ). В реальних задачах такі розв'язки не є фізичними як в силу, хоч і повільної, але зміни в часі величин  $a(t)$  і  $h(t)$ , так і відміченою вище змінністю ширини області розсіяних ВХ. Останній чинник, головним чином, і характеризує нестаціонарність розглянутого класу задач. Для великих значень часу в області, відносно недалекої від плями, структура поля розсіяних ВХ близька до відповідної стаціонарному розв'язку. Принаймні, таке можна стверджувати для зони, де присутні більше десяти гармонік розсіяних хвиль; у цьому випадку відмінність від стаціонарного розв'язку має місце у другій значущій цифрі. Для двадцяти гармонік така відмінність має місце вже у третій значущій цифрі.

Результати такого роду досліджень дозволяють оцінювати вплив на гідрофізичну структуру верхнього шару океану такого механізму міжмодової взаємодії, як розсіяння фонових ВХ океану на перемішаних плямах, які перебувають на в'язкій стадії своєї еволюції.

1. Lin J.T., Pao Y.H. Waces in stratified fluids // Annual Review of Fluid Mechanics.– 1979.– V. 11.– P. 317-338.
2. Pao H.P. Flow visualization studies in turbulent wace development in a stratified fluid // In: Flow visual. III Proc. 3rd Int. Symp.– Ann. Arbor., Mich.– Sept. 6-9. 1983, Washington e.a.– P. 548.
3. Pearson H.J., Linden P.F. The final study of decay of turbulence in stably stratified fluid // J. Fluid Mech.– 1983.– V. 134.– P. 195-203.
4. Мадерич В.С., Никишов В.И. Дифузионно-вязкая стадия растекания перемешанного пятна в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР, ФАО.– 1986.– Т. 22, N 6.– С. 656-658.
5. Riley J. J., Metcalf R. W., Weisman M. A. Direct numerical simulation of homogeneous turbulence in

density- stratified fluids // In: Proc. AIP Conf. Nonlinear Properties of internal waves.– 1989 (ed B.J. West).– R. 79.– P. 12.

6. Бенилов А.Ю. О разрушении турбулентных скачков плотности в океане // Изв. АН СССР, ФАО.– 1985.– 21, N 2.– С. 197-207.
7. Lukjanov P.V., Maderich V.S. Restratification processes in the final stage of turbulence decay in a stably stratified media // ДНАН України.– 1995.– N 5.– С. 45-49.
8. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированных средах.– К.: Наукова думка, 1988.– 239 с.
9. Буданов С.П., Тибилов А.С., Яковлев В.А. Борновское приближение решения задачи рассеяния внутренних волн // ПМТФ.– 1984.– 144, N 2.– С. 88-93.
10. Бунимович Л.А., Жмур В.В. Рассеяние волн на ансамбле пятен перемешанной жидкости // Изв. АН СССР, ФАО.– 1985.– 21, N 3.– С. 311-318.
11. Григорьев П.Л., Тибилов А.С., Яковлев В.А. Приближение однократного рассеяния внутренних волн на неоднородностях поля плотности // Изв. АН СССР, ФАО.– 1985.– 21, N 3.– С. 321-324.
12. Григорьев П.Л., Тибилов А.С., Яковлев В.А. Рассеяние внутренних волн на слабонеоднородном возмущении поля плотности жидкости с учетом формы свободной поверхности и дна // Изв. АН СССР, ФАО.– 1986.– 22, N 9.– С. 948-952.
13. Стеценко О.Г. Задача рассеяния внутренних волн на слабонеоднородном возмущении поля плотности в трехслойной модели океана // Изв. АН СССР, ФАО.– 1987.– 23, N 11.– С. 1193-1197.
14. Жмур В.В. Рефракция внутренних волн на пятнах перемешанной жидкости в двухслойном океане // Изв. АН СССР, ФАО.– 1984.– 20, N 11.– С. 106-111.
15. Лук'янов П.В., Мадерич В.С., Стеценко О.Г. В'язко-дифузійна стадія еволюції двовимірної перемішаної плями в полі внутрішньої хвилі // Прикладна гідромеханіка.– 2001.– Т. 4(76), N 3.– С. 42-52.
16. Лук'янов П.В., Стеценко О.Г. Розсіяння внутрішніх хвиль на перемішаній плямі, що знаходиться на в'язко-дифузійній стадії еволюції // Прикладна гідромеханіка.– 2002.– Т. 4(76), N 1).– С. 76-83.
17. Padmanabhan H., Ames W.F., Kennedy J.F., Nin-Kan Hung F. Numerical Investigation of Wace Deformation in Density Stratified Fluids // Jour. of Engineering Mathematics.– 1970.– V. 4, N 3.– P. 229-241.
18. Баренблатт Г.И. Динамика турбулентных пятен и интрузий в устойчиво стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР, ФАО.– 1978.– 14, N 2.– С. 195-206.
19. Абрамян Т.О. Экспериментальное исследование вязкого растекания пятна перемешанной жидкости в стратифицированной среде // Мор. гидрофиз. журн.– 1985.– N 6.– С. 8-13.
20. Wu J. Mixed region collapse with internal wave generation in a density - stratified medium // J. Fluid. Mech.– 1969.– V. 35, pt. 3.– P. 531-544.
21. Ле Блон., Майсек Л. Волны в океане, т.1.– М.: Мир, 1981.– 428 с.
22. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений в жидкости.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1977.– 815 с.
23. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, РФМЛ, 1971.– 576 с.