

Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщение 1. Пространственный изгиб по Сен-Венану

И. В. Орыняк, С. А. Радченко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предложен новый метод для анализа напряженно-деформированного состояния упругих круговых тороидальных оболочек, основанный на выборе в качестве неизвестных функций усилий и перемещений. Метод позволяет исследовать явление овализациигиба, возникающее при приложении внешних пространственных изгибающих моментов. Получены геометрические уравнения, связывающие компоненты перемещений с деформациями, и введены гипотезы малости, что дает возможность пренебречь определенными комбинациями перемещений при рассмотрении деформирования оболочки. Показано, что гипотеза Кармана о недеформируемости срединной поверхности трубы может использоваться только после исключения окружного усилия из уравнений равновесия. Установлены границы применимости полученных решений в зависимости от порядка приближения по параметру гибкости. Выведены дифференциальные уравнения балочного типа для криволинейного стержня, связывающие углы поворотов и перемещения линии центров с внешними факторами нагружения. Полученные результаты сопоставляются с приведенными в литературных источниках.

Ключевые слова: гиб трубы, прямая труба, параметры кривизны и гибкости, гипотезы малости, овализация, изгиб в плоскости и из плоскости.

Введение. Гиб трубы – ответственный компонент трубопроводных систем, используемых в энергетической, нефтехимической и других отраслях народного хозяйства. Расчет напряженного состояниягиба для обоснования его целостности при различных видах статической и динамической нагрузок является важной задачей. Отличительная особенность деформированиягиба заключается в том, что при приложении внешних изгибающих моментов перпендикулярно его оси возникают дополнительные перерезывающие силы, приводящие к сплющиванию (овализации) поперечного сечения. В свою очередь, это увеличивает податливостьгиба трубы по сравнению с прямой трубой одинакового поперечного сечения, описываемого в литературных источниках коэффициентом K .

Существуют два безразмерных параметра, предопределяющих отличиегиба трубы от прямой трубы. Первый – параметр кривизны α , представляющий собой отношение радиуса сечениягиба R к радиусу его оси B , второй – параметр гибкости λ , определяемый по следующему соотношению: $\lambda = \frac{R^2}{Bt}$, где t – толщина стенки трубы. Чем больше эти коэффициенты, тем значительнее проявляются различия в податливостях и распределении напряжений в прямой трубе и гibe.

Первое аналитическое объяснение эффекта овализации поперечного сечениягиба трубы при изгибе в плоскости для $\alpha = R/B \rightarrow 0$ и $\lambda = \frac{R^2}{Bt} \leq 1$ было предложено Карманом [1]. Суть решения состояла в представлении

компонент перемещений в виде заданных тригонометрических функций с несколькими неизвестными коэффициентами. Составление и минимизация функционала упругой энергии позволили определить эти коэффициенты и получить явное аналитическое решение для коэффициента K . Основным моментом в анализе Кармана является использование гипотезы о несжимаемости срединной поверхности поперечного сечениягиба (гипотеза Кармана), которая предопределяет однозначную связь между тангенциальными и радиальными перемещениями.

Позже появилось много работ, обобщающих результаты Кармана для учета больших значений α и λ , в том числе при изгибе из плоскости трубы, внутреннего давления, температуры и т.д. В связи с этим отметим работу Бразье [2], в которой впервые описывался эффект потери устойчивости прямой трубы при изгибе (эффект Бразье). Суть эффекта Бразье заключается в том, что с увеличением внешнего изгибающего момента растет кривизна исходной трубы, что приводит к увеличению значения λ в процессе деформирования, а значит, ко все более нелинейно увеличивающейся оваллизации поперечного сечения. Начиная с некоторого значения изгибающего момента оваллизация нарастает катастрофически, даже если происходит постепенное уменьшение нагрузки.

Исследованиюгиба трубы, в том числе исходного некругового сечения, посвящено большое количество работ. Отметим монографии [3–5], в которых обсуждается основная проблемагиба трубы и приведены многочисленные литературные ссылки по данной тематике. Заметим, что в [3] вопросы нелинейного упругого деформирования оболочек с криволинейной осью решаются с достаточной степенью общности на высоком уровне.

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к анализу оболочек с криволинейной осью, в частности кгибу трубы. Исследуются проблемы геометрически и физически нелинейного поведениягиба [6–8], потери устойчивости при комбинированном нагружении – изгиб с давлением, в том числе внешним [9], динамического анализа [10–12], включая определение собственных частот [13], описания краевых эффектов в зонах сопряжениягиба с другими конструктивными элементами трубопроводной системы [14–16]. При этом все еще имеют место работы, выполненные в русле традиционных проблем статики оболочек, описанных, в частности, в монографиях [3–5]. Причина этого, наверное, заключается не только в уточнении известных решений, но и в необходимости разработки более общих подходов для анализа указанных выше проблем и применении их для решения относительно простых задач, уже рассмотренных в литературных источниках.

Данная работа посвящена разработке нового подхода к анализу замкнутых оболочек с криволинейной осью. Последовательно изучается ряд задач, решения которых приведены авторами в отдельных сообщениях. Особенностью подхода является выбор в качестве исходных неизвестных, представляемых в виде тригонометрических рядов, как деформационных, так и силовых параметров. Это позволяет применять гипотезу Кармана, т.е. сокращать число неизвестных, с возможностью получения сравнительно простых аналитических решений при достаточно хорошей точности.

Уместно отметить, что решения задач статики теории оболочек в строгой постановке сводятся к трем дифференциальным уравнениям с тремя неизвестными компонентами вектора перемещений. Решение их проводится численно [3, 17, 18] либо используются последующие упрощения. Упрощенные подходы основаны на гипотезе Кармана. Однако, как показано в [15, 19], последняя выполняется только приближенно. Ее использование приводит к значительному преувеличению вторичных осевых сил от окружных сил оваллизации, а также к другим неточностям. Примером такого подхода служит полученное в [5] решение, где в предельном переходе при $\alpha \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ в результате действия изгибающего момента возникают не только линейно изменяющиеся продольные напряжения, но и пропорциональные им с коэффициентом Пуассона окружные напряжения, что противоречит решению для прямой трубы. Заметим, что решения [5] вошли в ответственные регулятивные документы по расчету трубопроводов, используемых в атомной [20], нефтехимической [21] и других отраслях промышленности.

Цель настоящего сообщения заключалась в получении общих уравнений для деформирования оси оболочки как линии центров масс поперечных сечений. Это связано с тем, что трубопроводные системы при расчетах рассматриваются в качестве стержневых моделей. Оболочечные, или локальные, так как описывают местное поведение каждой точки поперечного сечения, решения необходимы для установления упругих свойств сечения в целом. Однако, по нашему мнению, взаимосвязь между оболочечными и балочными, или глобальными, поскольку описывают поведение точек линии центров масс поперечных сечений, решениями в литературных источниках прослеживается недостаточно четко, что приводит к разным толкованиям при анализе таких стержневых систем. В частности, само понятие податливости криволинейной балки неоднозначно и может относиться как к центру масс, так и к нейтральной оси. Поэтому очень важно, чтобы при анализе стержня оперировали понятиями и величинами, выработанными в оболочечном анализе. А это возможно, если задаться целью получения общего оболочечно-балочного решения, т.е. решения, в котором одновременно присутствуют члены, ответственные как за перемещения оси балки, так и каждой точки поперечного сечения.

1. Основные уравнения. Гиб трубы рассматривается как тонкостенная оболочка. Геометрические размерыгиба и обозначения приведены на рис. 1, где r, φ – локальная система полярных координат, связанная с каждым поперечным сечением; x, y, z – локальная система декартовых координат, причем y – координата исследуемой точки по лучу, соединяющему центргиба (точка O) с центром рассматриваемого сечения (точка O_1), отсчитываемая от точки O_1 ; R – средний радиус поперечного сечения; t – толщина стенки трубы; B – радиус кривизны; $\theta = x/B$ – угловая координата поперечного сечениягиба. Направления локальных перемещений точек срединной поверхностигиба трубы w, v, u совпадают с направлениями координат r, φ, x соответственно. Угол φ отсчитывается от оси z в сторону, противоположную оси y .

Важно заметить, что все глобальные величины (внешние изгибающие и крутящий моменты, углы поворотов и перемещения сечениягиба, коэф-

фициент увеличения податливости) относятся к центру сечения гiba. Это в дальнейшем позволит достаточно просто распространить полученные решения на случай сопряжения гiba трубы с другими элементами трубопроводной системы.

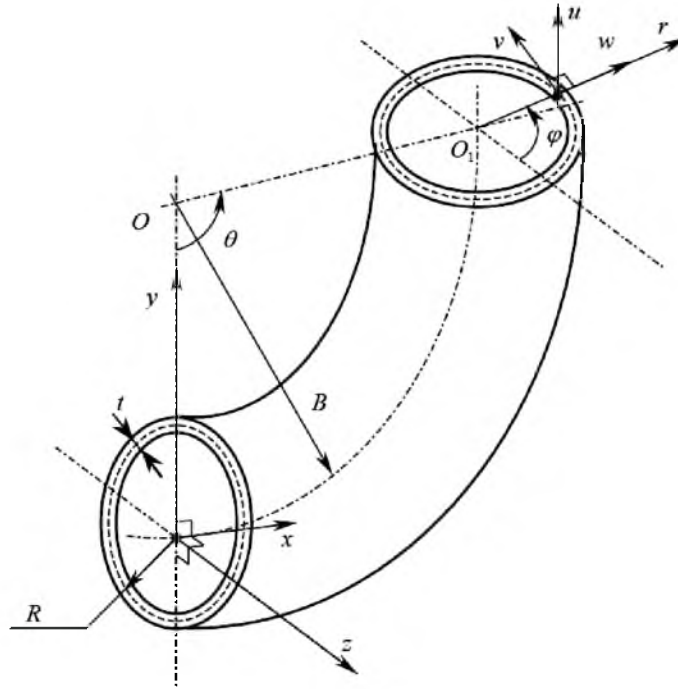


Рис. 1. Общий вид и система координат для гiba трубы.

Учитываются следующие внешние силовые факторы, приводящие к деформации гiba: $K_x(\theta)$ – крутящий момент; K_z – изгибающий момент относительно оси z , т.е. момент в плоскости гiba; $K_y(\theta)$ – изгибающий момент относительно оси y , т.е. момент из плоскости гiba,

$$\begin{cases} K_x(\theta) = \bar{\sigma} k_x(\theta) 2\pi R^2 t; \\ K_z = \bar{\sigma} k_z \pi R^2 t; \\ K_y(\theta) = \bar{\sigma} k_y(\theta) \pi R^2 t, \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{\sigma}$ – единичное напряжение; k – соответствующие безразмерные коэффициенты, которые характеризуют величину внешнего нагружения. Положительные направления K_x , K_y и K_z соответствуют вращению по часовой стрелке вокруг соответствующей оси, если смотреть вдоль оси из начала координат. Внешние поперечные силы, приводящие к изменению вектора внешнего момента, не учитываются. В анализе момент K_z будем рассматривать постоянным по координате x , а моменты K_y и K_x зависящими от координаты x . При этом глобальные изгибающий K_y и крутящий K_x моменты связаны между собой дифференциальными зависимостями:

$$\frac{\partial K_x}{\partial \theta} = K_y; \quad \frac{\partial K_y}{\partial \theta} = -K_x. \quad (2)$$

Из уравнений (2) несложно получить дифференциальную связь между безразмерными моментами k_y и k_x :

$$\frac{\partial k_x}{\partial \theta} = \frac{k_y}{2}; \quad \frac{\partial k_y}{\partial \theta} = -2k_x. \quad (3)$$

Уравнения равновесия для торообразной оболочки имеют следующий вид [22]:

$$\frac{N_\varphi}{R} + \frac{1}{RS} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Q_\varphi S) + \frac{1}{S} \frac{\partial Q_x}{\partial \theta} + \frac{N_x \sin \varphi}{S} = 0; \quad (4a)$$

$$\frac{1}{RS} \frac{\partial}{\partial \varphi} (SN_\varphi) - \frac{Q_\varphi}{R} + \frac{1}{S} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{N_x \cos \varphi}{S} = 0; \quad (4б)$$

$$\frac{1}{RS} \frac{\partial}{\partial \varphi} (S^2 L) + \frac{\partial N_x}{\partial \theta} - Q_x \sin \varphi = 0; \quad (4в)$$

$$SQ_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} (SM_\varphi) + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \theta} - M_x \cos \varphi = 0; \quad (4г)$$

$$SQ_x + \frac{1}{RS} \frac{\partial}{\partial \varphi} (S^2 M_{\varphi x}) + \frac{\partial M_x}{\partial \theta} = 0. \quad (4д)$$

Здесь $N_\varphi, N_x, Q_\varphi, Q_x$ – локальные продольные и поперечные силы в соответствующих направлениях; M_φ и M_x – локальные изгибающие моменты; L и $M_{\varphi x}$ – касательная сила и момент соответственно; S – первоначальный радиус кривизны каждой точки поверхности гiba трубы,

$$S(\varphi) = B_0 + R \sin \varphi = B_0(1 + \alpha \sin \varphi), \quad (5)$$

где B_0 – первоначальный радиус кривизны гiba.

Внутренние силы и моменты связаны с деформациями с помощью так называемых физических уравнений, которые широко известны и записываются так:

$$N_\varphi = H(\varepsilon_\varphi + \mu \varepsilon_\theta); \quad (6a)$$

$$N_x = H(\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_\varphi); \quad (6б)$$

$$L = \frac{H}{2}(1 - \mu)\gamma_{\theta\varphi} \quad (6в)$$

и

$$M_\varphi = H\delta(\chi_\varphi + \mu\chi_\theta); \quad (7a)$$

$$M_x = H\delta(\chi_\theta + \mu\chi_\varphi); \quad (7б)$$

$$M_{\varphi x} = \frac{H\delta(1-\mu)}{2} \chi_{\theta\varphi}, \quad (7в)$$

где $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \gamma_{\theta\varphi}$ – деформации срединной поверхности; $\chi_\theta, \chi_\varphi$ и $\chi_{\theta\varphi}$ – кривизны в соответствующих направлениях; $H = \frac{Et}{1-\mu^2}$, $\delta = \frac{t^2}{12}$; E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

Геометрические уравнения связывают перемещения точек срединной поверхности с деформациями. Для обоснования дальнейших упрощений рассмотрим получение этих уравнений. В соответствии с решениями в рамках теории упругости деформации удлинения и сдвига, записанные в тороидальных координатах, имеют вид

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{B_0 + r \sin \varphi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + \frac{\bar{v} \cos \varphi + \bar{w} \sin \varphi}{S}; \quad (8a)$$

$$\bar{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{w}}{r}; \quad (8б)$$

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \quad (8в)$$

и

$$\bar{\gamma}_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} - \frac{\bar{u} \cos \varphi}{B_0 + r \sin \varphi} + \frac{1}{B_0 + r \sin \varphi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta}; \quad (9a)$$

$$\bar{\gamma}_{\varphi r} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{w}}{r \partial \varphi}; \quad (9б)$$

$$\bar{\gamma}_{r\theta} = \frac{1}{B_0 + r \sin \varphi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{\bar{u} \sin \varphi}{B_0 + r \sin \varphi}, \quad (9в)$$

где r – переменный радиус сечения гiba.

На основании этих уравнений устанавливаются геометрические уравнения теории оболочек. Исходным является допущение о том, что перемещения произвольной точки оболочки могут быть представлены следующим образом:

$$\bar{u}(r, \varphi, z) = u(r, \varphi) + z\mu_1(r, \varphi); \quad (10a)$$

$$\bar{v}(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) + z\mu_2(r, \varphi); \quad (10б)$$

$$\bar{w}(r, \varphi) = w(r, \varphi), \quad (10в)$$

где u, v, w – перемещения срединной поверхности оболочки; μ_1, μ_2 – углы поворотов нормали к срединной поверхности; z – координата по толщине стенки оболочки ($z = 0$, если точка находится на срединной поверхности), совпадающая по направлению с осью r . В соответствии с исходными гипотезами теории оболочек полагаем, что $\bar{\gamma}_{\varphi r} = \bar{\gamma}_{r\theta} = 0$. Тогда из уравнений (9) и (10) можно получить выражения для μ_1 и μ_2 :

$$\mu_1 = \frac{1}{S} \left(u \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \quad (11а)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{R} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \quad (11б)$$

Аналогично выражению (10) деформации можно представить так:

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta + z\chi_\theta; \quad (12а)$$

$$\bar{\varepsilon}_\varphi = \varepsilon_\varphi + z\chi_\varphi; \quad (12б)$$

$$\bar{\gamma}_{\theta\varphi} = \gamma_{\theta\varphi} + z\chi_{\theta\varphi}. \quad (12в)$$

При этом выражения для кривизн $\chi_\theta, \chi_\varphi$ и $\chi_{\theta\varphi}$ могут быть записаны в виде суммы деформационных и угловых компонент:

$$\chi_\theta = \chi_\theta^N + \chi_\theta^M; \quad (13а)$$

$$\chi_\varphi = \chi_\varphi^N + \chi_\varphi^M; \quad (13б)$$

$$\chi_{\theta\varphi} = \chi_{\theta\varphi}^N + \chi_{\theta\varphi}^M, \quad (13в)$$

где индексы N и M относятся соответственно к деформационной и угловой компоненте. Деформационная компонента связана с изменением кривизны элемента, а угловая – с изменением угла наклона элемента.

Выражения для $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \gamma_{\theta\varphi}, \chi_\theta, \chi_\varphi$ и $\chi_{\theta\varphi}$ получают путем подстановки (10) с учетом (11) в (8а), (8б) и (9а), при этом для вывода деформационных составляющих кривизн принимают во внимание представление $r = R + z$:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{S} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v \cos \varphi + w \sin \varphi}{S}; \quad (14а)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R}; \quad (14\text{б})$$

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{u \cos \varphi}{S} + \frac{1}{S} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (14\text{в})$$

и

$$\begin{aligned} \chi_{\theta} = & -\frac{\sin \varphi}{S^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \underbrace{\frac{(v \cos \varphi + w \sin \varphi) \sin \varphi}{S^2}}_{\chi_{\theta}^N} + \\ & + \underbrace{\frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)}_{\chi_{\theta}^M} + \left(v - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \frac{\cos \varphi}{RS}; \end{aligned} \quad (15\text{а})$$

$$\chi_{\varphi} = -\underbrace{\frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R^2}}_{\chi_{\varphi}^N} + \underbrace{\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)}_{\chi_{\varphi}^M}; \quad (15\text{б})$$

$$\chi_{\theta\varphi} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \underbrace{\frac{u \cos \varphi \sin \varphi}{S^2} - \frac{\sin \varphi}{S^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}}_{\chi_{\theta\varphi}^N} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\sin \varphi}{RS} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{u \cos \varphi}{RS} - \frac{2u \sin \varphi \cos \varphi}{S^2} - \frac{2}{RS} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{2 \cos \varphi}{S^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{RS} \frac{\partial v}{\partial \theta}}_{\chi_{\theta\varphi}^M}. \quad (15\text{в})$$

Зависимости (15) между кривизнами и перемещениями для срединной поверхности круговой тороидальной оболочки окончательно записываются так:

$$\chi_{\theta} = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{(v \cos \varphi + w \sin \varphi) \sin \varphi}{S^2} + \left(v - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \frac{\cos \varphi}{RS}; \quad (16\text{а})$$

$$\chi_{\varphi} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{w}{R^2}; \quad (16\text{б})$$

$$\chi_{\theta\varphi} = \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{u \cos \varphi}{S} + \frac{1}{S} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{\sin \varphi}{S} \right) - \frac{2}{RS} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{2 \cos \varphi}{S^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \quad (16\text{в})$$

Геометрические выражения (14) и (16) получены различным путем многими авторами. При этом деформационные выражения (14) совпадают, в то время как выражения для компонент χ_θ , χ_φ и $\chi_{\theta\varphi}$ в общем случае незначительно отличаются [10, 23], что в итоге приводит к почти одинаковым результатам при непосредственном трудоемком решении путем подстановки геометрических уравнений (14) и (16) в уравнения равновесия (4) с учетом физических уравнений.

Цель представленного выше схематического вывода деформационных уравнений заключается в обосновании упрощающих гипотез, обычно применяемых для решения таких задач. Наиболее известной из них является гипотеза Кармана о несжимаемости срединной поверхности поперечного сечения в окружном направлении, которая с учетом (14б) имеет следующий вид:

$$w = -\frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (17)$$

Такого рода гипотезы позволяют существенно упростить решение задачи. Однако это допущение недостаточно обосновано, и непосредственное применение гипотезы может приводить к качественным ошибкам. Наша трактовка упрощающих гипотез несколько иная. Во-первых, рассматриваемые ниже гипотезы касаются только деформирования гнба как оболочки и неприменимы для деформирования гнба как стержня. Во-вторых, они пригодны для медленно изменяющегося по координате x (или θ) напряженного состояния.

Примем, что величина Q_φ может быть выражена как функция одной компоненты перемещений v или w . Тогда согласно (7) и (4г) запишем

$$Q_\varphi = D_1(w)H\delta = D_2(v)H\delta, \quad (18a)$$

где D_1 и D_2 – некоторые операторы дифференцирования. Для переменных v и w , которые сравнительно медленно изменяются в зависимости от угла φ , т.е. значения этих функций сопоставимы с их производными, можем записать

$$Q_\varphi = K_1 w H \delta = K_2 v H \delta, \quad (18б)$$

где K_1 и K_2 – некоторые ограниченные константы, сопоставимые с единицей.

Суть овализации (или оболочечного решения) состоит в том, что согласно уравнениям равновесия (4а) и (4б) величины поперечных сил Q_φ соизмеримы с продольной N_φ и касательной L силами. Тогда, сопоставляя их с учетом (6), (14) и (18б), получаем

$$\frac{S}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{S} \right) + \frac{\partial v}{S \partial \theta} \approx \frac{2\delta K_1}{(1-\mu)} w; \quad (19a)$$

$$\frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \frac{w}{R} + \frac{\mu \partial u}{S \partial \theta} \approx K_1 \delta w. \quad (19б)$$

С учетом малости $K_1 \delta$, сопоставимости величин v и w и того, что все нагрузки и перемещения медленно изменяются по координате θ , условия (19) можно преобразовать следующим образом:

$$-\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \ll w; \quad -\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \ll v; \quad (20а)$$

$$\frac{S}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{S} \right) + \frac{\partial v}{S \partial \theta} \ll w, v. \quad (20б)$$

Тем не менее нельзя считать, что $\varepsilon_\varphi \equiv 0$ (см. уравнение (14б)), ведь малость одной величины определяется другой, с которой она сравнивается. Поэтому из этих выражений не следует, что, например, $-\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \ll \frac{R \partial u}{S \partial \theta}$.

Следовательно, при рассмотрении выражений для N_φ и N_x в физических уравнениях (6) неверно полагать $\varepsilon_\varphi \equiv 0$. Аналогично обосновывается, что в выражениях (14а) вполне правомочно выразить в соответствии с (17) переменную w через v или, наоборот, что позволяет сократить количество неизвестных. Однако нельзя считать, что $\gamma_{\theta\varphi} = 0$, а значит, и $L \equiv 0$.

Проведенный анализ показал, что выражения для кривизн (16) в соответствии с гипотезами (20) могут быть записаны через одну неизвестную функцию v :

$$\chi_\theta = \frac{1}{S^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi \partial \theta^2} - \frac{\left(v \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) \sin \varphi}{S^2} + \left(v + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\cos \varphi}{RS}; \quad (21а)$$

$$\chi_\varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad (21б)$$

$$\chi_{\theta\varphi} = \frac{2}{S} \frac{\partial v}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} - \frac{\sin \varphi}{S} \right) + \frac{2}{RS} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial \varphi^2} - \frac{2 \cos \varphi}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \theta}. \quad (21в)$$

Выражения (21) вместе с обосновывающими их гипотезами (20) являются частью новизны предлагаемого подхода. Полученные условия (20) для краткости назовем гипотезами малости.

2. Метод решения.

2.1. **Способ задания неизвестных.** Предложенный ниже метод основан на комбинированном выборе исходных неизвестных, а именно используются разложения в тригонометрические ряды осевых усилий $N_x(\theta, \varphi)$, касатель-

ных усилий $L(\theta, \varphi)$, продольных $u(\theta, \varphi)$ и тангенциальных $v(\theta, \varphi)$ перемещений, а не только вектора перемещений, как обычно. Это позволяет, с одной стороны, сохранить простоту решения, с другой – добиться большой точности решения.

Перемещения точек контура сечения гiba представляют собой сумму двух типов перемещений: связанных с перемещениями линии центров сечений (они не вызывают деформации контура сечения) и обусловленных деформированием контура сечения. Таким образом, для точек контура гiba (рис. 1) имеем

$$u = u_{л.ц} + u_{деф}; \quad (22a)$$

$$v = v_{л.ц} + v_{деф}; \quad (22б)$$

$$w = w_{л.ц} + w_{деф}. \quad (22в)$$

Линия центров обладает шестью степенями свободы: три перемещения и три угла поворота. Поэтому соответствующие перемещения точек контура могут быть представлены в виде

$$u_{л.ц} = U_0(\theta) + \theta_z(\theta)R \sin \varphi + \theta_y(\theta)R \cos \varphi; \quad (23a)$$

$$v_{л.ц} = -W_z(\theta) \sin \varphi - W_y(\theta) \cos \varphi + R\varphi_0(\theta); \quad (23б)$$

$$w_{л.ц} = W_z(\theta) \cos \varphi - W_y(\theta) \sin \varphi, \quad (23в)$$

где U_0, W_y, W_z – перемещения центра масс сечения, направленные вдоль базисных векторов локальной системы координат сечения xyz (рис. 1) соответственно; θ_y, θ_z – углы поворотов относительно осей y, z ; φ_0 – угол закручивания сечения; положительные направления θ_y, θ_z и φ_0 соответствуют вращению по часовой стрелке вокруг соответствующей оси, если смотреть вдоль оси из начала координат.

Перемещения деформирования контура, обусловленные в первую очередь овализацией, вызванной внешними изгибающими моментами, представим в виде бесконечных тригонометрических рядов. В общем виде они записываются следующим образом:

$$u_{деф} = TR[B_2^{out} \sin 2\varphi + B_3^{out} \cos 3\varphi + \dots]; \quad (24a)$$

$$v_{деф} = \Omega^{in} R[C_2^{in} \sin 2\varphi + C_3^{in} \cos 3\varphi + \dots] + \\ + \Omega^{out} R[C_2^{out} \cos 2\varphi + C_3^{out} \sin 3\varphi + \dots] \quad (24б)$$

и, используя гипотезу Кармана (17), что допустимо, если только не считать $\varepsilon_\varphi \equiv 0$ в физических выражениях для N_φ и N_x :

$$w_{\text{деф}} = \Omega^{in} R[-2C_2^{in} \cos 2\varphi + 3C_3^{in} \sin 3\varphi + \dots] + \\ + \Omega^{out} R[2C_2^{out} \sin 2\varphi - 3C_3^{out} \cos 3\varphi + \dots], \quad (24\text{в})$$

где $\Omega^{in} = \frac{k_z \bar{\sigma} B_0}{ER}$; $\Omega^{out} = \frac{k_y(\theta) \bar{\sigma} B_0}{ER}$; $T = \frac{k_x(\theta) \bar{\sigma}}{G}$; коэффициенты B_i^{out} , C_i^{in} , C_i^{out} – функции от безразмерных параметров α и λ ; индексами *in* и *out* обозначаются компоненты, связанные с изгибом в плоскости и из плоскости соответственно.

Таким образом, согласно (22)–(24) полная запись искомым перемещений при пространственном изгибе следующая:

$$u = U_0 + \theta_z R \sin \varphi + \theta_y R \cos \varphi + TR[B_2^{out} \sin 2\varphi + B_3^{out} \cos 3\varphi + \dots]; \quad (25\text{а})$$

$$v = -W_z \sin \varphi - W_y \cos \varphi - R\varphi_0 + \Omega^{in} R[C_2^{in} \sin 2\varphi + C_3^{in} \cos 3\varphi + \dots] + \\ + \Omega^{out} R[C_2^{out} \cos 2\varphi + C_3^{out} \sin 3\varphi + \dots]; \quad (25\text{б})$$

$$w = W_z \cos \varphi - W_y \sin \varphi + \Omega^{in} R[-2C_2^{in} \cos 2\varphi + 3C_3^{in} \sin 3\varphi + \dots] + \\ + \Omega^{out} R[2C_2^{out} \sin 2\varphi - 3C_3^{out} \cos 3\varphi + \dots]. \quad (25\text{в})$$

Осевые и касательные усилия также удобно представить в виде бесконечных тригонометрических рядов:

$$N_x(\theta, \varphi) = -k_z \bar{\sigma} t(\sin \varphi + A_2^{in} \cos 2\varphi + A_3^{in} \sin 3\varphi + \dots) - \\ - k_y(\theta) \bar{\sigma} t(\cos \varphi + A_2^{out} \sin 2\varphi + A_3^{out} \cos 3\varphi + \dots); \quad (25\text{г})$$

$$L(\theta, \varphi) = -k_x(\theta) \bar{\sigma} t(1 + L_2^{out} \cos 2\varphi + L_3^{out} \sin 3\varphi + \dots), \quad (25\text{д})$$

где A_i^{in} , A_i^{out} , L_i^{out} – коэффициенты, являющиеся безразмерными функциями от безразмерных параметров α и λ .

Благодаря принятой нормировке безразмерных моментов k_z , k_y , k_x первые коэффициенты при членах в скобках в разложениях $N_x(\theta, \varphi)$ и $L(\theta, \varphi)$ равны единице. Это следует из шести условий:

три условия равенства глобальных моментов (изгибающего момента в плоскости гиба относительно центра тяжести сечения, изгибающего момента из плоскости гиба, крутящего момента) соответствующим значениям, определяемым выражениями (1);

три условия равенства глобальных сил нулю, а именно:

$$\int_0^{2\pi} L(\theta, \varphi) R \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} L(\theta, \varphi) R \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} N_x(\theta, \varphi) R d\varphi = 0. \quad (26)$$

2.2 Последовательность решения. Преимущество предлагаемого метода решения в сравнении с описанными в литературных источниках состоит в том, что с его помощью можно получить две системы уравнений. Первая – это дифференциальные уравнения балочного типа для криволинейного стержня, связывающие углы поворотов и перемещения линии центров с внешними факторами нагружения (такие уравнения и их решение будут рассматриваться в сообщении 3), вторая – служит для определения безразмерных коэффициентов овализации в выражениях для перемещений и сил (25). При этом метод однозначно определяет само понятие коэффициента увеличения податливости гнба.

Принципиальная суть метода состоит в следующем.

1. В соответствии с принятыми гипотезами малости все компоненты выражаются через две основные неизвестные функции: $v(\theta, \varphi)$ (см. уравнения (21)), что позволяет рассматривать моменты, перерезывающие силы, кривизны только как функции одной этой переменной, и $N_x(\theta, \varphi)$, представленную в виде разложения (25г). Все остальные величины и функции в конечном итоге выражаются через v и N_x .

2. При выводе уравнений (21) использовались условия малости (20), которые являются неправильными в физических уравнениях (6). Поэтому значения N_φ и L необходимо определять только из уравнений равновесия (4а) и (4в) соответственно как функции $v(\theta, \varphi)$ и $N_x(\theta, \varphi)$. Таким образом, принятое разложение для L (25д) будет вспомогательным. Аналогично разложение для овализационных членов $u_{\text{деф}}$ (24а) также вспомогательное, и его коэффициенты B_i^{out} могут быть выражены из (6) и (14в) через коэффициенты разложений v и L .

3. Первым главным уравнением анализа, связывающим две основные функции v и N_x , является уравнение равновесия (4б), в котором N_φ и L уже определены из (4а) и (4в). Вторым, связывающим v и N_x , служит уравнение, полученное из (6):

$$N_x - \mu N_\varphi = Et \varepsilon_\theta, \quad (27)$$

причем компонента ε_θ определяется с использованием гипотезы Кармана.

Технически процедура решения такова:

1. Из уравнения равновесия (4а) выражаем окружные усилия N_φ :

$$N_\varphi S = -\frac{\partial}{\partial \varphi} (Q_\varphi S_\varphi) - R \frac{\partial Q_x}{\partial \theta} - N_x R \sin \varphi, \quad (28)$$

где осевое усилие N_x определяется по формуле (25г), а перерезывающие силы – из уравнений равновесия (4г) и (4д). В настоящем анализе, когда

напряженное состояние медленно изменяется по координате x , полагаем, что ввиду малости поперечные силы Q_x не влияют на решение и ими можно пренебречь.

2. Уравнение равновесия (4в) позволяет получить связь между коэффициентами L_i и A_i . С учетом малости поперечных сил Q_x уравнение (4в) записывается следующим образом:

$$2L \cos \varphi + \frac{1 + \alpha \sin \varphi}{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_x}{\partial \theta} = 0. \quad (29)$$

3. Уравнение равновесия (4б) с учетом (28) при пренебрежении силой Q_x имеет вид

$$-\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (Q_\varphi S) - R \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_x \sin \varphi) - Q_\varphi S + R \frac{\partial L}{\partial \theta} - N_x R \cos \varphi = 0, \quad (30)$$

где коэффициенты в разложении L определяются с учетом (29). Это уравнение – первое главное уравнение анализа.

4. Выражение для Q_φ с учетом (7), (21) и (24) может быть выражено из (4г) только как функция v , и с точностью до α^2 , принятой в данном анализе, записывается так:

$$Q_\varphi S = -H\delta \left[\frac{S}{R^3} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\cos \varphi}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} \right) - \frac{\mu \sin \varphi}{R^2} \left(v + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \quad (31)$$

5. Второе главное уравнение можно уточнить путем исключения усилия N_φ из (27) с помощью (28):

$$N_x S + \mu \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (Q_\varphi S_\varphi) + N_x R \sin \varphi \right) = E t \varepsilon_\theta S, \quad (32)$$

где значение ε_θ определяется из (14а) с учетом гипотезы Кармана.

6. Входящее в ε_θ выражение для перемещений u находится с использованием выражения (14в), подставленного в уравнение для L (6в):

$$LS = Gt \left(\frac{S}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - u \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad (33)$$

Таким образом, уравнения (29), (30), (32) и (33) с учетом (31) дают замкнутую систему для определения шести уравнений балочного типа и четырех наборов неизвестных коэффициентов: B_i^{out} , C_i^{in} (C_i^{out}), A_i^{in} (A_i^{out}), L_i^{out} .

3. Изгиб в плоскости.

3.1. **Решение задачи.** В качестве внешнего нагружения рассматривается изгибающий момент K_z , постоянный по координате x и определяемый выражением (1). При таких условиях нагружения касательные усилия L в гйбе будут равны нулю, что позволяет исключить из анализа уравнение (29), связывающее коэффициенты L_i и A_i . Таким образом, согласно общей процедуре решения задача сводится к решению трех уравнений анализа (30), (32) и (33). Неизвестные функции (25) при изгибе в плоскости представляются так:

$$u = u_0 + \theta_z R \sin \varphi; \quad (34a)$$

$$v = -w_y \cos \varphi + \Omega^{in} R [C_2^{in} \sin 2\varphi + C_3^{in} \cos 3\varphi + \dots]; \quad (34б)$$

$$w = -w_y \sin \varphi + \Omega^{in} R [-2C_2^{in} \cos 2\varphi + 3C_3^{in} \sin 3\varphi + \dots]; \quad (34в)$$

$$N_x(\theta, \varphi) = -k_z \bar{\sigma} t (\sin \varphi + A_2^{in} \cos 2\varphi + A_3^{in} \sin 3\varphi + \dots). \quad (34г)$$

Подставляя (34) с учетом определенных Q_φ (31) и ε_θ (14а) в три уравнения анализа (30), (32), (33), получаем три уравнения балочного типа:

одно физическое уравнение, связывающее угол поворота оси гйба с внешним изгибающим моментом:

$$\frac{\partial \theta_z}{B_0 \partial \theta} = - \frac{K^{in} k_z \bar{\sigma}}{ER} \quad (35a)$$

и два геометрических уравнения для связи перемещений:

$$\frac{\partial w_y}{B_0 \partial \theta} + \frac{u_0}{B_0} = \theta_z; \quad (35б)$$

$$\frac{\partial u_0}{B_0 \partial \theta} - \frac{w_y}{B_0} + \frac{k_z \bar{\sigma} \alpha}{2E} (1 + \mu) = 0, \quad (35в)$$

а также две группы уравнений для определения коэффициентов A_i^{in} и C_i^{in} , полученных из уравнений анализа (30) и (32) путем сравнения коэффициентов при одинаковых тригонометрических членах, т.е. $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$, $n = 1, 2, \dots$. В общем виде первая группа уравнений записывается так:

$$6A[(i+2)A_i^{in} - iA_{i+2}^{in}] = (i+1)^2 [(i+1)^2 - 1]^2 C_{i+1}^{in} + \\ + (-1)^{i+1} \frac{(i^2 + 1)[(i+1)^2 - 1]}{2} [(i+1) + \mu] \alpha C_i^{in} +$$

$$+(-1)^i \frac{[(i+2)^2 - 1][(i+1)^2 - 1]}{2} [(i+2)(i+1) + \mu] \alpha C_{i+2}^{in}. \quad (36a)$$

Вторая группа уравнений представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{i+1}^{in} + (-1)^i \frac{\alpha}{2} (1 + \mu) (A_i^{in} - A_{i+2}^{in}) &= C_i^{in} \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{2} \right) - C_{i+2}^{in} \left(\frac{i}{2} + \frac{3}{2} \right) + \\ + (-1)^i \frac{(i+1)^3 [(i+1)^2 - 1]}{12A} \mu \alpha C_{i+1}^{in} - \frac{(i^2 - 1)(i+1)}{24A} [i(i+1) + \mu] \mu \alpha^2 C_i^{in} + \\ + \frac{[(i+2)^2 - 1](i+1)}{24A} [(i+2)(i+1) + \mu] \mu \alpha^2 C_{i+2}^{in}, \end{aligned} \quad (36b)$$

где $i \in (1, 2, \dots, 2k)$; A – константа,

$$A = \frac{R^4 (1 - \mu^2)}{B_0^2 t^2} = (1 - \mu^2) \lambda^2. \quad (37)$$

Величина

$$K^{in} = 1 - \frac{\alpha}{2} A_2^{in} (1 + \mu) + \frac{3}{2} C_2^{in} - \frac{\mu \alpha^2}{4A} C_2^{in} \left(1 + \frac{\mu}{2} \right) \quad (38)$$

в уравнении (35а) называется коэффициентом увеличения податливостигиба по сравнению с таковым прямой трубы при изгибе в плоскости. Интересно заметить, что только коэффициенты A_2^{in} и C_2^{in} дают ненулевой вклад в изменение коэффициента K^{in} .

Уравнения (36) имеют бесконечное число членов. Учитывая некоторое начальное число членов, можно получать любые приближения по параметру λ . Количество уравнений в каждой группе одинаково и равно $2k$, где k – порядок приближения. Максимальный индекс коэффициентов A_i^{in} , C_i^{in} , используемых в k -м приближении, равен $j = 2k + 1$. Например, в первом приближении уравнения для определения коэффициентов A_i^{in} , C_i^{in} записываются следующим образом:

$$\begin{cases} 6A(3 - A_3^{in}) = 36C_2^{in} - 12\alpha C_3^{in} (6 + \mu); \\ 6A(4A_2^{in}) = 9 \cdot 64C_3^{in} - \frac{3 \cdot 8\alpha}{2} C_2^{in} (6 + \mu); \\ A_2^{in} - \frac{\alpha}{2} (1 + \mu) (1 - A_3^{in}) = -\frac{2\mu\alpha}{A} C_2^{in} + \frac{4\mu\alpha^2}{A} C_3^{in} + \frac{2\mu^2\alpha^2}{3A} C_3^{in} - 2C_3^{in}; \\ A_3^{in} + \frac{\alpha}{2} (1 + \mu) A_2^{in} = \frac{3^3 \cdot 8\mu\alpha}{12A} C_3^{in} - \frac{3 \cdot 3\mu\alpha^2}{24A} C_2^{in} (6 + \mu) + \frac{1}{2} C_2^{in}. \end{cases} \quad (39)$$

При рассмотрении второго приближения по параметру λ система разрешающих уравнений (39) дополнится еще четырьмя уравнениями для определения коэффициентов A_i^{in} и C_i^{in} . При решении задачи в третьем приближении по параметру λ имеем дополнительно еще четыре уравнения для коэффициентов A_i^{in} и C_i^{in} . Таким образом, получается система ленточного типа с максимальным числом неизвестных в одном уравнении, равном пяти. Такие системы достаточно легко решаются.

С определением коэффициентов K^{in} и A_i^{in} , C_i^{in} задача является формально завершенной. Наличие этих коэффициентов позволяет найти $N_x(\varphi)$ по формуле (25г), $Q_\varphi(\varphi)$ и M_φ , M_x – по (31) и (7) с учетом (24) и (16), а затем по (28) рассчитать $N_\varphi(\varphi)$.

Отметим два преимущества полученного решения вообще и, в частности, для податливости (38) по сравнению с имеющимися в литературных источниках. Во-первых, оно получено в результате точного решения дифференциальных уравнений равновесия и геометрических уравнений, а не путем минимизации тех или иных функционалов и включает коэффициент Пуассона μ в явном виде, а значит, применимо для широкого класса материалов. Во-вторых, постановка задачи проведена таким образом, что безразмерный параметр α , входящий в множитель $S(\varphi)$, присутствует в уравнениях в первой степени. Поэтому точность решения определяется только номером приближения по λ . В частности, при $\lambda \rightarrow 0$ получаем точное решение для сплошного криволинейного бруса уже в нулевом приближении по λ .

Приведем некоторые аналитические решения. В первом приближении выражение для K^{in} согласно (38) и с учетом коэффициентов A_2^{in} , C_2^{in} , определяемых из системы уравнений (39), записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 K^{in} = & \frac{-3456 - 144\mu\alpha^4 - 288\alpha^2 A + 82\mu^3\alpha^4 + 22\mu^4\alpha^4 -}{-216\alpha^4 - 144\alpha^2 A + 1728\alpha^2 - 3456 - 576A +} \dots \rightarrow \\
 \rightarrow & \dots \frac{-3168A + 576\mu\alpha^2 - 768\mu^2\alpha^2 + 2592\alpha^2 - 240A^2 - 120\mu\alpha^2 A -}{+144\mu\alpha^2 - 120\mu^2\alpha^2 - 12\mu\alpha^2 A + 2\mu^2\alpha^2 A + 42\mu^2\alpha^4 + 13\mu^3\alpha^4 +} \dots \rightarrow \\
 \rightarrow & \dots \frac{-340\mu^2\alpha^2 A + 168\mu^2\alpha^4 - 432\alpha^4}{+\mu^4\alpha^4 - 36\mu\alpha^4 - 24A^2} \dots \quad (40)
 \end{aligned}$$

При $\alpha \rightarrow 0$ в соответствии с решениями (36) значения K равны:

$$K_1^{in} = \frac{12 + 10A}{12 + A} \quad (41a)$$

для первого приближения;

$$K_2^{in} = \frac{4800 + 4136A + 105A^2}{4800 + 536A + 3A^2} \quad (41a)$$

для второго приближения;

$$K_3^{in} = \frac{2822400 + 2446176A + 73912A^2 + 252A^3}{2822400 + 329376A + 3280A^2 + 3A^3} \quad (41b)$$

для третьего приближения.

В соответствии с уравнениями (36) достаточно просто, особенно при использовании программ формальных математических вычислений типа MAPLE, MATHCAD, получить также последующие приближения для K^{in} в аналитическом виде, которые из-за громоздкости не приводятся.

Представленные решения при $\alpha \rightarrow 0$ почти идентичны решениям Кармана для коэффициента податливости в соответствующих приближениях. Различие состоит лишь в том, что в формулах Кармана используется коэффициент λ^2 , в наших же формулах коэффициент A , согласно (37), содержит дополнительный множитель $(1 - \mu^2)$. Это связано с тем, что в подходе Кармана и последующих решениях фактически используется вышеуказанная зависимость $N_\varphi = \mu N_x$, в то время как в предложенном подходе N_φ определяется из первого уравнения равновесия (4а). Действительно, если бы в формуле (27) принять $N_\varphi = \mu N_x$ и использовать это уравнение вместо (32), то результаты, полученные авторами и Карманом при малых α , были бы идентичны.

При $\mu = 0,3$, $\alpha \rightarrow 0$ и значениях $\lambda > 1$ полученное и представленное графически решение для K^{in} практически совпадает с известной формулой Кларка и Рейсснера [17]:

$$K_{K\&R} = 1,65\lambda. \quad (42)$$

Тем не менее отметим, что настоящее решение является более общим, так как учитывает коэффициент α . В [24] приведена следующая зависимость для коэффициента увеличения податливости:

$$K_K = \frac{\lambda}{0,58}, \quad (43)$$

который при значениях $\lambda > 3$ совпадает с решением по ПНАЭ [20] и отличается от полученного на множитель $\sqrt{1 - \mu^2}$.

3.2. Анализ полученного решения. Точность полученного решения определяется порядком приближения по параметру λ . Поскольку с увеличением порядка приближения решение значительно усложняется, на практике полезно знать границы применимости таких приближений. На рис. 2 показано, как изменяется коэффициент увеличения податливости K^{in} в зависимости от λ , рассчитанный по первому и второму приближениям при

$\alpha \rightarrow 0$. Аналогичные графики построены для третьего и четвертого приближений. По этим графикам границы применимости приближений по λ можно оценить так:

$$\begin{cases} \text{для первого} & \lambda < 3; \\ \text{для второго} & \lambda < 10; \\ \text{для третьего} & \lambda < 30. \end{cases} \quad (44)$$

Такие границы должны обеспечивать достаточную инженерную точность при проведении расчетов гнбов труб. Однако они справедливы только при определении податливости гнба. Расчеты моментных или силовых компонент по таким границам приводят к существенным неточностям. На рис. 3 представлены зависимости напряжений σ от M_φ , рассчитанные по первому и второму приближениям по λ . Видно, что достаточная точность расчета (5...10% максимальных значений) достигается только при $\lambda = 1,5$, что в два раза меньше, чем предельная граница (44). Аналогичные результаты получены также при анализе решений для моментных и силовых компонент при втором, третьем и четвертом приближениях. Следовательно, необходимо изменить установленные ранее границы применимости приближений по λ (44). Предлагаемые границы приведены в таблице. Для сравнения там же указаны границы, установленные в [5] и [25].

Границы применимости приближений по λ

Приближение	[5]	[25]	Наши результаты
Первое	< 2,86	< 2,00	< 1,5
Второе	< 10,00	< 6,25	< 6,0
Третье	< 20,00	< 12,50	< 15,0
Четвертое	< 33,30	< 25,00	< 25,0

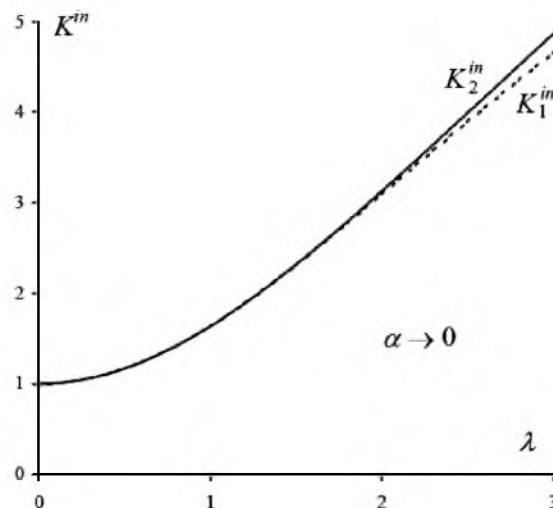


Рис. 2. Изменение коэффициента увеличения податливости K^{in} при $\alpha \rightarrow 0$ в зависимости от λ (K_1^{in} и K_2^{in} – коэффициенты увеличения податливости, рассчитанные по первому и второму приближениям соответственно).

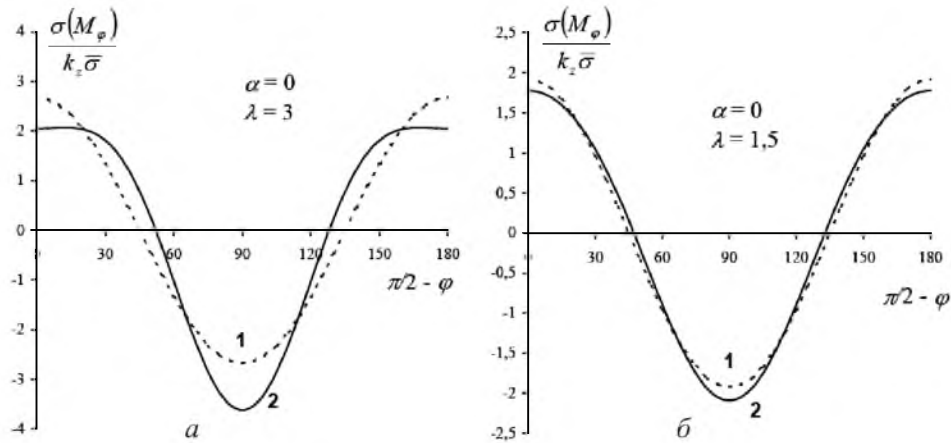


Рис. 3. Сопоставление зависимостей напряжений от $M_\varphi(\varphi)$, рассчитанных по первому (1) и второму (2) приближениям при разных λ .

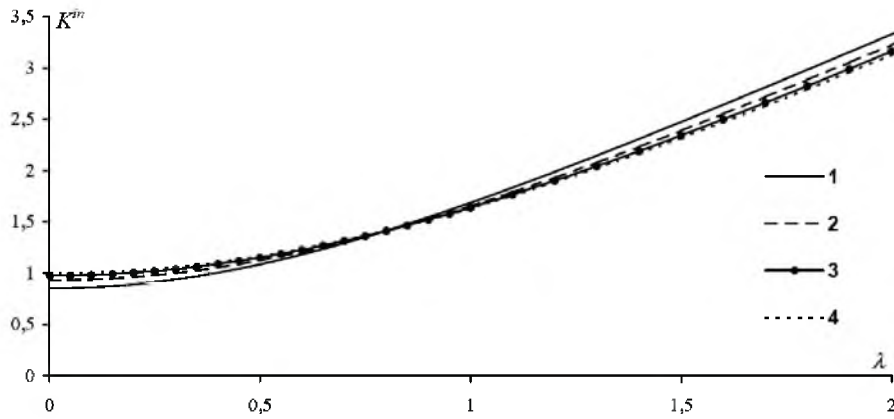


Рис. 4. Влияние параметра α на податливость. (Здесь и на рис. 5: 1 – $\alpha = 0,7$; 2 – $\alpha = 0,5$; 3 – $\alpha = 0,3$; 4 – $\alpha = 0$.)

Кроме того, на точность приближений влияет параметр α . Рис. 4 иллюстрирует влияние α на изменение податливости при изгибе в плоскости гiba, рис. 5 – влияние α на распределение напряжений на внутренней поверхности гiba от усилий M_φ , M_x , N_φ , N_x при $\lambda = 6$. Представленные решения получены при четвертом приближении по λ . Как видно, неучет параметра α приводит к некоторой ошибке в определении коэффициента податливости гiba, моментов и сил. Наибольшее влияние параметр α оказывает на распределение усилий N_φ .

3.3. Примеры. Для проверки точности полученных решений с помощью предлагаемого метода расчета гибов труб рассмотрим примеры вычисления напряжений σ_φ и σ_x [26].

Пример 1. Геометрические размеры гiba трубы следующие: $B_0/R = 3,07$, $B_0t/R^2 = 0,147$. На рис. 6 показано распределение осевых σ_x и окружных σ_φ напряжений на внутренней поверхности гiba. Там же представлены результаты численных расчетов, полученные с помощью известных вычислительных программ ADINAP [25], MARC [27] и расчетного элемента RB1

[26]. Применение предлагаемого метода расчета свидетельствует о хорошем соответствии между полученными результатами и данными численных расчетов и эксперимента.

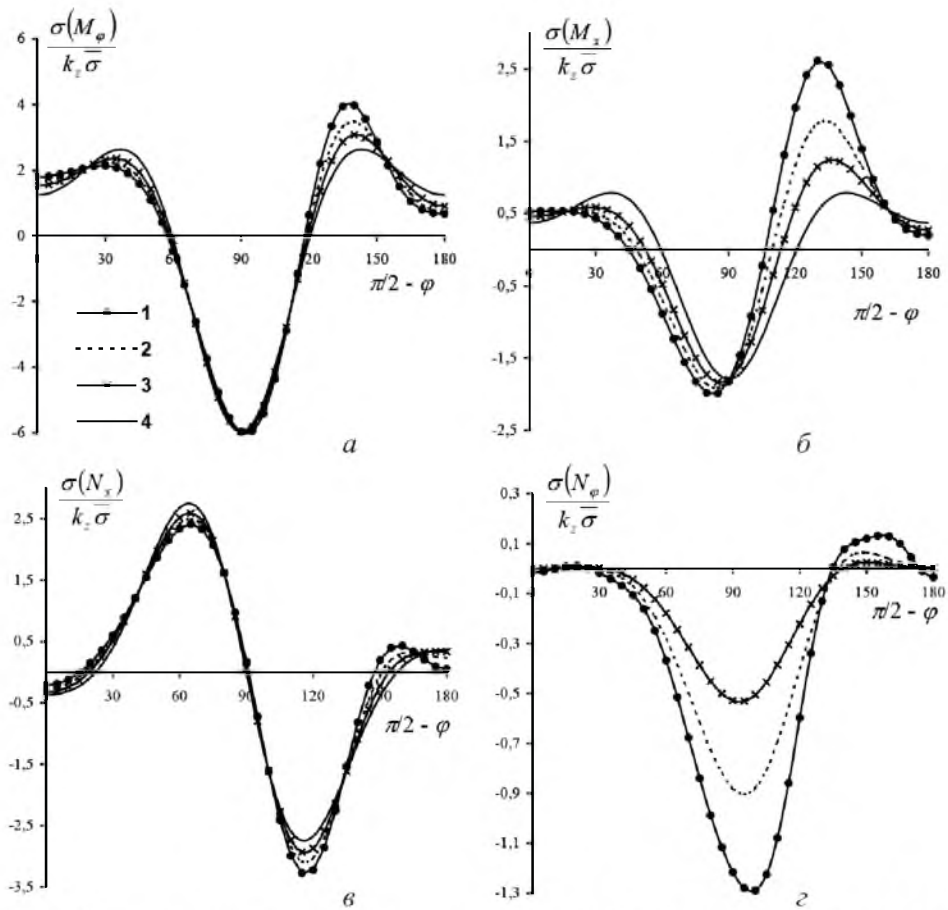


Рис. 5. Влияние параметра α на напряжения от M_φ - *a*; M_x - *б*; N_x - *в*; N_φ - *г* при $\lambda = 6$.

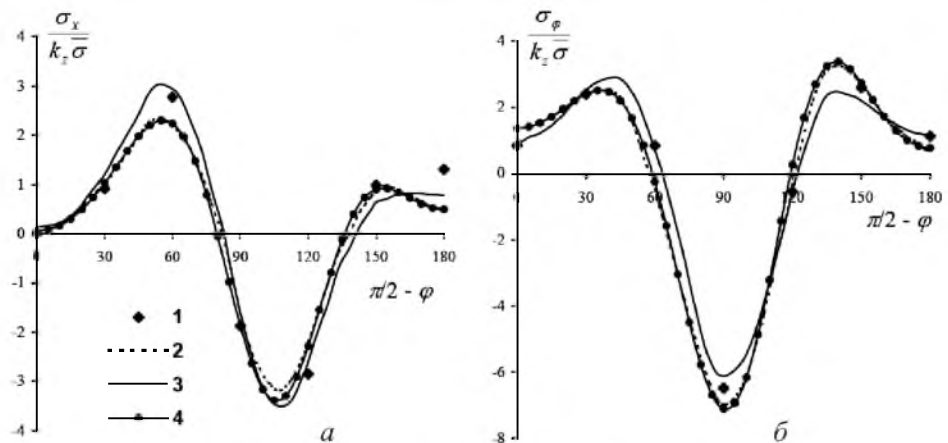


Рис. 6. Распределение осевых σ_x (*a*) и окружных σ_φ (*б*) напряжений на внутренней поверхности гiba: 1 - ADINAP; 2 - MARC; 3 - RB1; 4 - наши результаты.

Пример 2. Геометрические размеры гiba трубы таковы: $B_0/R = 2,88$, $B_0 t/R^2 = 0,108$. На рис. 7 представлены зависимости осевых σ_x и окружных σ_φ напряжений на внешней поверхности гiba. Там же приведены результаты численных расчетов [26, 28] и экспериментальные данные [28]. В этом случае также наблюдается хорошее соответствие результатов.

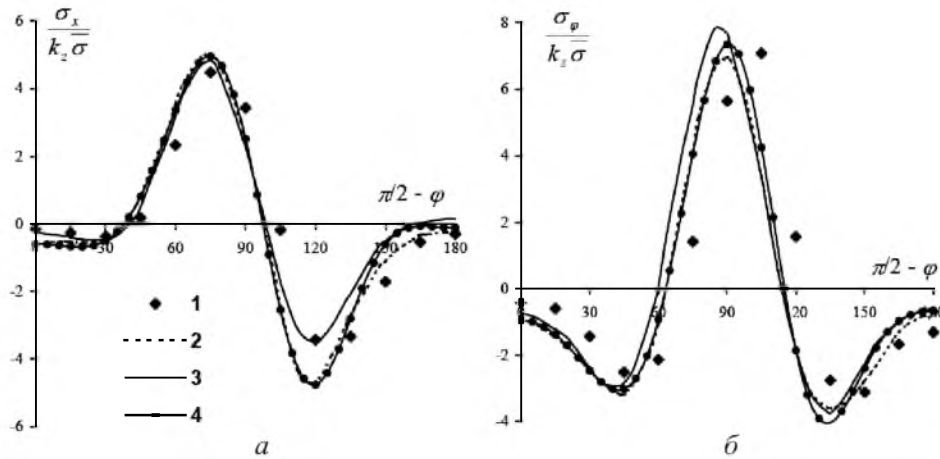


Рис. 7. Распределение осевых σ_x (а) и окружных σ_φ (б) напряжений на внешней поверхности гiba: 1 – эксперимент; 2 – данные [28]; 3 – PB1; 4 – наши результаты.

4. Изгиб из плоскости. Проблеме определения податливости и напряжений при изгибе из плоскости гiba в литературных источниках уделяется меньше внимания. Это обусловлено тем, что глобальные изгибающий K_y и крутящий K_x моменты связаны между собой дифференциальными зависимостями (2) и не могут рассматриваться отдельно и приниматься константами по координате x . Поэтому в уравнениях равновесия гiba (4) необходимо дополнительно учитывать усилия L и $M_{\varphi x}$, что значительно усложняет задачу. Во многих исследованиях сила L считается постоянной по сечению гiba, т.е. не зависящей от координаты φ . Однако тогда не выполняется дифференциальное уравнение равновесия (4в). С помощью описанного выше подхода можно сравнительно легко получить и учесть реальное распределение L как функцию двух координат θ и φ . Постановка задачи и способ ее решения позволяют также учесть касательный момент $M_{\varphi x}$, входящий в уравнения равновесия (4).

4.1. Решение задачи. Рассмотрим изгиб из плоскости гiba трубы с учетом изгибающего K_y и крутящего K_x моментов, зависящих от координаты x . Согласно общей процедуре решения, задача сводится к решению четырех уравнений анализа: (29), (30), (32), (33). Неизвестные функции (25) при изгибе из плоскости записываются так:

$$u = \theta_y R \cos \varphi + TR[B_2^{out} \sin 2\varphi + B_3^{out} \cos 3\varphi + \dots]; \quad (45a)$$

$$v = -W_z \sin \varphi + R\varphi_0 + \Omega^{out} R[C_2^{out} \cos 2\varphi + C_3^{out} \sin 3\varphi + \dots]; \quad (45b)$$

$$w = W_z \cos \varphi + \Omega^{out} R [2C_2^{out} \sin 2\varphi - 3C_3^{out} \cos 3\varphi + \dots]; \quad (45в)$$

$$N_x(\theta, \varphi) = -k_y(\theta) \bar{\sigma} t (\cos \varphi + A_2^{out} \sin 2\varphi + A_3^{out} \cos 3\varphi + \dots); \quad (45г)$$

$$L(\theta, \varphi) = -k_x(\theta) \bar{\sigma} t (1 + L_2^{out} \cos 2\varphi + L_3^{out} \sin 3\varphi + \dots). \quad (45д)$$

С использованием (45) записываем выражения для Q_φ (31) и ε_θ (14а). Подставив их в уравнения анализа (29), (30), (32), (33) с учетом (45г) и (45д), получим три уравнения балочного типа:

два физических уравнения, связывающих углы поворота оси гнба с внешними изгибающими и крутящими моментами:

$$\frac{\partial \varphi_0}{B_0 \partial \theta} - \frac{\theta_y}{B_0} = -\frac{k_x \bar{\sigma}}{GR}, \quad (46а)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{B_0 \partial \theta} + \frac{\varphi_0}{B_0} = -\frac{K^{out} k_y \bar{\sigma}}{ER} \quad (46б)$$

и одно геометрическое уравнение для связи перемещений:

$$\frac{\partial w_z}{B_0 \partial \theta} = -\theta_y + \frac{\bar{\tau}}{G} \alpha K^{кр}, \quad (46в)$$

где K^{out} – коэффициент увеличения податливости гнба при изгибе из плоскости,

$$K^{out} = 1 + \frac{\alpha}{2} A_2^{out} (1 + \mu) + \frac{3}{2} C_2^{out} - \frac{\mu \alpha^2}{4A} C_2^{out} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right); \quad (47)$$

$K^{кр}$ – некоторый поправочный коэффициент,

$$K^{кр} = 1 - \frac{1}{2} L_2^{out} - \frac{3}{2} B_2^{out}. \quad (48)$$

Отметим, что аналогично изгибу в плоскости только коэффициенты A_2^{out} и C_2^{out} дают ненулевой вклад в изменение податливости.

Дополнительно уравнения анализа (29), (30), (32), (33) позволяют получить путем сравнения коэффициентов при одинаковых тригонометрических членах ($\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$, $n = 1, 2, \dots$) четыре группы уравнений для определения коэффициентов A_i^{out} , B_i^{out} , C_i^{out} и L_i^{out} . В общем виде эти уравнения записываются так:

для первой группы, получаемой из (29):

$$\frac{i+2}{2}L_i^{out} - \frac{i}{2}L_{i+2}^{out} + (-1)^i \frac{i+1}{\alpha}L_{i+1}^{out} = 2A_{i+1}^{out}; \quad (49a)$$

для второй группы – из (30):

$$\begin{aligned} & 6A[(i+2)A_i^{out} - iA_{i+2}^{out} - L_{i+1}^{out}] = \\ & = (-1)^i \frac{(i^2-1)[(i+1)^2-1]}{2} [i(i+1) + \mu] \alpha C_i^{out} + (i+1)^2 [(i+1)^2-1]^2 C_{i+1}^{out} + \\ & + (-1)^{i+1} \frac{[(i+2)^2-1][(i+1)^2-1]}{2} [(i+2)(i+1) + \mu] \alpha C_{i+2}^{out}; \quad (49б) \end{aligned}$$

для третьей группы – из (32):

$$\begin{aligned} & A_{i+1}^{out} + (-1)^{i+1} \frac{\alpha}{2}(1+\mu)(A_i^{out} - A_{i+2}^{out}) = C_i^{out} \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{2} \right) - C_{i+2}^{out} \left(\frac{i}{2} + \frac{3}{2} \right) + \\ & + (-1)^{i+1} \frac{(i+1)^3 [(i+1)^2-1]}{12A} \mu \alpha C_{i+1}^{out} - \frac{(i^2-1)(i+1)}{24A} [i(i+1) + \mu] \mu \alpha^2 C_i^{out} + \\ & + \frac{[(i+2)^2-1](i+1)}{24A} [(i+2)(i+1) + \mu] \mu \alpha^2 C_{i+2}^{out} - \alpha(1+\mu)B_{i+1}^{out}; \quad (49в) \end{aligned}$$

для четвертой группы – из (33):

$$\begin{aligned} & (-1)^i (i+1)B_{i+1}^{out} - \frac{\alpha}{2} [(i-1)B_i^{out} - (i+3)B_{i+2}^{out}] + \frac{C_{i+1}^{out}}{1+\mu} = \\ & = L_{i+1}^{out} + (-1)^i \frac{\alpha}{2} (L_i^{out} - L_{i+2}^{out}), \quad (49г) \end{aligned}$$

где $i \in (1, 2, \dots, 2k)$.

Количество уравнений в каждой группе определяется порядком приближения k и равно $2k$. Максимальный индекс коэффициентов A_i^{out} , B_i^{out} , C_i^{out} и L_i^{out} , используемых в k -м приближении, равен $j = 2k + 1$. Всего для k -го приближения используются $8k$ уравнений. Ограничиваясь первым приближением по параметру λ , запишем следующую систему разрешающих уравнений для коэффициентов A_i^{out} , B_i^{out} , C_i^{out} и L_i^{out} :

$$\begin{cases}
A_2^{out} + \frac{\alpha}{2}(1+\mu)(1-A_3^{out}) = \frac{2\mu\alpha}{A}C_2^{out} + \frac{4\mu\alpha^2}{A}C_3^{out} + \\
+ \frac{2\mu^2\alpha^2}{3A}C_3^{out} - 2C_3^{out} - \alpha(1+\mu)B_2^{out}; \\
A_3^{in} - (1+\mu)A_2^{out} = -\frac{3^3 \cdot 8\mu\alpha}{12A}C_3^{out} - \frac{3 \cdot 3\mu\alpha^2}{24A}C_2^{out}(6+\mu) + \\
+ \frac{1}{2}C_2^{out} - \alpha(1+\mu)B_3^{out}; \\
-\frac{1}{2}L_3^{out} - \frac{2}{\alpha}L_2^{out} = 2A_2^{out}; \\
2L_2^{out} + \frac{3}{\alpha}L_3^{out} = 2A_3^{out}; \\
6A(3 - A_3^{out} - L_2^{out}) = 36C_2^{out} + 12\alpha C_3^{out}(6+\mu); \\
6A(4A_2^{out} - L_3^{out}) = 9 \cdot 64C_3^{out} + \frac{3 \cdot 8\alpha}{2}C_2^{out}(6+\mu); \\
L_2^{out} + \frac{\alpha}{2}L_3^{out} = -2B_2^{out} + 2\alpha B_3^{out} + \frac{1}{1+\mu}C_2^{out}; \\
L_3^{out} + \frac{\alpha}{2}L_2^{out} = 3B_3^{out} - \frac{\alpha}{2}B_2^{out} + \frac{1}{1+\mu}C_3^{out}.
\end{cases} \quad (50)$$

При рассмотрении каждого последующего приближения по параметру λ система разрешающих уравнений дополняется еще восьмью уравнениями для определения коэффициентов A_i^{out} , B_i^{out} , C_i^{out} и L_i^{out} .

Сравним уравнения (38) и (47). Данные уравнения формально отличаются знаком при коэффициентах A_2 , которые пропорциональны α и входят в указанные уравнения с тем же множителем. Коэффициенты A_2 присутствуют в основном с разными знаками в системах, в которых они определяются, например (39) и (50). Поэтому вторые слагаемые в (39) и (50) совпадают по крайней мере с точностью до α^2 . Что касается коэффициентов C_2 , то из сопоставления уравнений (36) и (49) видно, что они совпадают с точностью до множителя α включительно. Таким образом, выражения (38) и (47) совпадают с точностью до α^2 . На рис. 8 приведено сопоставление коэффициентов увеличения податливости при изгибе в плоскости и из плоскости при $\alpha = 0,7$.

4.2. Пример. Для проверки точности полученных решений с помощью предлагаемого метода расчета гибов труб рассмотрим пример вычисления напряжений σ_φ и σ_x при изгибе из плоскости [26].

Рассматривается гиб трубы с такими геометрическими характеристиками: $B/R = 5,78$; $Bt/R^2 = 0,466$. На рис. 9 показаны зависимости осевых σ_x и окружных σ_φ напряжений на внешней поверхности гiba. Там же представлены результаты численных расчетов, полученных с помощью

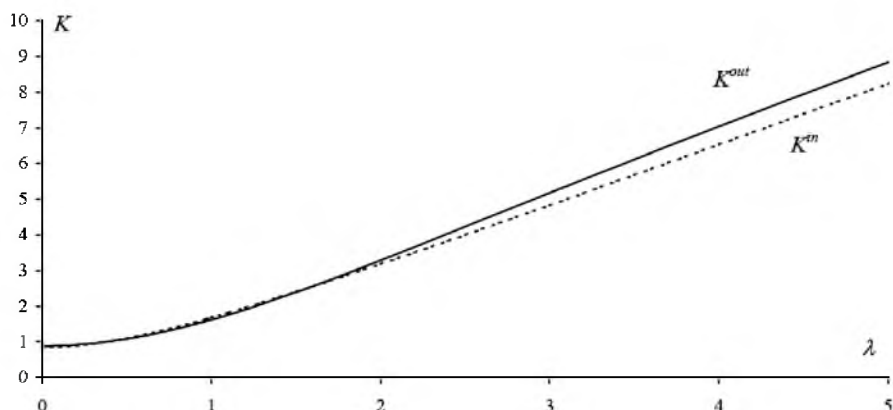


Рис. 8. Сопоставление коэффициентов увеличения податливостей при изгибе в плоскости K^{in} и из плоскости K^{out} .

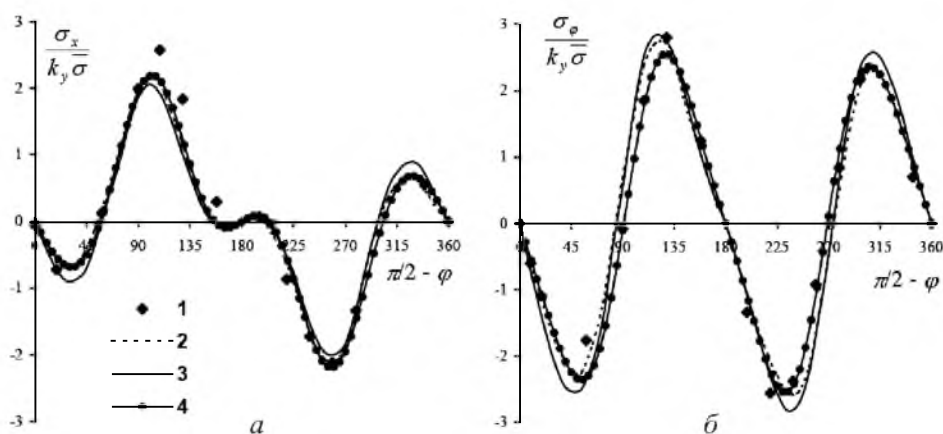


Рис. 9. Распределение осевых σ_x (а) и окружных σ_φ (б) напряжений на внешней поверхности гiba: 1 – эксперимент; 2 – ADINAP; 3 – PB1; 4 – наши результаты.

известной вычислительной программы ADINAP [25] и расчетного элемента PB1 [26], а также экспериментальные данные [29]. Наблюдается хорошее соответствие между полученными результатами и данными численных расчетов и эксперимента.

Заключение. Для тороидальных оболочек на основе уравнений теории упругости получены геометрические уравнения, связывающие компоненты перемещений с деформациями. При анализе овализации упругих круговых тороидальных оболочек, возникающей при приложении внешних пространственных изгибающих моментов, предложено использовать новый аналитический метод, основанный на точном решении дифференциальных уравнений равновесия и геометрических уравнений, а не на минимизации тех или иных функционалов. В качестве неизвестных функций, подлежащих определению, выбираются продольное и касательное усилия, а также тангенциальное и продольное перемещения в виде их разложения по тригонометрическим функциям. При этом известные гипотезы малости, позволяющие пренебречь определенными комбинациями перемещений, используются

только после исключения из условий равновесия (4) окружного N_φ и касательного L усилий. Это дает возможность получать точные решения для всех компонент поля напряжений, и при предельном переходе к прямой трубе не приведет к неверной связи между осевыми и окружными усилиями.

Использование в постановочных уравнениях одновременно оболочечных (локальных) и балочных (глобальных) переменных позволило установить интегральные характеристики сечения и получить общие уравнения для деформирования оси оболочки как линии центров масс поперечных сечений.

Точность предлагаемого метода проверялась путем сопоставления рассчитанных осевых σ_x и окружных σ_φ напряжений с данными, приведенными в литературных источниках.

Резюме

Запропоновано новий метод для аналізу напружено-деформованого стану пружних кругових тороїдальних оболонок, заснований на виборі у якості невідомих функцій зусиль і переміщень. Метод дозволяє досліджувати явище овалізації згину, що виникає при прикладенні зовнішніх просторових згинальних моментів. Отримано геометричні рівняння, що зв'язують компоненти переміщень із деформаціями, і введено гіпотези малості, що дозволяє знехтувати певними комбінаціями переміщень при розгляді деформування оболонки. Показано, що гіпотеза Кармана про недеформованість серединної поверхні труби може використовуватися тільки після виключення окружного зусилля з рівнянь рівноваги. Установлено границі застосовності отриманих рішень у залежності від порядку наближення по параметру гнучкості. Виведено диференціальні рівняння балкового типу для криволінійного стрижня, що зв'язують кути поворотів і переміщення лінії центрів із зовнішніми факторами навантаження. Отримані результати зіставляються з наведеними в літературних джерелах.

1. *Karman Th.* Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre // *Z. Ver. de ut. Ing.* – 1911. – **55**. – S. 1889 – 1895.
2. *Brazier L. G.* On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections // *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* – 1927. – **116**, No. 773. – P. 104 – 114.
3. *Аксельрад Э. Л.* Гибкие оболочки. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
4. *Аксельрад Э. Л., Ильин В. П.* Расчет трубопроводов. – Л.: Машиностроение, 1972. – 240 с.
5. *Костовецкий Д. Л.* Прочность трубопроводных систем энергетических установок. – Л.: Энергия, 1973. – 264 с.
6. *Kuznetsov V. V. and Levyakov S. V.* Nonlinear pure bending of toroidal shells of arbitrary cross-section // *Int. J. Sol. Struct.* – 2001. – **38**. – P. 7343 – 7354.

7. *Shalaby M. A. and Younan M. Y. A.* Effect of internal pressure on elastic-plastic behavior of pipe elbows under in-plane loading // *J. Pres. Ves. Techn.* – 1999. – **121**. – P. 400 – 406.
8. *Mourad H. M. and Younan M. Y. A.* Limit-load analysis of pipe bends under out-of-plane moment loading and internal pressure // *Ibid.* – 2002. – **124**. – P. 32 – 37.
9. *Karamanos S. A.* Bending instabilities of elastic tubes // *Int. J. Sol. Struct.* – 2002. – **39**. – P. 2059 – 2085.
10. *Ming R. S., Pan J., and Norton M. P.* Free vibrations of elastic circular toroidal shells // *Appl. Acoustics.* – 2002. – **63**. – P. 513 – 528.
11. *Redecop D.* Dynamic response of curved pipes // *Int. J. Pres. Ves. & Piping.* – 1997. – **70**. – P. 167 – 172.
12. *Redecop D.* Dynamic response of short curved pipes to impulsive loading // *Ibid.* – 1995. – **61**. – P. 41 – 47.
13. *Huang D., Redecop D., and Xu B.* Natural frequencies and mode shapes of curved pipes // *Comp. and Struct.* – 1977. – **63**, No. 3. – P. 465 – 473.
14. *Natarajan R. and Mirza S.* Effect of internal pressure on flexibility factors in pipe elbows with end constraints // *J. Pres. Ves. Techn.* – 1985. – **107**. – P. 60 – 63.
15. *Orynyak I. V.* First approximation to elastic analysis of end-effects in pipe bends // *Int. J. Pres. Ves. & Piping.* – 2002. – **72**, No. 2. – P. 157 – 164.
16. *Fonseca E. M. M., Melo F. J. M. Q., and Oliveira C. A. M.* Determination of flexibility factors in curved pipes with end restraints using a semi-analytic formulation // *Ibid.* – 2002. – **79**. – P. 829 – 840.
17. *Clark R. A. and Reissner E.* Bending of curved tubes // *Adv. Appl. Mech.* – 1951. – **2**. – P. 93 – 122.
18. *Zhang Y. M., Mirfakhraei P., Xu B., and Redecop D.* A computer program for the elastostatics of a toroidal shell using the differential quadrature method // *Int. J. Pres. Ves. & Piping.* – 1998. – **75**. – P. 919 – 929.
19. *Орыняк И. В., Марчук Я. С., Радченко С. А.* Решение для упругогогиба трубы на основе гипотезы плоских сечений // *Вестн. Нац. техн. ун-та Украины “КПИ”*. – 2002. – **43**. – С. 60 – 67.
20. *ПНАЭ Г-7-002-86.* Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.
21. *СНиП 2.04.12-86.* Расчет на прочность стальных трубопроводов. Строительные нормы и правила. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1986. – 16 с.
22. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
23. *Redecop D. and Xu B.* Vibration analysis of toroidal panels using the differential quadrature method // *Thin-Walled Struct.* – 1999. – **34**. – P. 217 – 231.

24. Камерштейн А. Г., Рождественский В. В., Ручимский М. Н. Расчет трубопроводов на прочность. Справочная книга. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Недра, 1969. – 440 с.
25. Bathe K. J. and Almeida C. A. A simple and effective pipe elbow element – linear analysis // J. Appl. Mech. – 1980. – **47**. – P. 93 – 100.
26. Meckenzie D. and Bell R. A simple pipe bend element for piping flexibility analysis // Int. J. Pres. Ves. & Piping. – 1992. – **51**, No. 1. – P. 85 – 106.
27. Sobel L. In-plane bending of elbows // Comp. and Struct. – 1977. – **7**. – P. 701 – 715.
28. Ohtsubo H. and Watanabe O. Flexibility and stress factors of pipe bends – an analysis by finite ring method // J. Pres. Ves. Techn. – 1977. – **99**. – P. 281 – 290.
29. Smith R. T. and Ford H. Experiments on pipelines and pipe bends subject to three-dimensional loading // J. Mech. Eng. Sci. – 1967. – **9**. – P. 124 – 137.

Поступила 27. 02. 2003