УДК 539.376

Моделирование связанного процесса деформирования и трещинообразования упругохрупких материалов

Д. В. Бабич

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Предложена приближенная модель совместного деформирования и микроповреждения упругохрупких материалов в виде образования системы стохастически расположенных плоских микротрещин.

Ключевые слова: моделирование, связанный процесс, деформирование, трещинообразование, упругохрупкий материал.

Согласно современным представлениям [1–3], разрушение материалов является сложным процессом, включающим разрушение структурных элементов различных масштабов. На первой стадии разрушения размеры повреждений микроструктуры малы по сравнению с линейными размерами частиц, на второй стадии они достигают размеров элементов микроструктуры. В отличие от субмикроскопических повреждений, которые при удалении нагрузки, как правило, исчезают (“залечиваются”), микроскопические повреждения имеют необратимый характер (остаются в виде микротрещин) и на макроуровне проявляются в виде изменения механических характеристик материала, в частности его деформативной способности. На третьей стадии разрушения в материале возникают макроскопические трещины, приводящие к нарушению целостности тела.

Вопросы оценки влияния поврежденности конструкционных материалов на их деформационные и прочностные свойства на основе феноменологических моделей освещены в работах [4–6].

В [7] предложен структурный подход к описанию связанного процесса деформирования и микроповреждаемости, базирующийся на моделировании повреждаемости образованием системы стохастически расположенных микропор, пустых либо наполненных разрушенным материалом.

Ниже предлагается континуальная модель деформирования упругохрупких материалов, сопровождающегося накоплением повреждений в виде плоских микротрещин, случайным образом рассеянных по объему материала. При построении модели полагали, что характерные размеры и форма микротрещин близки к таковым всевозможных сечений структурных элементов материала. Предполагалось также, что в процессе деформирования микротрещины не растут и не взаимодействуют между собой, а объемная плотность (концентрация) микродефектов изменяется с ростом уровня средних напряжений в силу неоднородности микропрочности материала и определяется относительной долей разрушенных структурных элементов, содержащихся в представительном объеме.

Процедура построения модели состоит из двух этапов.

1. Выводятся уравнения состояния для поврежденного материала с постоянной концентрацией плоских микродефектов.

2. На основании подходящих критериев прочности и законов распределения микропрочности по объему материала определяется концентрация микродефектов в зависимости от уровня напряженного состояния, наводимого в теле.

При небольших концентрациях рассеянных в материале микродефектов, когда можно пренебречь их взаимодействием, а это правомерно в случае если расстояния между трещинами превышают их характерные размеры [8], поврежденный материал в соответствии с принципом Эшелби [9] можно моделировать непрерывной средой с уравнениями состояния вида [8]

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl}, \qquad i, j, k, l = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где средние однородные макронапряжения σ_{kl} считаются заданными в лабораторной системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с представительным объемом; макродеформации ε_{ij} подлежат осреднению.

Эффективные податливости a_{ijkl} поврежденной среды определяются энергетическим методом [8], основанным на эквивалентности энергии поврежденной среды и сплошной, моделирующей первую [9].

Далее будут рассматриваться микродефекты в виде эллиптической и круговой формы.

При широком распределении трещин по ориентациям и размерам в результате статистического осреднения эффективные податливости поврежденного материала определяются через характеристики трещин и постоянные упругости сплошного материала:

$$a_{ijkl} = a^0_{ijkl} + a'_{ijkl}, \tag{2}$$

где a'_{ijkl} – результат осреднения энергии освобождения [8, 10, 11], зависящий от закона распределения трещин по ориентациям и размерам, задаваемого плотностью распределения $F(\theta, \varphi, \psi, a, b)$; θ, φ, ψ – углы Эйлера; a, b – полуоси эллиптических трещин; a^0_{ijkl} – податливости сплошного материала.

Для изотропного материала, поврежденного дефектами в виде эллиптических трещин, статистически однородно изотропно распределенными по объему, в зависимости от наводимого в теле напряженного состояния и характера взаимодействия поверхностей трещин в соответствии с изложенной процедурой вторые слагаемые в (2) будут определяться следующими соотношениями [10, 11].

1. При всестороннем растяжении, сопровождающемся раскрытием трещин $\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii} > 0\right)$:

$$\begin{cases} a'_{iiii} = \dfrac{2}{15}(A_1 + A_2) + \dfrac{2}{5}A_3, & i = 1, 2, 3; \\ a'_{iijj} = \dfrac{2}{5}(A_1 + A_2) + \dfrac{8}{15}A_3, & i, j = 1, 2, 3; \\ a'_{ijij} = -\dfrac{1}{15}(A_1 + A_2) + \dfrac{2}{15}A_3, & i, j = 1, 2, 3. \end{cases} \qquad (3)$$

2. При всестороннем сжатии с учетом трения скольжения ($\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii} < 0$):

$$\begin{cases} a'_{iiii} = \dfrac{2}{15}(1 - 3f^2)(A_1 + A_2), & i = 1, 2, 3; \\ a'_{iijj} = \dfrac{2}{15}(3 - 4f^2)(A_1 + A_2), & i, j = 1, 2, 3; \\ a'_{ijij} = -\dfrac{1}{15}(1 + 2f^2)(A_1 + A_2), & i, j = 1, 2, 3. \end{cases} \qquad (4)$$

В (3), (4) введены следующие обозначения:

$$A_1 = \frac{(1-\nu_0)}{E_0} R(k, \nu_0)\varepsilon; \qquad A_2 = \frac{(1-\nu_0)}{E_0} Q(k, \nu_0)\varepsilon; \qquad A_3 = \frac{(1-\nu_0)}{E(k)E_0}\varepsilon;$$

$$R(k, \nu_0) = k^2[(k^2 - \nu_0)E(k) + \nu_0 k_1^2 K(k)]^{-1};$$

$$Q(k, \nu_0) = k^2[(k^2 + \nu_0 k_1^2)E(k) - \nu_0 k_1^2 K(k)]^{-1};$$

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{3} \int\int ab^2 F(a,b)\,da\,db = \frac{4\pi}{3} N_0 \langle ab^2 \rangle,$$

где ε – малый параметр, определяющий концентрацию трещин; $k^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$; $k_1^2 = 1 - k^2$; $K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода; f – коэффициент трения скольжения; N_0 – количество трещин в единице объема; E_0, ν_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона сплошного материала.

Приведенные соотношения имеют место при одинаковых отношениях полуосей эллиптических трещин. В случае круговых трещин радиуса a постоянные A_i запишем в виде

$$A_1 = A_2 = \frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi(2-\nu_0)E_0}\varepsilon; \qquad A_3 = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}\varepsilon; \qquad \varepsilon = \frac{4\pi}{3} N_0 \langle a^3 \rangle. \qquad (5)$$

Технические постоянные поврежденного материала через податливости в общем случае определяются соотношениями [9]:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{E_{ii}} = a_{iiii}, & i = 1, 2, 3; \\ -\dfrac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = a_{jjii}, & i, j = 1, 2, 3; \\ \dfrac{1}{G_{ij}} = a_{ijij}, & i, j = 1, 2, 3, \end{cases} \tag{6}$$

где E_{ii}, G_{ij}, ν_{ij} – соответственно модули упругости и сдвига и коэффициент Пуассона поврежденного материала.

Из соотношений (3), (4) следует, что при всестороннем сжатии либо растяжении изотропный материал, поврежденный системой хаотически распределенных трещин, моделируется изотропной средой. В случае сложного напряженного состояния, включающего растяжение и сжатие, возможен механизм нелинейной связи между макронапряжениями и макродеформациями [10, 11], который обусловлен характером взаимодействия поверхностей в теле трещин неизменной концентрации. Другой механизм нелинейного деформирования поврежденной среды связан с изменением концентрации трещин ε в (3), (4) в зависимости от истории нагружения в силу неоднородности прочностных свойств структурных элементов материала.

В качестве критерия разрушения микроэлементов материала при растяжении и сжатии принимается соотношение 1-й теории прочности

$$\sigma'_n \geq \sigma, \tag{7}$$

где σ – случайная величина, может обозначать предельное значение растягивающего либо сжимающего истинного напряжения, нормального к произвольной плоскости сечения представительного объема, в котором заданы средние напряжения σ_{ij}.

По достижении истинным растягивающим напряжением σ'_n значения σ на соответствующей площадке образуются микротрещины с плоскостями, нормальными к направлению действия σ'_n. В случае сжимающего напряжения σ'_n микротрещины ориентируются преимущественно параллельно направлению σ'_n [12, 13]. При этом характер деформирования (растяжение либо сжатие), определяющий выбор критерия прочности, будет определяться знаком среднего гидростатического напряжения $\sigma_\text{г} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$, где $\sigma_\text{г} > 0$ – растяжение; $\sigma_\text{г} < 0$ – сжатие.

Если в качестве представительного объема выбрать шар единичного радиуса, в центре которого известны средние главные напряжения σ_{ii} ($i = 1$, 2, 3), то среднее нормальное напряжение σ_n на площадке, ориентация нормали к которой задана сферическими координатами θ (широта) и φ (долгота), будет определяться по выражению [3]

$$\sigma_n = \sigma_{11} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \sigma_{33} \cos^2 \theta. \tag{8}$$

Истинное растягивающее напряжение σ'_n на этой площадке, изменяющееся с уменьшением эффективной площади сечения вследствие разрушения микрочастиц, представляется соотношением

$$\sigma'_n = \sigma_n / [1 - P_n(\sigma'_n)], \tag{9}$$

где $P_n(\sigma'_n)$ – относительная часть разрушенной площади сечения с нормалью n.

Концентрация плоских микродефектов в произвольном сечении представительного объема определяется вероятностью $P_n(\sigma'_n \geq \sigma)$ того, что значения нормального напряжения σ'_n будут больше прочности частиц микроструктуры σ, являющейся случайной величиной. Для аппроксимации распределения механических свойств кристаллитов и зерен, имеющих различную ориентацию, по аналогии с [14] используется соотношение

$$P(\sigma) = \begin{cases} 0, & (\sigma < \sigma_0); \\ (\sigma - \sigma_0)^\alpha / (\sigma_c - \sigma_0)^\alpha, & (\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_c); \\ 1, & (\sigma > \sigma_c), \end{cases} \tag{10}$$

где $\alpha, \sigma_0, \sigma_c$ – параметры распределения, определяемые по выборочным значениям, например, методом моментов [15]. Суть метода состоит в приравнивании определенного количества выборочных моментов к соответствующим моментам распределения, которые являются функциями неизвестных параметров $\sigma_0, \sigma_c, \alpha$. Рассматривая количество моментов, равное числу подлежащих определению параметров, и решая полученные уравнения относительно этих параметров, имеем искомые оценки параметров распределения.

Основные моменты (средняя микропрочность $\langle \sigma \rangle$ и дисперсия D^2) для распределения (10) представляются в виде

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\alpha}{\alpha + 1}(\sigma_c - \sigma_0) + \sigma_0; \tag{11}$$

$$D^2 = \frac{\alpha}{\alpha + 2}\sigma_c^2 - \frac{2\alpha \langle \sigma \rangle \sigma_c}{\alpha + 1} + \langle \sigma \rangle^2. \tag{12}$$

С учетом (10) вероятность разрушения элементов структуры, пересекающих единицу площади поверхности представительного объема в виде шара некоторого радиуса, будет определяться соотношением

$$p = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n \sin\theta d\theta d\varphi; \qquad P_n = P(\sigma'_n). \tag{13}$$

Физический смысл величины p заключается в том, что она представляет относительную долю площади поверхности шара, на которой нормальные истинные напряжения σ'_n превышают предел прочности σ микрочастиц в поверхностном слое, т.е. на этой площади нарушается сплошность вследствие образования плоских микротрещин.

Если предположить, что характерные размеры и форма плоских дефектов и сечений структурных элементов материала близки, то отношение количества разрушенных микрочастиц N_{p} к их общему количеству N в представительном объеме будет определять объемную концентрацию плоских микродефектов ε (3)–(5). При этом $\varepsilon = p$.

Действительно, пусть в шаре радиуса r и объема V имеется N микрочастиц. Если $\langle v \rangle = V/N$ – средний объем микрочастиц, то из формул

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3; \qquad S = 4\pi r^2; \qquad V = \frac{1}{3}Sr \tag{14}$$

следуют выражения

$$r = \sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi}\langle v \rangle}; \qquad S = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}N\langle v \rangle}\right)^2.$$

Поскольку в соответствии с (13) доля разрушенной площади поверхности шара равна $S_{\text{p}} = pS$, согласно последней формуле (14) объем разрушенных структурных элементов составит

$$V_{\text{p}} = \frac{1}{3}S_{\text{p}}r = pN\langle v \rangle. \tag{15}$$

Теперь можно определить концентрацию микротрещин (3), (4) в виде $\varepsilon = \dfrac{4\pi}{3}N_0\left\langle ab^2 \right\rangle$.

В случае, например, эллипсоидальных структурных элементов для представительного единичного объема, содержащего N микрочастиц, имеет место соотношение

$$\frac{4\pi}{3}\left\langle ab^2 \right\rangle = \frac{1}{N}. \tag{16}$$

Поскольку $N_0 = N_{\text{p}}$ и $N_{\text{p}} = pN$, имеем

$$\varepsilon = N_0\frac{4\pi}{3}\left\langle ab^2 \right\rangle = p. \tag{17}$$

Таким образом, связанный процесс деформирования и дисперсного разрушения в виде образования системы стохастически ориентированных плоских микротрещин моделируется замкнутой системой нелинейных уравнений (3), (4), (7)–(10), (13), (17).

Необходимо отметить, что параметр P_n существенно зависит от характера нагружения тела. При однократном нагружении тела, в естественном состоянии которого отсутствуют микродефекты, P_n находится из формулы (9) при $\sigma'_n = \sigma_n$. Для определения σ'_n при пошаговом нагружении в качестве P_n используется значение, соответствующее предшествующему этапу нагружения. При определении P_n в случае сжимающих напряжений σ'_n следует иметь в виду, что несущая площадь сечений представительного объема не изменяется.

Точное определение параметра p затруднительно из-за нелинейности соотношений (9), (10). Ввиду малости параметра P_n, который согласно результатам статистической теории прочности [1] не превышает значение $\frac{1}{2}$ при нарушении целостности тела, приведенные выше соотношения можно упростить. Для этого правую часть соотношения (10) следует разложить в ряд по малому параметру P_n. Тогда при удержании, например, членов первого порядка относительно P_n оно упростится к виду

$$P_n = \begin{cases} 0, & \sigma'_n < \sigma_0; \\ \dfrac{\left(\dfrac{\sigma_n}{\sigma_c - \sigma_0}\right)^{\alpha}\left(1 - \alpha\dfrac{\sigma_0}{\sigma_n}\right)}{1 - \alpha\left(\dfrac{\sigma_n}{\sigma_c}\right)^{\alpha}\left[1 + (1-\alpha)\dfrac{\sigma_0}{\sigma_n}\right]}, & \sigma_0 < \sigma'_n < \sigma_c; \\ 1, & \sigma'_n > \sigma_c, \end{cases} \tag{18}$$

где σ'_n определяется с учетом проведенных упрощений.

При двухпараметрическом распределении микропрочности ($\sigma_0 = 0$) выражение для P_n при $0 \le \sigma'_n < \sigma_c$ имеет вид

$$P_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right)^{\alpha} \frac{1}{1 - \alpha\left(\dfrac{\sigma_n}{\sigma_c}\right)^{\alpha}}. \tag{19}$$

При условии $\sigma_n << \sigma_c$ выражение (19) можно представить в форме

$$P_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right)^{\alpha}\left[1 + \alpha\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right)^{\alpha}\right]. \tag{20}$$

В качестве примера, иллюстрирующего применение полученных соотношений для описания связанного процесса деформирования и дисперсного разрушения, рассматривается деформирование углеродных и борных волокон при растяжении напряжением σ_{11}. На рисунке представлены диаграммы деформирования углеродных и борных волокон с различной зажимной длиной l_i. При расчете диаграмм деформирования использовались экспериментальные значения характеристик упругости, средней прочности и ее стандартного отклонения [16]:

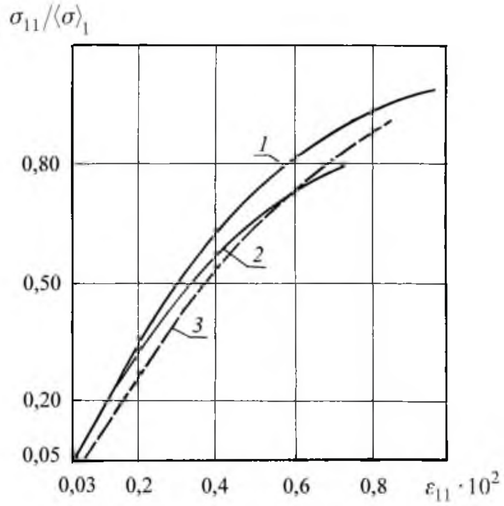
для углеродных волокон

$$E_0 = 4{,}2\cdot 10^{11}\ \text{Па},\quad \nu_0 = 0{,}2,\quad \langle\sigma\rangle_{1(2)} = 2{,}35\cdot 10^9 (1{,}90\cdot 10^9)\ \text{Па},$$
$$D_{1(2)} = 0{,}607\cdot 10^9\ (0{,}672\cdot 10^9)\ \text{Па}; \tag{21а}$$

для борных волокон

$$E_0 = 3{,}7\cdot 10^{11}\ \text{Па},\quad \nu_0 = 0{,}25,\quad \langle\sigma\rangle_3 = 2{,}2\cdot 10^9\ \text{Па},$$
$$D_3 = 0{,}565\cdot 10^9\ \text{Па}. \tag{21б}$$

В случае двухпараметрического распределения прочности параметры распределения α, σ_c, рассчитанные на основании (11), (12), (21), для указанных волокон составили: $\alpha = 3$, $\sigma_c = 3{,}13\cdot 10^9$ Па при l_1; $\alpha = 2$, $\sigma_c = 2{,}8\cdot 10^9$ Па при l_2; $\alpha = 3$, $\sigma_c = 2{,}9\cdot 10^9$ Па при l_3.



Диаграммы деформирования для углеродных (сплошные линии) и борных (штриховая линия) волокон: *1* – $l_1 = 0{,}025$ м; *2* – $l_2 = 0{,}070$ м; *3* – $l_3 = 0{,}040$ м.

Диаграммы деформирования рассчитаны в предположении образования в волокнах микродефектов типа плоских круговых трещин. В этом случае эффективные податливости определяются с использованием соотношений (5).

Основная особенность приведенных диаграмм – нелинейность зависимостей макронапряжение–макродеформация при малых деформациях. Представляется, что природа нелинейности деформирования в случае хрупких материалов может быть объяснена на основе изложенных выше соображений, базирующихся на механизме микроразрушения “отрывом”. В случае пластических материалов нелинейность деформирования связана с механизмами микроразрушения “сдвигом” и с явлением “микропластичности”. Соответствующая для этого случая модель совместного деформирования и повреждаемости может быть построена с использованием изложенного подхода при учете специфики пластического деформирования материалов.

Р е з ю м е

Запропоновано наближену модель спільного деформування і мікропошкодження пружнокрихких матеріалів у вигляді утворення системи стохастично розташованих плоских мікротріщин.

1. *Волков С. Д.* Статистическая теория прочности. – М.: Машгиз, 1960. – 176 с.
2. *Новиков И. И., Ермишкин В. А.* Микромеханизмы разрушения металлов. – М.: Наука, 1991. – 362 с.
3. *Тамуж В. П., Куксенко В. С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
4. *Березин А. В., Козинкина А. И.* Физические модели и методы оценки накопления повреждений в твердых телах // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 3. – С. 115 – 121.
5. *Бобырь Н. И.* Обобщенная модель повреждаемости конструкционных материалов при сложном малоцикловом нагружении // Пробл. прочности. – 2000. – № 5. – С. 112 – 121.
6. *Лебедев А. А., Чаусов Н. Г., Богинич И. О., Недосека С. А.* Комплексная оценка поврежденности материала при пластическом деформировании // Там же. – 1996. – № 5. – С. 23 – 30.
7. *Хорошун Л. П.* Микромеханика кратковременной повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 10. – С. 120 – 127.
8. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин // Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149 – 158.
9. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1983. – 334 с.
10. *Бабич Д. В.* Приближенный учет поврежденности материала в задачах о равновесии упругих оболочек // Пробл. прочности. – 1996. – № 3. – С. 20 – 30.
11. *Бабич Д. В.* Исследование устойчивости композитных оболочек с учетом трещиноватости компонентов материала // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 11. – С. 46 – 54.
12. *Германович Л. Н., Дыскин А. В.* Модель разрушения хрупкого материала с трещинами при одноосном нагружении // Механика твердого тела. – 1988. – № 2. – С. 118 – 131.

13. *Dragon A. and Mros Z.* A continuum model for plastic-brittle behavior of rock and concrete // Int. J. Eng. Sci. – 1979. – **17**. – P. 121 – 137.

14. *Болотин В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.

15. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

16. *Грушецкий И. В.*, *Димитриенко И. П.*, *Ермоленко А. Ф.* Разрушение конструкций из композитных материалов. – Рига, Зинатне, 1986. – 264 с.

Поступила 06. 11. 2002