

Применение смешанной аппроксимации к решению двумерных задач теории упругости методом конечных элементов

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Для решения двумерных краевых задач теории упругости применяется смешанная схема метода конечных элементов. Описан треугольный конечный элемент, обеспечивающий устойчивость и сходимость смешанной аппроксимации. Построена система разрешающих уравнений смешанного метода с учетом точного удовлетворения статических граничных условий на поверхности. Для решения матричных уравнений смешанного метода приведены различные варианты алгоритма метода сопряженных градиентов с переобуславливающей матрицей. Представлены результаты численного анализа сходимости и точности решения ряда модельных задач теории упругости и линейной механики разрушения. Сопоставлены результаты, полученные на основе классического и смешанного методов конечных элементов.

Ключевые слова: теория упругости, метод конечных элементов (МКЭ), смешанная аппроксимация, граничные условия, точность, метод сопряженных градиентов.

1. Построение аппроксимирующих функций. Особенностью построения смешанной аппроксимации является задание базисных функций, обеспечивающих разрешимость и устойчивость решения дискретной задачи [1]. С другой стороны, необходимо учитывать интерполяционные свойства кусочно-полиномиальных восполнений, что связано с точностью приближенного решения. В этом принципиальная разница между смешанной и обычной аппроксимацией. Рассмотрим в качестве примера простейший вариант смешанной схемы с линейной аппроксимацией перемещений на треугольных элементах.

Далее будем рассматривать только треугольные элементы, совокупность которых описывает допустимую триангуляцию $T_h = T_h(\Omega)$ области $\Omega \subset R^2$. Тогда перемещения v_h в пределах треугольника $T \in T_h(\Omega)$ зададим в виде линейных функций от координат $x = (x_1, x_2)$:

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^3 \bar{v}_j \lambda_j(x), \quad \forall x \in T. \quad (1)$$

Здесь $\bar{v}_j = v_h(x_j)$ – узловые значения перемещений в вершинах и $\lambda_j(x)$ – линейные интерполяционные функции треугольника $T \in T_h(\Omega)$, обладающие свойствами:

$$0 \leq \lambda_j(x) \leq 1; \quad \sum_{j=1}^3 \lambda_j(x) = 1; \quad \lambda_j(x_i) = \delta_{ji}; \quad \forall x \in T, \quad (2)$$

где δ_{ji} – символ Кронекера. Обозначим через $x_T = (x_{1T}, x_{2T})$ – координаты центра тяжести треугольника $T \in T_h(\Omega)$ и определим “внутреннюю”, равную нулю на всех сторонах треугольника T , функцию $\lambda_T(x)$ такую, что $\lambda_T(x_T) = 1$. Данное определение функции $\lambda_T(x)$ не является однозначным. Тем не менее деформации и напряжения в пределах треугольника $T \in T_h(\Omega)$ формально запишем в виде

$$\eta_h(x) = \sum_{j=1}^3 \hat{\eta}_j \lambda_j(x) + (\bar{\eta}_T - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \hat{\eta}_j) \lambda_T(x), \quad \forall x \in T, \quad (3)$$

где $\hat{\eta}_j = \eta_h(x_j)$ и $\bar{\eta}_T = \eta_h(x_T)$ – узловые значения $\eta_h(x)$ в вершинах и центре тяжести треугольника $T \in T_h(\Omega)$. Отметим, что функция $\lambda_T(x)$ может быть построена с помощью линейной комбинации кусочно-полиномиальных восполнений и так называемой функции-колокола, т.е. функции вида $\lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x)$.

Далее, для определенности будем рассматривать только два типа функций $\lambda_T(x)$. При построении первого типа используем кусочно-линейную интерполяцию в пределах треугольника $T \in T_h(\Omega)$. С этой целью разделим треугольник T на три треугольника с общей вершиной в центре тяжести x_T . Тогда в пределах каждого из этих треугольников определим $\lambda_T(x)$ как линейную функцию, равную нулю на внешней стороне треугольника T и единице в точке x_T . Для построения второго типа функций $\lambda_T(x)$ используем нормированную функцию-колокол, т.е. $\lambda_T(x) = 27\lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x)$. Таким образом, оба типа функций $\lambda_T(x)$ определяются однозначно.

Рассмотрим интерполяционные свойства аппроксимаций (1)–(3). Прежде всего перемещения, деформации и напряжения непрерывны на всем множестве Ω , поскольку непрерывность линейных интерполяционных функций $\lambda_j(x)$ на любой стороне, общей для произвольных треугольников, обеспечивается однозначным определением этих функций в узлах, расположенных на этой стороне, а функция $\lambda_T(x)$, по определению, равна нулю на всех сторонах треугольника $T \in T_h(\Omega)$. Кроме того, аппроксимация (3) удовлетворяет условию постоянства напряжений и деформаций на всем множестве Ω . Определяя в каждом треугольнике $T \in T_h(\Omega)$ значения $\bar{\eta}_T = \eta_h(x_T)$ с помощью линейной комбинации

$$\bar{\eta}_T = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \hat{\eta}_j, \quad (4)$$

получаем линейное распределение напряжений и деформаций в подпространстве кусочно-линейных восполнений:

$$\eta_{1h}(x) = \sum_{j=1}^3 \hat{\eta}_j \lambda_j(x), \quad \forall x \in T. \quad (5)$$

Покажем, что применение аппроксимации (1)–(3) обеспечивает разрешимость дискретной задачи для двух типов функций $\lambda_T(x)$. В самом деле, поскольку перемещения линейны на каждом из треугольников $T \in T_h(\Omega)$, их производные задаются с помощью кусочно-постоянных функций $\bar{\tau}_h(x)$. Сужение $\bar{\tau}_h(x)$ на $T \in T_h(\Omega)$ обозначим через $\bar{\tau}_T$. Тогда, полагая $\eta_h(x) = \bar{\eta}_T \lambda_T(x)$, $\forall x \in T$, имеем

$$\|\bar{\tau}_h - \eta_h\|_X^2 = \sum_{T \in T_h(\Omega)} \bar{\tau}_T^2 \Delta_T - 2\bar{\eta}_T \bar{\tau}_T \int_T \lambda_T(x) dx + \bar{\eta}_T^2 \int_T \lambda_T^2(x) dx, \quad (6)$$

где Δ_T – площадь треугольника $T \in T_h(\Omega)$. Значения $\bar{\eta}_T$, минимизирующие каждое слагаемое от суммы вкладов по треугольникам T , вычисляются по формуле

$$\bar{\eta}_T = \frac{\int_T \lambda_T(x) dx}{\int_T \lambda_T^2(x) dx} \bar{\tau}_T. \quad (7)$$

На основании (6) и (7) получаем оценку

$$d^2 \geq 1 - \frac{\|\bar{\tau}_h - \eta_h\|_X^2}{\|\bar{\tau}_h\|_X^2} = \frac{\left(\int_T \lambda_T(x) dx \right)^2}{\Delta_T \int_T \lambda_T^2(x) dx}. \quad (8)$$

С использованием формул интегрирования [2] находим $d^2 \geq 2/3$ для кусочно-линейного восполнения и $d^2 \geq 0,7$ при использовании функции-колокола. Заметим, что такие же оценки получаются и для осесимметричной задачи. Таким образом, константа d строго больше нуля, а ее оценка снизу не зависит от параметра сетки h . Следовательно, применение описанных выше двух типов функций $\lambda_T(x)$ гарантирует получение устойчивого и единственного решения.

2. Матричные уравнения смешанного метода. На основании приведенной аппроксимации для перемещений, деформаций и напряжений система разрешающих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_h] \{\varepsilon_h\} &= [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{u}_h\}; \\ \{\sigma_h\} &= [\mathbf{D}_h] (\{\varepsilon_h\} - \{\xi_h\}); \\ [\mathbf{H}_h]^T \{\sigma_h\} &= \{\rho_h\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Первое уравнение определяет вектор значений деформаций $\{\varepsilon_h\}$ в узлах сетки по известным узловым перемещениям $\{\mathbf{u}_h\}$. Второе – связано с физическим законом упругой среды для построения вектора напряжений $\{\sigma_h\}$. Третье уравнение системы обеспечивает выполнение условий равновесия. Векторы $\{\rho_h\}$ и $\{\xi_h\}$ соответствуют приведенным к узлам сетки заданным нагрузкам и температурным деформациям.

При вычислении коэффициентов разрешающих матриц $[\mathbf{M}_h]$ и $[\mathbf{H}_h]$ использовались квадратурные формулы, точки интегрирования которых совпадают с узлами интерполяции треугольника $T \in T_h(\Omega)$. Весовые множители квадратуры ω_α и ω_T , соответствующие трем вершинам и центру тяжести треугольника T , задавались таким образом, чтобы коэффициенты матрицы $[\mathbf{H}_h]$ вычислялись точно и модифицировалась только матрица $[\mathbf{M}_h]$. В результате система уравнений (9) существенно упрощается, поскольку матрица $[\mathbf{M}_h]$ становится диагональной $[\bar{\mathbf{M}}_h]$ и, значит, не требуется ее явного обращения для нахождения вектора деформаций $\{\varepsilon_h\}$ из первого уравнения системы (9). Тогда узловые значения деформаций $\bar{\varepsilon}_T = \varepsilon_h(x_T)$ и напряжений $\bar{\sigma}_T = \sigma_h(x_T)$, соответствующие центрам тяжести треугольников, можно исключить, выразив их через узловые значения перемещений вершин каждого треугольника $T \in T_h(\Omega)$. В самом деле, первое уравнение системы (9) распадается на независимые уравнения и, следовательно, систему разрешающих уравнений можно представить в виде

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_h\} &= [\bar{\mathbf{M}}_h]^{-1} [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{u}_h\}; \\ \{\bar{\varepsilon}_h\} &= [\mathbf{B}_h] \{\mathbf{u}_h\}; \\ \{\sigma_h\} &= [\mathbf{D}_h] (\{\varepsilon_h\} - \{\xi_h\}); \\ \{\bar{\sigma}_h\} &= [\bar{\mathbf{D}}_h] (\{\bar{\varepsilon}_h\} - \{\xi_h\}); \\ \omega_\alpha [\mathbf{H}_h]^T \{\sigma_h\} + \omega_T [\mathbf{B}_h]^T \{\bar{\sigma}_h\} &= \{\rho_h\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя выражение для деформаций $\{\varepsilon_h\}$ из второго уравнения системы (10) в четвертое, получаем напряжения $\{\bar{\sigma}_h\}$, которые затем можно под-

ставить в пятое уравнение. Последнее обстоятельство приводит к включению в систему разрешающих уравнений матрицы жесткости $[\mathbf{K}_h]$, поскольку описанная выше процедура исключения эквивалентна цепочке простых равенств:

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_h]^T \{\bar{\sigma}_h\} &= [\mathbf{B}_h]^T [\bar{\mathbf{D}}_h] (\{\bar{\varepsilon}_h\} - \{\bar{\xi}_h\}) = [\mathbf{B}_h]^T [\bar{\mathbf{D}}_h] ([\mathbf{B}_h] \{\mathbf{u}_h\} - \{\bar{\xi}_h\}) = \\ &= [\mathbf{B}_h]^T [\bar{\mathbf{D}}_h] [\mathbf{B}_h] \{\mathbf{u}_h\} - [\mathbf{B}_h]^T [\bar{\mathbf{D}}_h] \{\bar{\xi}_h\} = [\mathbf{K}_h] \{\mathbf{u}_h\} - [\mathbf{B}_h]^T [\bar{\mathbf{D}}_h] \{\bar{\xi}_h\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, получаем систему уравнений, в которой участвуют только узловые неизвестные:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_h\} &= [\bar{\mathbf{M}}_h]^{-1} [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{u}_h\}; \\ \{\sigma_h\} &= [\mathbf{D}_h] (\{\varepsilon_h\} - \{\xi_h\}); \\ \omega_\alpha [\mathbf{H}_h]^T \{\sigma_h\} + \omega_T [\mathbf{K}_h] \{\mathbf{u}_h\} &= \{\rho_h\} + \omega_T [\mathbf{B}_h]^T [\bar{\mathbf{D}}_h] \{\bar{\xi}_h\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (12) определяет смешанную постановку задачи теории упругости в перемещениях, деформациях и напряжениях. Отметим, что уравнения подобного типа детально рассматривались ранее [3], и соответствующие схемы получили название “узловых”. Однако их недостатком является чувствительность к погрешностям входных данных и ошибкам вычислений, поскольку используемые в этих схемах аппроксимирующие функции не обеспечивают получение устойчивого решения дискретной задачи. Система уравнений (12) не имеет этого недостатка и гарантирует единственность и устойчивость решения. При этом открывается возможность точного удовлетворения статических граничных условий на поверхности.

3. Учет статических граничных условий на поверхности. Пусть $\{\mathbf{q}_h\}$ – вектор поверхностных напряжений в контурных узлах сетки, заданный в местной системе координат x'_1 и x'_2 , не обязательно совпадающей с глобальными осями x_1 и x_2 . Компоненты вектора $\{\mathbf{q}_h\}$ соответствуют известным компонентам напряжений на контуре и равны нулю во всех остальных случаях. Пусть $[\mathbf{T}'_h]$ – матрица преобразования узловых напряжений из старой координатной системы в новую и $[\mathbf{T}_h]$ – матрица обратного преобразования из новой в старую систему координат. Тогда можно вычислить напряжения $\{\sigma'_h\}$ в системе координат x'_1 и x'_2 :

$$\{\sigma'_h\} = [\mathbf{T}'_h] \{\sigma_h\}. \quad (13)$$

Для вектора $\{\sigma'_h\}$ используем ортогональное разложение

$$\{\sigma'_h\} = \{\tilde{\sigma}'_h\} + \{\mathbf{q}_h\}, \quad (14)$$

где $\{\bar{\sigma}'_h\}$ – напряжения, удовлетворяющие нулевым граничным условиям на контуре. Если предположить, что напряжения $\{\sigma'_h\}$ известны, то, применяя обратное преобразование, получаем

$$\{\sigma_h\} = [\mathbf{T}_h]\{\sigma'_h\} = [\mathbf{T}_h](\{\bar{\sigma}'_h\} + \{\mathbf{q}_h\}). \quad (15)$$

Обозначим через $[\mathbf{D}'_h]$ матрицу, соответствующую $[\mathbf{D}_h]$ в местной системе координат. Проектируя вектор $\{\sigma'_h\} - \{\mathbf{q}_h\}$ на множество векторов $[\mathbf{D}'_h]^{-1}\{\bar{\sigma}'_h\}$, имеем

$$\{\bar{\sigma}'_h\}^T [\mathbf{D}'_h]^{-1}\{\sigma'_h\} = \{\bar{\sigma}'_h\}^T [\mathbf{D}'_h]^{-1}(\{\sigma'_h\} - \{\mathbf{q}_h\}). \quad (16)$$

Для матрицы $[\mathbf{D}'_h]^{-1}$ обнулیم строку, соответствующую заданному напряжению на контуре, и модифицированную таким образом матрицу $[\mathbf{D}'_h]^{-1}$ обозначим через $[\mathbf{S}'_h]$. Кроме того, для матрицы $[\mathbf{S}'_h]$ обнулیم столбец, соответствующий нулевой строке, и вместо нуля в диагональной позиции поместим единицу. Полученную в результате матрицу обозначим через $[\mathbf{Q}'_h]$. Исходя из этого находим

$$\{\bar{\sigma}'_h\} = [\mathbf{Q}'_h]^{-1}[\mathbf{S}'_h](\{\sigma'_h\} - \{\mathbf{q}_h\}). \quad (17)$$

Следовательно, на основании равенств (15) и (17) для произвольного $\{\sigma_h\}$ получаем вектор напряжений $\{\bar{\sigma}_h\}$, удовлетворяющий граничным условиям на контуре:

$$\{\bar{\sigma}_h\} = [\mathbf{C}_h]\{\sigma_h\} + [\mathbf{P}_h]\{\mathbf{q}_h\}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_h] &= [\mathbf{T}_h][\mathbf{Q}'_h]^{-1}[\mathbf{S}'_h][\mathbf{T}'_h]; \\ [\mathbf{P}_h] &= [\mathbf{T}_h] - [\mathbf{T}_h][\mathbf{Q}'_h]^{-1}[\mathbf{S}'_h] \end{aligned} \quad (19)$$

– блочно-диагональные матрицы, матричные блоки которых соответствуют контурным узлам сетки.

Таким образом, получаем систему разрешающих уравнений относительно перемещений и напряжений, в которой учитываются граничные условия для напряжений:

$$\begin{aligned} \{\sigma_h\} &= [\mathbf{C}_h][\mathbf{D}_h](\bar{[\mathbf{M}}_h]^{-1}[\mathbf{H}_h]\{\mathbf{u}_h\} - \{\bar{\xi}_h\}) + [\mathbf{P}_h]\{\mathbf{q}_h\}; \\ \omega_\alpha [\mathbf{H}_h]^T \{\sigma_h\} + \omega_T [\mathbf{K}_h]\{\mathbf{u}_h\} &= \{\rho_h\} + \omega_T [\mathbf{B}_h]^T [\bar{\mathbf{D}}_h]\{\bar{\xi}_h\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Вектор деформаций $\{\varepsilon_h\}$ определяется на основании равенства

$$\{\varepsilon_h\} = [\mathbf{D}_h]^{-1}\{\sigma_h\} + \{\bar{\xi}_h\}. \quad (21)$$

Система уравнений (20) упрощается, если для вычисления напряжений использовать разложение

$$\{\sigma_h\} = \{\bar{\sigma}_h\} - [C_h][D_h]\{\xi_h\} + [P_h]\{q_h\}. \quad (22)$$

С учетом последнего равенства система разрешающих уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \{\bar{\sigma}_h\} &= [C_h][D_h][\bar{M}_h]^{-1}[H_h]\{u_h\}; \\ \omega_\alpha [H_h]^T \{\bar{\sigma}_h\} + \omega_T [K_h]\{u_h\} &= \{f_h\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\{f_h\}$ – вектор узловых значений, который задается выражением

$$\{f_h\} = \{\rho_h\} + \omega_\alpha [H_h]^T ([C_h][D_h]\{\xi_h\} - [P_h]\{q_h\}) + \omega_T [B_h]^T [\bar{D}_h]\{\bar{\xi}_h\}. \quad (24)$$

В результате решения системы уравнений (23) получаем векторы $\{u_h\}$ и $\{\bar{\sigma}_h\}$, после чего определяем деформации и напряжения в соответствии с формулами (21) и (22).

Замечание 1. Систему уравнений (23) можно представить в виде одного матричного уравнения относительно перемещений. Действительно, введем в рассмотрение матрицу $[E_h]$, определяемую соотношением

$$[E_h] = \omega_\alpha [\bar{M}_h]^{-1} [D_h] [C_h]^T [D_h]^{-1} [\bar{M}_h] [C_h] [D_h] [\bar{M}_h]^{-1}. \quad (25)$$

Учитывая тот факт, что $[D_h]^{-1}$ и $[\bar{M}_h]$ – перестановочные матрицы, заключаем, что $[E_h]$ – симметричная блочно-диагональная матрица. Таким образом, приходим к уравнению

$$[A_h]\{u_h\} = \{f_h\}, \quad (26)$$

где

$$[A_h] = [H_h]^T [E_h] [H_h] + \omega_T [K_h] \quad (27)$$

– симметричная положительно определенная ограниченная матрица.

Замечание 2. В качестве примера рассмотрим некоторые типичные случаи учета граничных условий для напряжений и приведем соответствующие выражения матриц $[C_h]$ и $[P_h]$, полученные на основании формул (19). Полагаем, что материал изотропный, причем $\nu_1 = \nu$ при плоском напряженном состоянии и $\nu_1 = \nu/(1 - \nu)$ при плоской деформации, где ν –

коэффициент Пуассона. Поскольку вектор поверхностных напряжений $\{\mathbf{q}_h\}$ и матрицы $[\mathbf{C}_h]$, $[\mathbf{P}_h]$ имеют блочную структуру, связанную с контурными узлами сетки x_α , обозначим эти блоки через $\{\mathbf{q}_h\}_\alpha$, $[\mathbf{C}_h]_\alpha$, $[\mathbf{P}_h]_\alpha$ соответственно. Пусть n_1 и n_2 – компоненты вектора внешней нормали к контуру и q_N , q_S – нормальная и касательная составляющие тензора напряжений в рассматриваемой точке.

Случай 1. Узел не закреплен и заданы компоненты q_N , q_S :

$$[\mathbf{C}_h]_\alpha = \begin{bmatrix} n_2^2(n_2^2 - \nu_1 n_1^2) & n_2^2(n_1^2 - \nu_1 n_2^2) & -2n_1 n_2^3(1 + \nu_1) \\ n_1^2(n_2^2 - \nu_1 n_1^2) & n_1^2(n_1^2 - \nu_1 n_2^2) & -2n_1^3 n_2(1 + \nu_1) \\ -n_1 n_2(n_2^2 - \nu_1 n_1^2) & -n_1 n_2(n_1^2 - \nu_1 n_2^2) & 2n_1^2 n_2^2(1 + \nu_1) \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{P}_h]_\alpha = \begin{bmatrix} (n_1^2 + \nu_1 n_2^2) & 0 & -2n_1 n_2 \\ (n_2^2 + \nu_1 n_1^2) & 0 & 2n_1 n_2 \\ (1 - \nu_1)n_1 n_2 & 0 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}; \quad \{\mathbf{q}_h\}_\alpha = \{q_N \quad 0 \quad q_S\}^T. \quad (28)$$

Случай 2. Узел закреплен от нормальных перемещений u_N и задана компонента касательного напряжения q_S :

$$[\mathbf{C}_h]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 - 2n_1^2 n_2^2 & 2n_1^2 n_2^2 & 2n_1 n_2(n_1^2 - n_2^2) \\ 2n_1^2 n_2^2 & 1 - 2n_1^2 n_2^2 & -2n_1 n_2(n_1^2 - n_2^2) \\ n_1 n_2(n_1^2 - n_2^2) & -n_1 n_2(n_1^2 - n_2^2) & 4n_1^2 n_2^2 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{P}_h]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2n_1 n_2 \\ 0 & 0 & 2n_1 n_2 \\ 0 & 0 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}; \quad \{\mathbf{q}_h\}_\alpha = \{0 \quad 0 \quad q_S\}^T. \quad (29)$$

Случай 3. Узел закреплен от касательных перемещений u_S и задана компонента нормального напряжения q_N :

$$[\mathbf{C}_h]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 - n_1^2(n_1^2 + \nu_1 n_2^2) & -n_2^2(n_1^2 + \nu_1 n_2^2) & -2n_1 n_2(n_1^2 + \nu_1 n_2^2) \\ -n_1^2(n_2^2 + \nu_1 n_1^2) & 1 - n_2^2(n_2^2 + \nu_1 n_1^2) & -2n_1 n_2(n_2^2 + \nu_1 n_1^2) \\ -n_1^3 n_2(1 - \nu_1) & -n_1 n_2^3(1 - \nu_1) & 1 - 2n_1^2 n_2^2(1 - \nu_1) \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{P}_h]_\alpha = \begin{bmatrix} (n_1^2 + \nu_1 n_2^2) & 0 & 0 \\ (n_2^2 + \nu_1 n_1^2) & 0 & 0 \\ (1 - \nu_1)n_1 n_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \{\mathbf{q}_h\}_\alpha = \{q_N \quad 0 \quad 0\}^T. \quad (30)$$

Можно также получить явные выражения для матриц $[\mathbf{C}_h]_\alpha$ и $[\mathbf{P}_h]_\alpha$ при рассмотрении осесимметричной задачи теории упругости.

Случай 1. Узел не закреплен и заданы компоненты q_N, q_S :

$$\begin{aligned}
 [C_h]_\alpha &= \begin{bmatrix} n_2^2(n_2^2 - \nu_1 n_1^2) & n_2^2(n_1^2 - \nu_1 n_2^2) & -2n_1 n_2^3(1 + \nu_1) & 0 \\ n_1^2(n_2^2 - \nu_1 n_1^2) & n_1^2(n_1^2 - \nu_1 n_2^2) & -2n_1^3 n_2(1 + \nu_1) & 0 \\ -n_1 n_2(n_2^2 - \nu_1 n_1^2) & -n_1 n_2(n_1^2 - \nu_1 n_2^2) & 2n_1^2 n_2^2(1 + \nu_1) & 0 \\ -\nu_1 n_1^2 & -\nu_1 n_2^2 & -2\nu_1 n_1 n_2 & 1 \end{bmatrix}; \\
 [P_h]_\alpha &= \begin{bmatrix} (n_1^2 - \nu_1 n_2^2) & 0 & -2n_1 n_2 & 0 \\ (n_2^2 - \nu_1 n_1^2) & 0 & 2n_1 n_2 & 0 \\ (1 + \nu_1)n_1 n_2 & 0 & n_1^2 - n_2^2 & 0 \\ \nu_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \{q_h\}_\alpha = \{q_N \quad 0 \quad q_S \quad 0\}^T.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Случай 2. Узел закреплен от нормальных перемещений u_N и задана компонента касательного напряжения q_S :

$$\begin{aligned}
 [C_h]_\alpha &= \begin{bmatrix} 1 - 2n_1^2 n_2^2 & 2n_1^2 n_2^2 & 2n_1 n_2(n_1^2 - n_2^2) & 0 \\ 2n_1^2 n_2^2 & 1 - 2n_1^2 n_2^2 & -2n_1 n_2(n_1^2 - n_2^2) & 0 \\ n_1 n_2(n_1^2 - n_2^2) & -n_1 n_2(n_1^2 - n_2^2) & 4n_1^2 n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 [P_h]_\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2n_1 n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2n_1 n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_1^2 - n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \{q_h\}_\alpha = \{0 \quad 0 \quad q_S \quad 0\}^T.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Случай 3. Узел закреплен от касательных перемещений u_S и задана компонента нормального напряжения q_N :

$$\begin{aligned}
 [C_h]_\alpha &= \begin{bmatrix} 1 - n_1^2(n_1^2 + \nu_1 n_2^2) & -n_2^2(n_1^2 + \nu_1 n_2^2) & -2n_1 n_2(n_1^2 + \nu_1 n_2^2) & 0 \\ -n_1^2(n_2^2 + \nu_1 n_1^2) & 1 - n_2^2(n_2^2 + \nu_1 n_1^2) & -2n_1 n_2(n_2^2 + \nu_1 n_1^2) & 0 \\ -n_1^3 n_2(1 - \nu_1) & -n_1 n_2^3(1 - \nu_1) & 1 - 2n_1^2 n_2^2(1 - \nu_1) & 0 \\ -\nu_1 n_1^2 & -\nu_1 n_2^2 & -2\nu_1 n_1 n_2 & 1 \end{bmatrix}; \\
 [P_h]_\alpha &= \begin{bmatrix} (n_1^2 + \nu_1 n_2^2) & 0 & 0 & 0 \\ (n_2^2 + \nu_1 n_1^2) & 0 & 0 & 0 \\ (1 - \nu_1)n_1 n_2 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \{q_h\}_\alpha = \{q_N \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Случай 4 (специальный). Узел расположен на оси вращения $x_1 = 0$, $\sigma_{11} = \sigma_{44}$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{44}$ и $\sigma_{12} = \varepsilon_{12} = 0$:

$$[C_h]_c = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Замечание 3. Приведем квадратурные схемы и весовые множители квадратуры ω_α и ω_T , соответствующие трем вершинам x_j , $1 \leq j \leq 3$, и центру тяжести x_T треугольника $T \in T_h(\Omega)$. Применение кусочно-линейного восполнения и функции-колокола для плоских задач приводит к формулам следующего вида:

$$\int_T \eta(x) dx \approx \Delta_T [\omega_\alpha \sum_{j=1}^3 \eta(x_j) + \omega_T \eta(x_T)], \quad (35)$$

причем $\omega_\alpha = 2/9$, $\omega_T = 1/3$ – для кусочно-линейного восполнения и $\omega_\alpha = 11/60$, $\omega_T = 27/60$ – при использовании функции-колокола.

Для осесимметричных задач получаем

$$\int_T \eta(x) x_1 dx \approx \Delta_T \{ \omega_\alpha \sum_{j=1}^3 [r_j + (1 - 4\omega_T)r_T] \eta(x_j) + \omega_T r_T \eta(x_T) \}, \quad (36)$$

где $\omega_\alpha = 1/12$, $\omega_T = 1/9$ – для кусочно-линейного восполнения; $\omega_\alpha = 5/60$, $\omega_T = 9/60$ – для функции-колокола; $r_T = r_1 + r_2 + r_3$; через r_j обозначена координата x_1 узла x_j .

Замечание 4. Покажем, что применение кусочно-линейного восполнения и функции-колокола обеспечивают выполнение неравенств

$$\|\eta_h\|_X \leq [\eta_h]_X \leq R \|\eta_h\|_X, \quad (37)$$

где R – положительная константа, не зависящая от h ; $[\cdot]_X$ – норма, определяемая скалярным произведением $[\cdot; \cdot]_X$, которое вычисляется с помощью формул численного интегрирования (35). Действительно, пусть

$$[\eta_h]_X^2 = \sum_{T \in T_h(\Omega)} \mu_T(\eta_h) \Delta_T, \quad \|\eta_h\|_X^2 = \sum_{T \in T_h(\Omega)} \pi_T(\eta_h) \Delta_T, \quad (38)$$

где

$$\mu_T(\eta_h) = \omega_\alpha (\bar{\eta}_\alpha^2 + \bar{\eta}_\beta^2 + \bar{\eta}_\gamma^2) + \omega_T \bar{\eta}_T^2, \quad (39)$$

а выражения для $\pi_T(\eta_h)$ получаются в результате точного интегрирования квадрата нормы $\|\cdot\|_X$, что приводит к формулам следующего вида:

$$\pi_T(\eta_h) = \frac{1}{9}[\bar{\eta}_\alpha^2 + \bar{\eta}_\beta^2 + \bar{\eta}_\gamma^2 + \frac{3}{2}\bar{\eta}_T^2 + \frac{1}{2}(\bar{\eta}_\alpha\bar{\eta}_\beta + \bar{\eta}_\beta\bar{\eta}_\gamma + \bar{\eta}_\gamma\bar{\eta}_\alpha) + (\bar{\eta}_\alpha + \bar{\eta}_\beta + \bar{\eta}_\gamma)\bar{\eta}_T] \quad (40)$$

– для кусочно-линейного восполнения;

$$\pi_T(\eta_h) = \frac{1}{840}[83(\bar{\eta}_\alpha^2 + \bar{\eta}_\beta^2 + \bar{\eta}_\gamma^2) + 243\bar{\eta}_T^2 + 26(\bar{\eta}_\alpha\bar{\eta}_\beta + \bar{\eta}_\beta\bar{\eta}_\gamma + \bar{\eta}_\gamma\bar{\eta}_\alpha) + 90(\bar{\eta}_\alpha + \bar{\eta}_\beta + \bar{\eta}_\gamma)\bar{\eta}_T] \quad (41)$$

– при использовании функции-колокола.

Покажем, что при кусочно-линейном восполнении справедливы неравенства

$$\pi_T(\eta_h) \leq \mu_T(\eta_h) \leq 6\pi_T(\eta_h). \quad (42)$$

Действительно, преобразуем (40) следующим образом:

$$\pi_T(\eta_h) = \frac{1}{18} \left[\frac{3}{2}(\bar{\eta}_\alpha^2 + \bar{\eta}_\beta^2 + \bar{\eta}_\gamma^2) + \bar{\eta}_T^2 + \frac{1}{2}(\bar{\eta}_\alpha + \bar{\eta}_\beta + \bar{\eta}_\gamma + 2\bar{\eta}_T)^2 \right]. \quad (43)$$

С другой стороны,

$$\pi_T(\eta_h) = \frac{1}{9} \{ 2(\bar{\eta}_\alpha^2 + \bar{\eta}_\beta^2 + \bar{\eta}_\gamma^2) + 3\bar{\eta}_T^2 - \frac{1}{4}[(\bar{\eta}_\alpha - \bar{\eta}_\beta)^2 + (\bar{\eta}_\beta - \bar{\eta}_\gamma)^2 + (\bar{\eta}_\gamma - \bar{\eta}_\alpha)^2] - \frac{1}{2}[(\bar{\eta}_\alpha - \bar{\eta}_T)^2 + (\bar{\eta}_\beta - \bar{\eta}_T)^2 + (\bar{\eta}_\gamma - \bar{\eta}_T)^2] \}. \quad (44)$$

С использованием соотношений (43), (44) получаем неравенства (42) и, следовательно, для кусочно-линейного восполнения имеем неравенства (37) с постоянной $R = \sqrt{6}$. Нетрудно проверить тот факт, что применение функции-колокола также приводит к неравенствам (37), однако при этом находим лучшую постоянную $R = \sqrt{13/3}$.

4. Метод сопряженных градиентов для решения уравнений смешанного метода. Для решения системы уравнений (23) рассмотрим обобщенный метод сопряженных градиентов [4, 5] с переобуславливающей матрицей $[\Lambda_h]$, которая симметрична и положительно определена.

Пусть $\{\mathbf{u}_h^0\}$ – произвольное начальное приближение к решению $\{\mathbf{u}_h\}$ и $\{\mathbf{r}_h^0\}$ – вектор начальной невязки, который вычисляется по формуле

$$\{\mathbf{r}_h^o\} = [\mathbf{H}_h]^T [\mathbf{E}_h] [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{u}_h^o\} + \omega_T [\mathbf{K}_h] \{\mathbf{u}_h^o\} - \{\mathbf{f}_h\}. \quad (45)$$

Вектор направления $\{\mathbf{g}_h^o\}$ и начальное значение параметра β принимаются равными нулю. Тогда формулы метода сопряженных градиентов могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} [\Lambda_h] \{\mathbf{p}_h\} &= \{\mathbf{r}_h^k\}; \\ \gamma^k &= \{\mathbf{p}_h\}^T \{\mathbf{r}_h^k\}; \\ \beta &= \frac{\gamma^k}{\gamma^{k-1}}; \\ \{\mathbf{g}_h^{k+1}\} &= \{\mathbf{p}_h\} + \beta \{\mathbf{g}_h^k\}; \\ \{\mathbf{s}_h\} &= [\mathbf{H}_h]^T [\mathbf{E}_h] [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{g}_h^{k+1}\} + \omega_T [\mathbf{K}_h] \{\mathbf{g}_h^{k+1}\}; \\ \lambda &= \frac{\gamma^k}{\{\mathbf{p}_h\}^T \{\mathbf{s}_h\}}; \\ \{\mathbf{u}_h^{k+1}\} &= \{\mathbf{u}_h^k\} - \lambda \{\mathbf{g}_h^{k+1}\}; \\ \{\mathbf{r}_h^{k+1}\} &= \{\mathbf{r}_h^k\} - \lambda \{\mathbf{s}_h\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Простейший выбор переобуславливающей матрицы $[\Lambda_h]$ состоит в использовании диагональной матрицы, коэффициенты которой расположены на главной диагонали матрицы жесткости $[\mathbf{K}_h]$. Тогда получаем итерационный алгоритм с минимальными требованиями к ресурсам памяти компьютера. Однако скорость сходимости итерационного процесса не всегда оказывается приемлемой.

Более эффективным оказался подход, в котором для построения переобуславливающей матрицы $[\Lambda_h]$ применяется матрица перехода для метода симметричной верхней релаксации [6]. Исходя из этого имеем

$$[\Lambda_h(\omega)] = ([\mathbf{N}_h] + \omega [\mathbf{R}_h]^T) [\mathbf{N}_h]^{-1} ([\mathbf{N}_h] + \omega [\mathbf{R}_h]), \quad (47)$$

где ω – параметр релаксации, вводимый для управления скоростью сходимости итерационного процесса, а матрицы $[\mathbf{N}_h]$ и $[\mathbf{R}_h]$ определяются на основании разложения матрицы $[\mathbf{K}_h]$ в виде

$$[\mathbf{K}_h] = [\mathbf{R}_h]^T + [\mathbf{N}_h] + [\mathbf{R}_h]. \quad (48)$$

Если $[\mathbf{N}_h]$ – симметричная положительно определенная матрица и $\omega \in (0, 2)$, то итерационный процесс (46) всегда сходится, причем скорость сходимости зависит от выбора параметра релаксации ω .

При построении матрицы $[\Lambda_h(\omega)]$ учитывалась блочная структура матрицы жесткости $[\mathbf{K}_h]$, в которой матричные блоки соответствуют узлам сетки и размер блока определяется числом степеней свободы в каждом узле. Тогда $[\mathbf{N}_h]$ – блочно-диагональная матрица размером 2×2 с коэффициентами, расположенными на главной диагонали блочной матрицы $[\mathbf{K}_h]$, и $[\mathbf{R}_h]$ – строго верхняя, $[\mathbf{R}_h]^T$ – строго нижняя треугольные блочные матрицы.

Отметим, что матрица $[\Lambda_h(\omega)]$ не строится в явном виде, поскольку для нахождения вектора $\{\mathbf{p}_h\}$ из первого уравнения (46) можно применить метод дробных шагов решения систем с треугольными матрицами.

В соответствии с (47) имеем

$$[\Lambda_h(\omega)]^{-1} = ([\mathbf{N}_h] + \omega[\mathbf{R}_h])^{-1}[\mathbf{N}_h][[\mathbf{N}_h] + \omega[\mathbf{R}_h]^T]^{-1},$$

и, следовательно, процедуру вычисления вектора $\{\mathbf{p}_h\}$ можно разбить на два цикла:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{p}_h\}^{1/2} &= [\mathbf{N}_h]^{-1}(\{\mathbf{r}_h^k\} - \omega[\mathbf{R}_h]^T\{\mathbf{p}_h\}^{1/2}); \\ \{\mathbf{p}_h\} &= \{\mathbf{p}_h\}^{1/2} - \omega[\mathbf{N}_h]^{-1}[\mathbf{R}_h]\{\mathbf{p}_h\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Если в памяти компьютера хранить верхнюю треугольную матрицу $[\mathbf{R}_h]$, то в покомпонентной записи уравнения (49) имеют вид

$$\begin{aligned} \{\mathbf{p}_h\}_\alpha^{1/2} &= [\mathbf{N}_h]_{\alpha\alpha}^{-1}(\{\mathbf{r}_h^k\}_\alpha - \omega \sum_{\beta < \alpha} [\mathbf{R}_h]_{\beta\alpha}^T \{\mathbf{p}_h\}_\beta^{1/2}), \quad \alpha = 1, \dots, N; \\ \{\mathbf{p}_h\}_\alpha &= \{\mathbf{p}_h\}_\alpha^{1/2} - \omega [\mathbf{N}_h]_{\alpha\alpha}^{-1} \sum_{\beta > \alpha} [\mathbf{R}_h]_{\alpha\beta} \{\mathbf{p}_h\}_\beta, \quad \alpha = N, \dots, 1. \end{aligned} \quad (50)$$

Численная реализация алгоритмов (50) не требует вспомогательного вектора для хранения промежуточной информации. Все вычисления проводятся с одним вектором $\{\mathbf{p}_h\}$. Таким образом, получаем эффективный итерационный процесс, который обладает высокой скоростью сходимости и минимальными запросами к ресурсам памяти компьютера, поскольку не требует дополнительных затрат, связанных с хранением переобуславливающей матрицы $[\Lambda_h(\omega)]$.

Установлено, что при $1,35 \leq \omega \leq 1,4$ сходимость итерационного процесса во многих случаях приближается к оптимальной, и применение переобуславливающей матрицы $[\Lambda_h(\omega)]$ приводит к существенному уменьшению количества требуемых итераций по сравнению с простейшим выбором $[\Lambda_h] = [\mathbf{N}_h]$. При тщательном анализе итерационных формул (46) удается

добиться исключения умножения матрицы $[\mathbf{K}_h]$ на вектор в процессе итераций и тем самым увеличить быстродействие алгоритма.

Однако наиболее эффективным, в смысле скорости сходимости, является, по-видимому, выбор $[\Lambda_h] = \omega_T [\mathbf{K}_h]$ с последующим разложением матрицы $[\Lambda_h]$ в виде произведения, т.е.,

$$[\Lambda_h] = \omega_T [\mathbf{K}_h] = [\mathbf{L}_h]^T [\mathbf{d}_h] [\mathbf{L}_h], \quad (51)$$

где $[\mathbf{d}_h]$ – диагональная матрица с положительными коэффициентами и $[\mathbf{L}_h]$ – верхняя треугольная матрица с единичной главной диагональю. В таком случае нет необходимости хранить исходную матрицу $[\mathbf{K}_h]$ в компактном виде, а умножение матрицы $[\mathbf{K}_h]$ на вектор в процессе итераций вообще можно исключить, используя следующие формулы:

$$\begin{aligned} \gamma^k &= \{\mathbf{r}_h^k\}^T \{\mathbf{r}_h^k\}; \\ \beta &= \frac{\gamma^k}{\gamma^{k-1}}; \\ \{\mathbf{g}_h^{k+1}\} &= \{\mathbf{r}_h^k\} + \beta \{\mathbf{g}_h^k\}; \\ [\mathbf{L}_h] \{\mathbf{p}_h\} &= [\mathbf{d}_h]^{-1/2} \{\mathbf{g}_h^{k+1}\}; \\ \{\mathbf{s}_h\}^{1/3} &= [\mathbf{H}_h]^T [\mathbf{E}_h] [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{p}_h\}; \\ [\mathbf{L}_h]^T \{\mathbf{s}_h\}^{2/3} &= \{\mathbf{s}_h\}^{1/3}; \\ \{\mathbf{s}_h\} &= \{\mathbf{g}_h^{k+1}\} + [\mathbf{d}_h]^{-1/2} \{\mathbf{s}_h\}^{2/3}; \\ \lambda &= \frac{\gamma^k}{\{\mathbf{s}_h\}^T \{\mathbf{g}_h^{k+1}\}}; \\ \{\mathbf{u}_h^{k+1}\} &= \{\mathbf{u}_h^k\} - \lambda \{\mathbf{p}_h\}; \\ \{\mathbf{r}_h^{k+1}\} &= \{\mathbf{r}_h^k\} - \lambda \{\mathbf{s}_h\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Реализация итерационного процесса (52) требует минимального количества итераций для достижения заданной точности решения, которое слабо зависит от параметра сетки h .

5. Схемы хранения матриц. Поскольку матрица $[\mathbf{H}_h]$ имеет редко-заполненную структуру, целесообразно использовать компактную схему хранения. Применялся разреженный строчный формат, предложенный Чэнгом [7]. Такая схема предъявляет минимальные требования к памяти компьютера и оказывается весьма эффективной при умножении разреженной матрицы на вектор. Тогда для вычисления вектора $\{\mathbf{s}_h\}$, который определяется на основании формулы

$$\{\mathbf{s}_h\} = [\mathbf{H}_h]^T [\mathbf{E}_h] [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{p}_h\} \quad (53)$$

и участвует в итерационном процессе (46) и (52), удобно использовать простую, но весьма эффективную численную процедуру, включающую последовательно следующие операции.

1. Обнуляется глобальный вектор $\{\mathbf{s}_h\}$.
2. Цикл по узлам сетки \mathbf{x}_α .
3. Обнуляется локальный вектор $\{\eta_\alpha\}$, соответствующий компонентам деформаций для узла \mathbf{x}_α .
4. Цикл по узлам \mathbf{x}_β , окружающим узел \mathbf{x}_α . К вектору $\{\eta_\alpha\}$ прибавляется вектор $[\mathbf{H}_h]_{\alpha\beta} \{\mathbf{p}_h\}_\beta$. Конец цикла по узлам \mathbf{x}_β .
5. Умножается матрица $[\mathbf{E}_h]_\alpha$ на вектор $\{\eta_\alpha\}$. Результат умножения помещается в $\{\eta_\alpha\}$.
6. Цикл по узлам \mathbf{x}_β , окружающим узел \mathbf{x}_α .
7. К вектору $\{\mathbf{s}_h\}_\beta$ прибавляется вектор $[\mathbf{H}_h]_{\beta\alpha}^T \{\eta_\alpha\}$. Конец цикла по узлам \mathbf{x}_β .
8. Конец цикла по узлам сетки \mathbf{x}_α .

При факторизации переобуславливающей матрицы $[\Lambda_h]$ использовалась профильная схема хранения верхней треугольной матрицы $[\mathbf{L}_h]$, предложенная Дженнингсом [8], а для сжатия профиля матрицы $[\Lambda_h]$ – алгоритмы Катхилла–Макки [9]. Численные аспекты реализации, алгоритм и программа профильного метода приведены в [10].

6. Вычисление деформаций и напряжений в подпространстве. Заключительным этапом решения задачи является процедура проектирования вектора деформаций на подмножество векторов при кусочно-линейном выполнении (5). Таким образом, приходим к решению системы линейных уравнений с симметричной и положительно определенной матрицей Грамма $[\mathbf{G}_h]$

$$[\mathbf{G}_h] \{\varepsilon_{1h}\} = [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{u}_h\}. \quad (54)$$

Поскольку число обусловленности матрицы $[\mathbf{G}_h]$ не существенно зависит от параметра сетки h , для решения уравнения (54) целесообразно использовать итерационные методы с выбором начального приближения

$$\{\varepsilon_{1h}^0\} = [\widetilde{\mathbf{M}}_h]^{-1} [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{u}_h\}. \quad (55)$$

Применение метода сопряженных градиентов с переобуславливающей диагональной матрицей, коэффициенты которой расположены на главной диагонали матрицы $[\mathbf{G}_h]$, показало исключительно высокую эффективность алгоритма. Количество требуемых итераций не зависит от разбиения, и выбор начального приближения (55) обеспечивают минимальные вычислительные затраты для получения решения.

Определяя из уравнения (54) вектор $\{\varepsilon_{1h}\}$, окончательные напряжения и деформации находятся в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} \{\sigma_{1h}\} &= [\mathbf{C}_h][\mathbf{D}_h](\{\varepsilon_{1h}\} - \{\xi_h\}) + [\mathbf{P}_h]\{q_h\}; \\ \{\varepsilon_{1h}\} &= [\mathbf{D}_h]^{-1}\{\sigma_{1h}\} + \{\xi_h\}. \end{aligned} \quad (56)$$

7. Численный анализ. Переходим к численному анализу решения тестовых задач. Результаты сопоставлялись с известными аналитическими решениями [11–19] и полученными на основе классического МКЭ (КМКЭ).

Во всех приведенных ниже модельных задачах использовались безразмерные значения. Так, например, модуль упругости материала E принимался равным единице. При решении задач смешанным МКЭ (СМКЭ) учитывались граничные условия для нормальных и касательных напряжений на контуре. Для схем КМКЭ значения напряжений в узлах сетки определялись усреднением. При построении треугольной сетки использовалось равномерное разбиение типа “крест”. Ниже приведено несколько примеров, иллюстрирующих сходимость и точность численных решений, полученных на основе СМКЭ с применением функции-колокола и кусочно-линейного восполнения деформаций и напряжений соответственно для плоских и осесимметричных задач. При сравнении результатов, полученных с помощью КМКЭ, используются обозначения: КМКЭ-1 – линейный треугольный элемент, КМКЭ-2 – билинейный четырехугольный элемент, КМКЭ-3 – квадратичный шестиузловой треугольный элемент.

Задача о чистом изгибе бруса. Рассматривался брус длиной $L=10$ и высотой $H=2$ прямоугольного поперечного сечения (рис. 1). К торцам бруса прикладывалась осевая нагрузка, распределенная по линейному закону $q = 2x_2/H$, действие которой эквивалентно изгибающему моменту $M = H^2/6$. Коэффициент Пуассона задавался равным нулю. Результаты расчетов продольного напряжения в центральном сечении и максимального прогиба на торце бруса представлены в табл. 1. Там же приведены разбиения по длине L и высоте H бруса. Из таблицы видно, что СМКЭ дает более точные аппроксимации как напряжений, так и перемещений по сравнению с КМКЭ-1. Заметим, что если к торцам бруса вместо напряжений приложить осевые перемещения, изменяющиеся по линейному закону, то смешанный метод даст точное решение задачи.

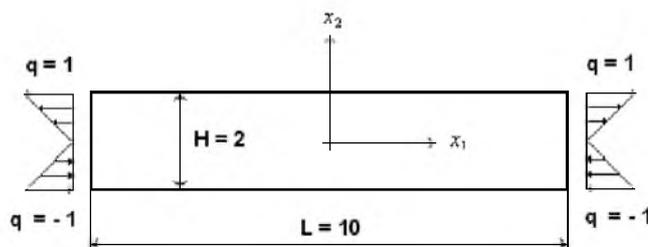


Рис. 1. Задача о чистом изгибе бруса.

Т а б л и ц а 1

Результаты расчетов продольного напряжения в центральном сечении и максимального прогиба для задачи о чистом изгибе бруса

Сетка	Продольное напряжение		Погрешность, %		Максимальный прогиб		Погрешность, %	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
10×2	0,600	0,991	40,0	0,90	10,000	12,363	20,00	1,09
20×4	0,824	1,002	17,6	-0,20	11,765	12,524	5,88	-0,19
30×6	0,892	1,001	10,8	-0,15	12,163	12,520	2,70	-0,16
40×8	0,923	1,001	7,7	-0,10	12,308	12,513	1,54	-0,10
50×10	0,941	1,000	5,9	-0,07	12,377	12,509	0,98	-0,07
60×12	0,952	1,000	4,8	-0,05	12,414	12,507	0,69	-0,06
70×14	0,959	1,000	4,1	-0,04	12,437	12,505	0,50	-0,04
80×16	0,965	1,000	3,5	-0,03	12,451	12,504	0,39	-0,03
[11]	1,0				12,5			

Задача о поперечном изгибе консольного бруса. Геометрические размеры, механические свойства и сетка задавались, как и для задачи о чистом изгибе бруса. К свободному торцу прикладывалась поперечная сосредоточенная сила $P = 1$ (рис. 2). Результаты расчетов максимальных продольного и касательного напряжений в центральном сечении бруса представлены в табл. 2, 3.

Т а б л и ц а 2

Результаты расчетов максимального продольного напряжения в центральном сечении для задачи о поперечном изгибе бруса

Сетка	Продольное напряжение			Погрешность, %		
	КМКЭ-1	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-3	СМКЭ
20×4	6,176	7,533	7,515	17,65	-0,44	-0,20
30×6	6,689	7,511	7,511	10,81	-0,20	-0,15
40×8	6,923	7,508	7,508	7,69	-0,11	-0,11
50×10	7,054	7,505	7,505	5,95	-0,07	-0,07
60×12	7,138	7,504	7,504	4,83	-0,05	-0,05
70×14	7,195	7,503	7,503	4,07	-0,04	-0,04
80×16	7,237	7,502	7,502	3,51	-0,03	-0,03
[11]	7,5					

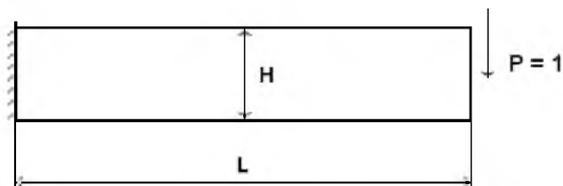


Рис. 2. Задача о поперечном изгибе консольного бруса.

Т а б л и ц а 3

**Результаты расчетов максимального касательного напряжения
в центральном сечении для задачи о поперечном изгибе бруса**

Сетка	Касательное напряжение			Погрешность, %		
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ
20×4	0,662	0,688	0,695	11,73	8,27	7,33
30×6	0,709	0,722	0,726	5,47	3,73	3,20
40×8	0,727	0,734	0,737	3,07	2,13	1,73
50×10	0,735	0,740	0,741	2,00	1,33	1,20
60×12	0,740	0,743	0,744	1,33	0,93	0,80
70×14	0,742	0,745	0,746	1,07	0,67	0,53
80×16	0,744	0,746	0,747	0,80	0,53	0,40
[11]	0,75					

Изгиб бруса равномерной нагрузкой. Геометрические размеры, механические свойства и сетка те же, что и при решении задачи о чистом изгибе бруса. Боковые торцы закреплялись от поперечных (вертикальных) перемещений. По длине бруса задавалась равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q=1$ (рис. 3). При решении задачи оценивалась точность определения максимального продольного напряжения и прогиба в центральном сечении бруса. Результаты расчетов приведены в табл. 4, 5. Сравнение численных решений, полученных на основе КМКЭ-1, КМКЭ-2 и СМКЭ, свидетельствует о преимуществе смешанного метода.

Т а б л и ц а 4

**Результаты расчетов максимального продольного напряжения
для задачи об изгибе бруса равномерной нагрузкой**

Сетка	Продольное напряжение			Погрешность, %		
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ
10×2	11,025	18,376	18,460	41,82	3,03	2,58
20×4	15,429	18,797	18,895	18,58	0,81	0,29
30×6	16,791	18,881	18,936	11,39	0,36	0,07
40×8	17,413	18,911	18,945	8,11	0,21	0,03
50×10	17,763	18,925	18,948	6,26	0,13	0,01
60×12	17,986	18,933	18,949	5,09	0,09	0
70×14	18,139	18,937	18,950	4,28	0,07	0
80×16	18,251	18,940	18,950	3,69	0,05	0
[11]	18,95					

Задача Ламе. Рассматривался полый цилиндр, находящийся под действием внутреннего давления $q=1$, с отношением радиусов $R_1/R_2=1/2$ (рис. 4). Расчет выполнялся при условии плоского напряженного состояния для четверти сечения цилиндра. Построение треугольной сетки осуществлялось на основе разбиения, показанного на рис. 5. Коэффициент Пуассона задавался равным 0,3. Оценивалась точность определения окружного напря-

жения и радиального перемещения на внутренней поверхности цилиндра. Результаты расчетов представлены в табл. 6. Там же приведены разбиения по углу и радиусу цилиндра. Как и в предыдущих задачах, имеют место улучшенные аппроксимации СМКЭ для напряжений и перемещений по сравнению с КМКЭ-1.

Т а б л и ц а 5

Результаты расчетов прогиба в центральном сечении для задачи об изгибе бруса равномерной нагрузкой

Сетка	Максимальный прогиб			Погрешность, %		
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ
10×2	166,16	204,44	207,99	20,99	2,79	1,10
20×4	197,04	208,69	210,61	6,31	0,77	-0,14
30×6	204,15	209,54	210,54	2,93	0,37	-0,11
40×8	206,76	209,84	210,45	1,69	0,22	-0,06
50×10	208,00	209,98	210,38	1,10	0,17	-0,03
60×12	208,68	210,06	210,34	0,77	0,12	-0,01
70×14	209,08	210,10	210,32	0,58	0,10	0
80×16	209,35	210,13	210,30	0,45	0,08	0
[11]	210,31					

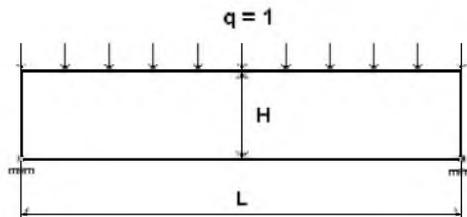


Рис. 3. Задача об изгибе бруса поперечной нагрузкой.

Неравномерный нагрев полого цилиндра. Геометрические размеры и сетка те же, что и в задаче Ламе. Полагали, что на внутренней поверхности цилиндра температура $\Delta T = 1$, на внешней поверхности – нулевая и торцы теплоизолированы. Тогда распределение температуры вдоль радиуса цилиндра r описывается известной формулой, полученной из теории теплопередачи:

$$T(r) = \frac{\Delta T}{\ln(R_2/R_1)} \ln(R_2/r). \quad (57)$$

Расчет термических напряжений выполнялся при условии плоской деформации. Коэффициент линейного температурного расширения принимался равным единице. Оценивалась точность определения окружных напряжений на внутренней и внешней поверхностях цилиндра. Результаты решения, полученные на основе КМКЭ-1 и СМКЭ, приведены в табл. 7. Видно, что СМКЭ дает более точные значения напряжений по сравнению с КМКЭ-1.

Т а б л и ц а 6

Результаты расчетов окружных напряжений и радиальных перемещений на внутренней поверхности цилиндра для задачи Ламе

Сетка	Окружное напряжение		Погрешность, %		Радиальное перемещение		Погрешность, %	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
6×3	1,467	1,608	11,98	3,52	1,9238	1,9653	2,18	0,07
12×6	1,574	1,649	5,56	1,06	1,9556	1,9665	0,56	0,01
18×9	1,599	1,658	4,02	0,48	1,9604	1,9666	0,32	0
24×12	1,623	1,662	2,62	0,28	1,9638	1,9666	0,14	0
30×15	1,632	1,664	2,04	0,12	1,9649	1,9666	0,09	0
[12]	1,666				1,9666			

Т а б л и ц а 7

Результаты расчетов окружных напряжений для задачи о неравномерном нагреве полого цилиндра

Сетка	Внутренняя поверхность		Погрешность, %		Внешняя поверхность		Погрешность, %	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
6×3	0,714	0,798	18,33	8,73	0,518	0,575	6,55	-3,73
12×6	0,797	0,852	8,84	2,55	0,534	0,559	3,66	-0,85
18×9	0,824	0,864	5,75	1,18	0,541	0,556	2,40	-0,31
24×12	0,837	0,868	4,26	0,71	0,544	0,555	1,86	-0,21
30×15	0,844	0,870	3,46	0,48	0,546	0,555	1,50	-0,14
[12]	0,8743				0,5543			

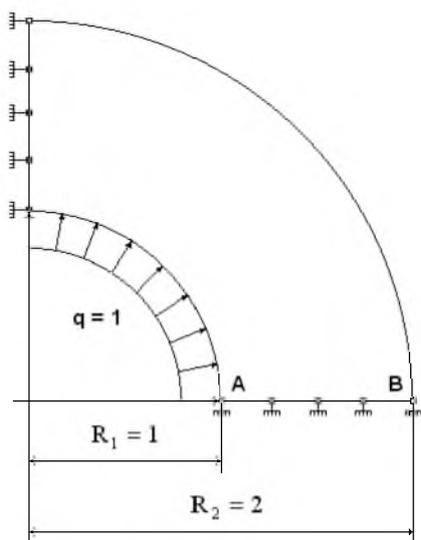


Рис. 4

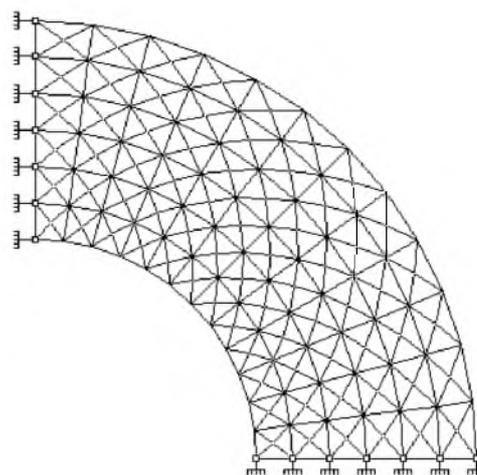


Рис. 5

Рис. 4. Полый цилиндр, находящийся под действием внутреннего давления.

Рис. 5. Разбиение четверти сечения цилиндра на треугольники. Сетка 12×6.

Расчет двух составных цилиндров с гарантированным натягом. Задача рассматривалась в осесимметричной постановке при условии $R_1/R_c = 1/1,5$ и $R_c/R_2 = 1,5/2$, где R_c – радиус поверхности контакта. Полагали, что оба цилиндра зажаты с торцов, а величина натяга $\delta = 10$ (рис. 6). Коэффициент Пуассона принимался равным нулю. Результаты расчетов контактного давления и окружных напряжений представлены в табл. 8, 9. Там же приведены разбиения по радиусу и высоте цилиндра. При решении задачи КМКЭ контактное давление определялось как полусумма радиальных напряжений на поверхности контакта.

Т а б л и ц а 8

Результаты расчетов контактного давления и окружных напряжений на внутренней поверхности для задачи о посадке двух составных цилиндров с натягом

Сетка	Контактное давление		Погрешность, %		Окружное напряжение		Погрешность, %	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
4 × 4	0,875	1,037	18,98	3,98	3,618	3,856	6,92	0,80
8 × 8	0,975	1,058	9,72	2,03	3,741	3,888	3,77	-0,02
12 × 12	1,009	1,066	6,53	1,30	3,788	3,885	2,55	0,02
16 × 16	1,027	1,069	4,91	1,02	3,817	3,887	1,80	0
20 × 20	1,038	1,072	3,89	0,74	3,842	3,887	1,16	0
32 × 32	1,054	1,075	2,41	0,46	3,849	3,887	0,98	0
64 × 64	1,067	1,077	1,20	0,28	3,869	3,887	0,46	0
[12]	1,08				3,887			

Т а б л и ц а 9

Результаты расчетов окружных напряжений на поверхности контакта для задачи о посадке двух составных цилиндров с натягом

Сетка	σ_θ (слева)		Погрешность, %		σ_θ (справа)		Погрешность, %	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
4 × 4	2,920	2,804	-3,99	0,14	3,616	3,846	6,25	0,28
8 × 8	2,860	2,807	-1,85	0,03	3,729	3,855	3,32	0,05
12 × 12	2,842	2,808	-1,21	0,01	3,770	3,856	2,25	0,02
16 × 16	2,833	2,808	-0,89	0	3,792	3,857	1,68	0
20 × 20	2,828	2,808	-0,71	0	3,805	3,857	1,35	0
32 × 32	2,821	2,808	-0,46	0	3,824	3,857	0,85	0
64 × 64	2,815	2,808	-0,25	0	3,841	3,857	0,41	0
[12]	2,808				3,857			

Толстое кольцо, сжатое двумя сосредоточенными силами. Отношение радиусов принималось как $R_1/R_2 = 1/2$. Ввиду симметрии задачи рассматривалась четверть кольца с сосредоточенной силой $P = 0,5$ (рис. 7). Коэффициент Пуассона задавался равным нулю. Сравнение результатов, полученных с помощью КМКЭ-1, КМКЭ-2 и СМКЭ, осуществлялось для окружных

напряжений σ_θ на внешнем и внутреннем радиусах кольца при $\theta = 0^\circ$ (точки A, B) и на внутреннем радиусе при $\theta = 90^\circ$ (точка C). Результаты расчетов представлены в табл. 10–12. Там же приведены разбиения по углу и радиусу кольца.

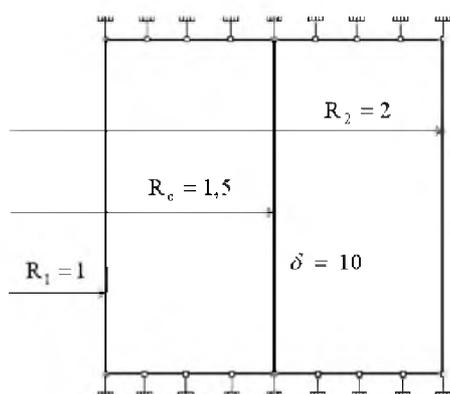


Рис. 6

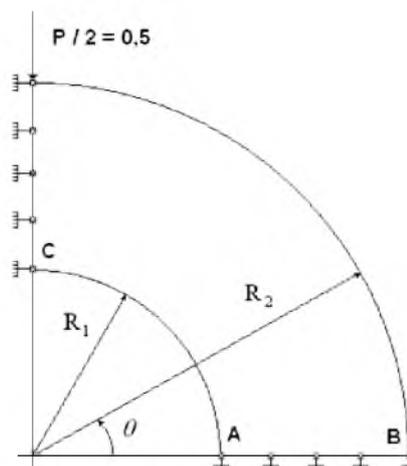


Рис. 7

Рис. 6. Расчет двух составных цилиндров с гарантированным натягом.
Рис. 7. Толстое кольцо, сжатое двумя сосредоточенными силами.

Сферический сосуд под действием внутреннего давления. Задача решалась в осесимметричной постановке с отношением радиусов $R_1/R_2 = 1/2$ и внутренним давлением $q = 10$. Для расчета была выделена четверть сечения сферы. Расчетная схема формально соответствует задаче Ламе и показана на рис. 4. Коэффициент Пуассона принимался равным нулю. Оценивалась точность вычисления окружных напряжений на внутреннем и внешнем радиусах сферы, в точках A и B соответственно. Сравнительные результаты расчетов представлены в табл. 13. Там же приведены разбиения по углу и толщине сосуда. Видно, что СМКЭ превосходит КМКЭ-1 в точности определения окружных напряжений на внутреннем и внешнем радиусах сферы.

Поперечный изгиб кривого бруса. Рассматривался брус квадратного поперечного сечения $B \times H = 1 \times 1$ в форме четверти кругового кольца с наружным радиусом $R_2 = 20,5$ и внутренним $R_1 = 19,5$ под действием сосредоточенной силы, приложенной на конце $P = 0,1$ (рис. 8). Расчет выполнялся при условии плоского напряженного состояния. Коэффициент Пуассона принимался равным 0,3. Оценивалась точность определения окружного напряжения σ_θ на внешней поверхности в заделке и прогиба свободного конца бруса по направлению силы P . Результаты сравнения численных решений, полученных на основе КМКЭ-1 и СМКЭ, представлены в табл. 14. Там же приведены разбиения по углу $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ и радиусу $R_1 \leq r \leq R_2$. Очевидно, что СМКЭ дает более точные значения как напряжений, так и перемещений по сравнению с КМКЭ-1.

Т а б л и ц а 10

Результаты расчетов напряжений в точке A для задачи о толстом кольце под действием двух сосредоточенных сил

Сетка	σ_θ при $r = R_1, \theta = 0^\circ$			Погрешность, %		
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ
6×3	1,918	2,570	2,695	32,61	9,71	5,32
12×6	2,391	2,753	2,792	15,99	3,28	1,91
18×9	2,547	2,795	2,813	10,52	1,80	1,17
24×12	2,623	2,811	2,821	7,84	1,24	0,89
30×15	2,667	2,818	2,825	6,30	0,99	0,75
36×18	2,696	2,823	2,827	5,28	0,82	0,68
42×21	2,716	2,825	2,829	4,58	0,75	0,61
48×24	2,731	2,827	2,830	4,05	0,68	0,57
96×48	2,783	2,831	2,832	2,22	0,54	0,50
[11]	2,8463					

Т а б л и ц а 11

Результаты расчетов напряжений в точке B для задачи о толстом кольце под действием двух сосредоточенных сил

Сетка	σ_θ при $r = R_2, \theta = 0^\circ$			Погрешность, %		
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ
6×3	0,543	0,880	0,870	41,97	5,96	7,03
12×6	0,778	0,919	0,918	16,86	1,79	1,90
18×9	0,841	0,926	0,926	10,13	1,05	1,05
24×12	0,869	0,929	0,929	7,14	0,73	0,79
30×15	0,884	0,930	0,929	5,53	0,62	0,73
36×18	0,894	0,931	0,930	4,47	0,57	0,62
42×21	0,900	0,931	0,931	3,82	0,52	0,57
48×24	0,904	0,931	0,931	3,40	0,50	0,51
96×48	0,919	0,932	0,932	1,79	0,40	0,40
[11]	0,9358					

Т а б л и ц а 12

Результаты расчетов напряжений в точке C для задачи о толстом кольце под действием двух сосредоточенных сил

Сетка	σ_θ при $r = R_1, \theta = 90^\circ$			Погрешность, %		
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	СМКЭ
6×3	1,757	2,550	2,829	45,60	21,05	12,41
12×6	2,477	2,988	3,097	23,31	7,49	4,11
18×9	2,738	3,110	3,165	15,23	3,71	2,01
24×12	2,868	3,160	3,193	11,20	2,16	1,14
30×15	2,944	3,184	3,206	8,85	1,42	0,74
36×18	2,995	3,199	3,214	7,27	0,96	0,49
42×21	3,030	3,207	3,218	6,19	0,71	0,37
48×24	3,056	3,213	3,222	5,38	0,52	0,24
96×48	3,146	3,228	3,297	2,60	0,06	0,01
[11]	3,2299					

Т а б л и ц а 13

Результаты расчетов окружных напряжений для задачи о сферическом сосуде под действием внутреннего давления

Сетка	Внутренняя поверхность		Погрешность, %		Внешняя поверхность		Погрешность, %	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
6×3	5,647	6,848	20,94	4,13	2,276	2,1379	-6,21	0,24
12×6	6,309	7,059	11,67	1,18	2,206	2,1417	-2,94	0,06
18×9	6,564	7,104	8,11	0,55	2,184	2,1422	-1,91	0,04
24×12	6,699	7,121	6,21	0,31	2,173	2,1426	-1,40	0,02
30×15	6,783	7,128	5,04	0,21	2,167	2,1427	-1,12	0,01
36×18	6,840	7,133	4,24	0,14	2,163	2,1427	-0,93	0
42×21	6,882	7,135	3,65	0,11	2,160	2,1428	-0,79	0
48×24	6,913	7,137	3,22	0,08	2,158	2,1428	-0,70	0
[11]	7,143				2,143			

Т а б л и ц а 14

Результаты расчетов окружных напряжений и прогиба для задачи о поперечном изгибе кривого бруса силой, приложенной на конце

Сетка	Окружное напряжение		Погрешность, %		Максимальный прогиб		Погрешность, %	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
30×1	3,119	11,029	73,35	5,77	4297,9	7087,2	43,02	6,04
50×2	6,864	11,587	41,35	1,00	6044,4	7480,9	19,86	0,82
60×2	7,247	11,927	38,08	-1,90	6345,2	7683,6	15,87	-1,87
70×3	8,552	11,635	26,93	0,59	6712,6	7508,1	11,00	0,46
80×3	8,760	11,772	25,15	-0,58	6860,4	7590,2	9,04	-0,63
90×4	9,435	11,656	19,39	0,41	7022,4	7518,6	6,90	0,32
100×4	9,553	11,725	18,38	-0,17	7102,3	7559,9	5,84	-0,23
[11]	11,7044				7542,648			

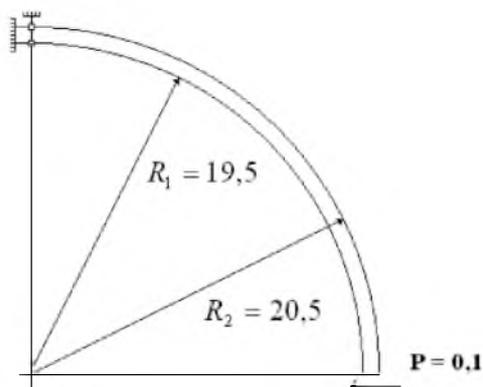


Рис. 8. Изгиб кривого бруса силой, приложенной на конце.

Растяжение полосы с центральной трещиной. Рассматривалась прямоугольная пластина шириной $W = 8$ и высотой $H = 16$ с центральной трещиной под действием одноосных растягивающих напряжений $q = 1$ (рис. 9). Отношение длины трещины a к ширине полосы W принималось равным $\lambda = a/W = 0,25$. Ввиду симметрии задачи расчет выполнялся для четверти пластины при условии плоского напряженного состояния. Коэффициент Пуассона задавался равным 0,25. Оценивалась точность численного решения в окрестности вершины трещины. Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений K_1 использовалось асимптотическое разложение перемещений вблизи вершины трещины [13], из которого следует

$$K_{1h} = \sqrt{\frac{\pi}{8r}} Ev, \quad (58)$$

где r – расстояние от вершины трещины до близлежащего узла сетки, расположенного на берегу трещины; v – перемещение этого узла в направлении действия q . Осуществлялось сравнение численных результатов с величиной K_1 и раскрытием трещины δ в центре, вычисленными на основании формул, приведенных в [14] и [15] соответственно:

$$K_1 = q \sqrt{\frac{\pi a}{2}} [1 + 0,5948\lambda^2 + 0,4812\lambda^4 + 0,3963\lambda^6 + 0,3367\lambda^8 + 0,2963\lambda^{10} + 0,2684\lambda^{12} + o(\lambda^{14})]; \quad (59)$$

$$\delta = \frac{2qa}{E} \left[-0,071 - 0,535\lambda + 0,169\lambda^2 + 0,02\lambda^3 - \frac{1,071}{\lambda} \ln(1 - \lambda) \right].$$

Результаты расчетов представлены в табл. 15, 16. Там же приведены разбиения по ширине полосы $W/2$ и вдоль длины трещины $a/2$. Видно, что СМКЭ имеет более высокую скорость сходимости по сравнению с КМКЭ при вычислении коэффициента интенсивности напряжений по формуле (58).

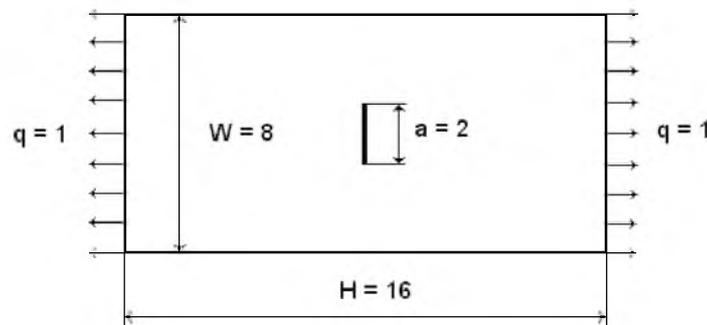


Рис. 9. Задача о растяжении полосы с центральной трещиной.

Т а б л и ц а 15

Результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжений для задачи о растяжении полосы с центральной трещиной

Сетка	Коэффициент интенсивности напряжений				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
12; 3	1,435	1,553	1,560	1,690	22,09	15,68	15,30	8,24
24; 6	1,534	1,646	1,650	1,771	16,71	10,63	10,42	3,85
36; 9	1,568	1,676	1,678	1,801	14,87	9,00	8,90	2,22
48; 12	1,582	1,691	1,693	1,815	14,11	8,19	8,08	1,46
60; 15	1,591	1,700	1,701	1,823	13,62	7,70	7,65	1,02
72; 18	1,598	1,706	1,707	1,828	13,24	7,38	7,38	0,75
84; 21	1,602	1,711	1,711	1,832	13,02	7,11	7,11	0,53
[14]	1,84186							

Т а б л и ц а 16

Результаты расчетов раскрытия трещины в центре для задачи о растяжении полосы с центральной трещиной

Сетка	Раскрытие трещины				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
12; 3	3,7640	3,8916	3,9928	4,0317	9,37	6,29	3,86	2,92
24; 6	3,9608	4,0132	4,0710	4,0801	4,63	3,36	1,97	1,75
36; 9	4,0268	4,0600	4,0994	4,1037	3,04	2,24	1,29	1,19
48; 12	4,0588	4,0840	4,1140	4,1162	2,27	1,66	0,94	0,89
60; 15	4,0786	4,0984	4,1226	4,1240	1,79	1,32	0,73	0,70
72; 18	4,0916	4,1082	4,1284	4,1293	1,48	1,08	0,59	0,57
84; 21	4,1010	4,1152	4,1326	4,1332	1,25	0,91	0,49	0,48
[15]	4,15297				≤ 0,6			

Растяжение полосы с краевой трещиной. Задача решалась для прямоугольной пластины шириной $W = 1$ и высотой $H = 2$ с симметрично расположенной трещиной длиной $a = 0,3$, выходящей на поверхность (рис. 10). Ввиду симметрии задачи рассматривалась половина пластины. Коэффициент Пуассона задавался равным 0,25. Расчет выполнялся при условии плоского напряженного состояния. Оценивалась точность определения коэффициента интенсивности напряжений K_1 и раскрытия трещины δ на поверхности. Значения K_1 и δ вычислялись по формулам, приведенным в [16] и [15] соответственно:

$$K_1 = q\sqrt{\pi a} \left[0,265(1 - \lambda)^4 + \frac{0,857 + 0,265\lambda}{(1 - \lambda)^{3/2}} \right]; \quad (60)$$

$$\delta \approx \frac{4qa}{E} \frac{1,46 + 3,42[1 - \cos(\pi\lambda/2)]}{\cos^2(\pi\lambda/2)},$$

Т а б л и ц а 17

Результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжений для задачи о растяжении полосы с краевой трещиной

Сетка	Коэффициент интенсивности напряжений				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
10; 3	1,271	1,391	1,431	1,536	21,26	13,82	11,34	4,84
20; 6	1,347	1,454	1,475	1,580	16,55	9,92	8,62	2,11
30; 9	1,373	1,475	1,489	1,595	14,94	8,62	7,75	1,18
40; 12	1,386	1,486	1,496	1,602	14,13	7,94	7,32	0,75
50; 15	1,394	1,492	1,500	1,606	13,64	7,56	7,07	0,50
[16]	1,6141				≤ 0,5			

Т а б л и ц а 18

Результаты расчетов раскрытия трещины в центре для задачи о растяжении полосы с краевой трещиной

Сетка	Раскрытие трещины				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
10; 3	2,400	2,517	2,623	2,638	13,37	9,14	5,32	4,78
20; 6	2,598	2,651	2,714	2,720	6,22	4,31	2,03	1,82
30; 9	2,668	2,703	2,747	2,751	3,69	2,43	0,84	0,70
40; 12	2,704	2,730	2,764	2,767	2,39	1,45	0,23	0,12
50; 15	2,727	2,746	2,774	2,777	1,56	0,88	-0,13	-0,24
[15]	2,7703							

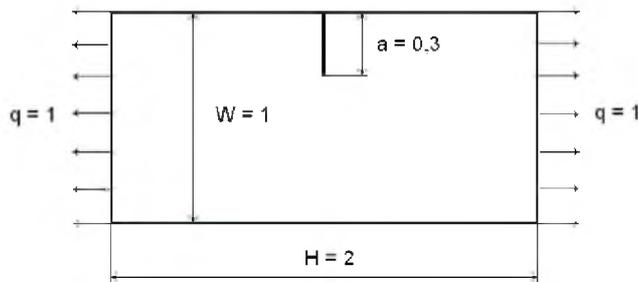


Рис. 10. Задача о растяжении полосы с краевой трещиной.

где $\lambda = a/W = 0,3$. Результаты расчетов представлены в табл. 17, 18. Там же приведены разбиения по ширине полосы W и вдоль длины трещины a . Из таблиц видно, что при всех разбиениях СМКЭ превосходит КМКЭ в определении коэффициента интенсивности напряжений и раскрытия трещины.

Трехточечный изгиб бруса с краевой трещиной. Рассматривалась задача об изгибе бруса длиной $L = 4$ и высотой $H = 1$ с симметрично расположенной вертикальной трещиной $a = 0,4$, выходящей на поверхность. Полагали, что брус опирается торцами на две вертикальные опоры, а в централь-

ном сечении действует поперечная сила $P = 1$ (рис. 11). Ввиду симметрии задачи рассматривалась половина бруса. Коэффициент Пуассона задавался равным 0,25. Расчет выполнялся при условии плоского напряженного состояния. Оценивалась точность определения коэффициента интенсивности напряжений K_1 и раскрытия трещины δ на поверхности на основании формул, приведенных в [17] и [15] соответственно:

$$K_1 = \frac{\sigma_0 \sqrt{a}}{(1 - \lambda)^{3/2} (1 + 3\lambda)} (1,9 + 0,41\lambda + 0,51\lambda^2 - 0,17\lambda^3),$$

$$\delta = \frac{4\sigma_0 a}{E} \left[0,76 - 2,28\lambda + 3,87\lambda^2 - 2,04\lambda^3 + \frac{0,66}{(1 - \lambda)^2} \right]. \quad (61)$$

где $\sigma_0 = 3LP/2H^2$ – номинальное напряжение при изгибе; $\lambda = a/H = 0,4$. Результаты расчетов представлены в табл. 19, 20. Там же приведены разбиения по высоте бруса H и вдоль длины трещины a . Из табл. 19 видно, что при сгущении сетки КМКЭ-1 не обеспечивает получение коэффициента интенсивности напряжений, в то время как СМКЭ дает близкие к аналитическим формулам результаты.

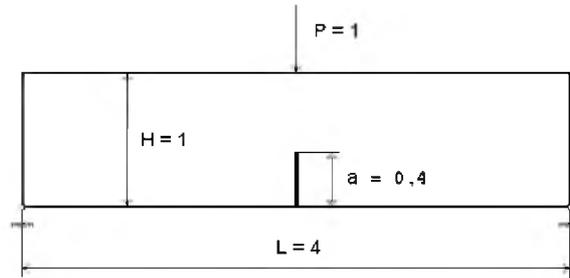


Рис. 11. Трехточечный изгиб бруса с краевой трещиной.

Чистый изгиб бруса с краевой трещиной. Геометрические размеры и сетка задавались, как и для задачи о трехточечном изгибе бруса. Коэффициент Пуассона принимался равным 0,25. Ввиду симметрии задачи рассматривалась половина бруса. К торцу прикладывалась осевая нагрузка, распределенная по линейному закону $q = 2x_2/H$, действие которой эквивалентно изгибающему моменту $M = H^2/6$ (рис. 12). Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений K_1 и раскрытия трещины δ на поверхности использовались формулы, приведенные в работах [17] и [15] соответственно:

$$K_1 = \frac{\sigma_0 \sqrt{a}}{(1 - \lambda)^{3/2} (1 + 3\lambda)} (1,99 + 0,83\lambda - 0,31\lambda^2 + 0,14\lambda^3),$$

$$\delta \approx \frac{4\sigma_0 a}{E} \left[0,8 - 1,7\lambda + 2,4\lambda^2 + \frac{0,66}{(1 - \lambda)^2} \right], \quad (62)$$

где $\sigma_0 = 6M/H^2 = 1$ – номинальное напряжение при чистом изгибе бруса; $\lambda = a/H = 0,4$. Результаты расчетов представлены в табл. 21, 22. Там же приведены разбиения по высоте бруса H и вдоль длины трещины a . Из табл. 21 видно, что КМКЭ-1 не обеспечивает получение коэффициента интенсивности напряжений при сгущении сетки, в то время как с помощью СМКЭ получены близкие к аналитическим формулам результаты.

Т а б л и ц а 19

Результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжений для задачи о трехточечном изгибе бруса с краевой трещиной

Сетка	Коэффициент интенсивности напряжений				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
10; 4	6,888	7,520	7,768	8,275	13,06	5,08	1,95	-4,45
20; 8	6,950	7,485	7,612	8,110	12,28	5,52	3,92	-2,36
30; 12	6,960	7,469	7,553	8,052	12,15	5,73	4,67	-1,63
40; 16	6,963	7,459	7,522	8,026	12,11	5,85	5,06	-1,30
60; 24	6,965	7,450	7,489	7,994	12,09	5,97	5,47	-0,90
80; 32	6,967	7,444	7,473	7,982	12,06	6,04	5,68	-0,75
[17]	7,9227							

Т а б л и ц а 20

Результаты расчетов раскрытия трещины на поверхности для задачи о трехточечном изгибе бруса с краевой трещиной

Сетка	Раскрытие трещины				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
10; 4	18,292	19,037	19,802	19,940	12,19	8,62	4,94	4,28
20; 8	19,610	19,974	20,388	20,425	5,86	4,12	2,13	1,95
30; 12	20,066	20,306	20,590	20,606	3,68	2,52	1,16	1,08
40; 16	20,298	20,476	20,692	20,701	2,56	1,71	0,67	0,63
60; 24	20,532	20,650	20,796	20,799	1,44	0,87	0,17	0,16
80; 32	20,648	20,736	20,848	20,849	0,88	0,46	-0,08	-0,08
[15]	20,832				$\leq 1,0$			

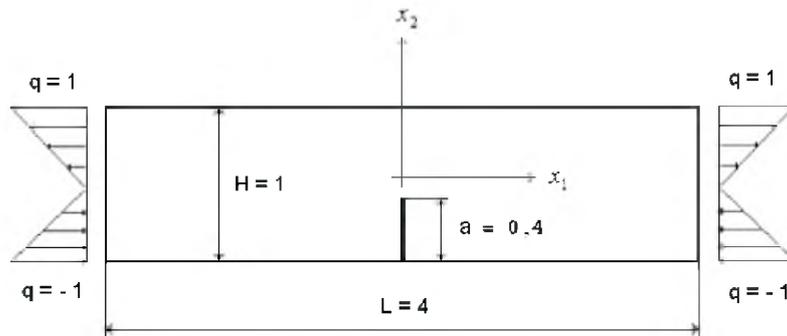


Рис. 12. Чистый изгиб бруса с краевой трещиной.

Т а б л и ц а 21

**Результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжений
для задачи о чистом изгибе бруса с краевой трещиной**

Сетка	Коэффициент интенсивности напряжений				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
10; 4	1,2399	1,3535	1,3980	1,4874	12,14	4,09	0,94	-5,40
20; 8	1,2488	1,3450	1,3677	1,4565	11,51	4,69	3,08	-3,21
30; 12	1,2500	1,3411	1,3560	1,4453	11,42	4,97	3,91	-2,42
40; 16	1,2500	1,3389	1,3499	1,4399	11,42	5,12	4,34	-2,03
60; 24	1,2499	1,3365	1,3437	1,4344	11,43	5,29	4,78	-1,64
80; 32	1,2499	1,3352	1,3404	1,4315	11,43	5,39	5,02	-1,44
[17]	1,4112							

Т а б л и ц а 22

**Результаты расчетов раскрытия трещины на поверхности
для задачи о чистом изгибе бруса с краевой трещиной**

Сетка	Раскрытие трещины				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
10; 4	3,2792	3,4138	3,5500	3,5711	12,31	8,71	5,07	4,51
20; 8	3,5154	3,5808	3,6548	3,6604	6,00	4,25	2,27	2,12
30; 12	3,5972	3,6402	3,6910	3,6934	3,81	2,66	1,30	1,24
40; 16	3,6386	3,6706	3,7094	3,7106	2,70	1,85	0,81	0,78
60; 24	3,6804	3,7016	3,7278	3,7283	1,58	1,02	0,32	0,30
80; 32	3,7014	3,7174	3,7370	3,7373	1,02	0,60	0,07	0,06
[15]	3,7397				≤ 0,5			

Круговое кольцо с наружной краевой радиальной трещиной под действием давления на внутренней круговой границе. Рассматривалось кольцо с отношением радиусов $R_1/R_2 = 1/2$, длиной трещины $a = 0,5$ и внутренним давлением $q = 1$ (рис. 13). Ввиду симметрии задачи расчет выполнялся для половины кольца при условии плоского напряженного состояния. Коэффициент Пуассона задавался равным 0,3. Результаты расчетов представлены в табл. 23. Там же приведены разбиения по углу четверти кольца и вдоль длины трещины. Из таблицы видно, что СМКЭ превосходит КМКЭ в точности определения коэффициента интенсивности напряжений.

Свободные колебания бруса с заземленным торцом. Определялись первые четыре собственные частоты поперечных колебаний бруса прямоугольного поперечного сечения с отношением высоты к длине $H/L = 2/20$. Коэффициент Пуассона задавался равным нулю. Численные результаты сопоставлялись с аналитическим решением, приведенном в [19] для однородного стержня:

$$p_k = \frac{\omega_k}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad k = 1, \dots, \quad (63)$$

Т а б л и ц а 23

Результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжений для задачи о наружной краевой радиальной трещине в круговом кольце, находящемся под действием внутреннего давления

Сетка	Коэффициент интенсивности напряжений				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
14; 3	1,362	1,506	1,562	1,659	22,17	13,94	10,74	5,20
28; 6	1,459	1,577	1,608	1,708	16,63	9,89	8,11	2,40
42; 9	1,492	1,602	1,623	1,726	14,74	8,46	7,26	1,37
56; 12	1,508	1,615	1,638	1,735	13,83	7,71	6,40	0,86
70; 15	1,518	1,623	1,639	1,740	13,26	7,26	6,34	0,57
84; 18	1,524	1,628	1,640	1,744	12,91	6,97	6,29	0,34
99; 21	1,530	1,632	1,641	1,748	12,57	6,74	6,23	0,11
113; 24	1,533	1,635	1,644	1,750	12,40	6,57	6,06	0
[18]	1,75							

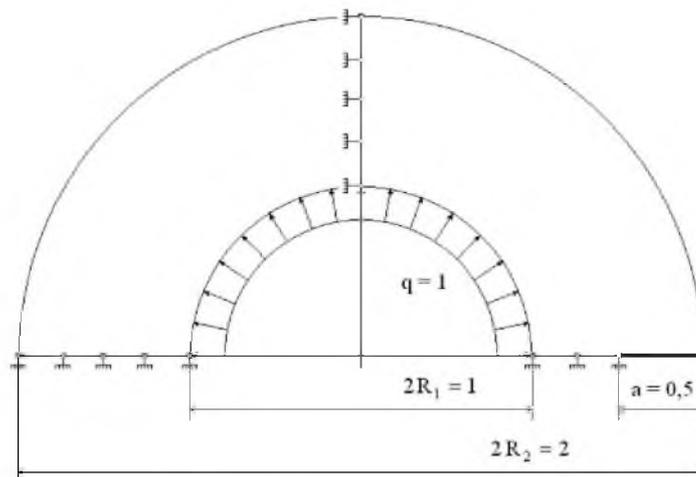


Рис 13. Круглое кольцо с наружной краевой трещиной под действием давления на внутренней круговой границе.

где ρ – плотность единицы длины и $I = H^3/12 = 2/3$ – момент инерции поперечного сечения бруса. Результаты расчетов представлены в табл. 24. Там же приведены разбиения по длине L и высоте H бруса. В предпоследней строке таблицы даны численные решения, полученные с помощью КМКЭ-3 для разбиения 160×16 . Сравнение погрешностей определения собственных частот на основе КМКЭ-1 и СМКЭ приведено в табл. 25. Видно, что СМКЭ дает более точные значения частот по сравнению с КМКЭ-1.

Заключение. Приведенные выше тестовые примеры, а также опыт решения практических задач свидетельствуют об улучшенных аппроксимациях полей перемещений, деформаций и напряжений, полученных на основе смешанного метода. Существенное улучшение приближенного реше-

Т а б л и ц а 24

Результаты расчетов собственных частот колебаний бруса с жестко закрепленным торцом

Сетка	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
10×1	4,932	3,843	29,82	23,38	79,83	62,93	148,56	117,53
20×2	3,906	3,519	23,67	21,35	63,24	57,09	116,94	105,54
30×3	3,683	3,494	22,28	21,14	59,38	56,29	109,40	103,53
40×4	3,601	3,491	21,77	21,10	57,95	56,11	106,55	103,02
80×8	3,520	3,492	21,27	21,09	56,51	56,01	103,68	102,71
160×16	3,500	3,493	21,14	21,09	56,14	56,01	102,94	102,69
КМКЭ-3	3,493		21,09		56,02		102,69	
[19]	3,5156		22,034		61,701		120,912	

Т а б л и ц а 25

Погрешность (%) определения собственных частот колебаний бруса с жестко закрепленным торцом

Сетка	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
10×1	41,20	10,02	41,39	10,38	42,50	12,33	44,67	14,45
20×2	11,82	0,72	12,23	1,23	12,89	1,91	13,88	2,78
30×3	5,44	0,03	5,64	0,23	6,00	0,48	6,53	0,82
40×4	3,09	-0,06	3,22	0,05	3,45	0,16	3,76	0,32
80×8	0,77	-0,03	0,85	0	0,87	-0,02	0,96	0,02
160×16	0,20	0	0,24	0	0,21	-0,02	0,24	0

ния обычно наблюдается в задачах об изгибе, местах концентрации напряжений, а также при определении перемещений. Применение смешанной схемы к решению задач линейной механики разрушения позволяет получить более точные значения коэффициента интенсивности напряжений (58) по сравнению с обычным методом перемещений. Для задач, имеющих незначительный градиент напряжений, результаты расчетов на основе смешанного и классического подходов МКЭ близки к точным решениям. На редких сетках смешанный метод дает более точные результаты. Таким образом, анализ численных решений позволяет говорить о преимуществе смешанного метода по сравнению с классическим МКЭ.

Резюме

Для розв'язку двовимірних крайових задач теорії пружності використано змішану схему методу скінченних елементів. Описано трикутний скінченний елемент, котрий забезпечує стійкість і збіжність змішаної апроксимації. Побудовано систему розв'язувальних рівнянь змішаного методу з урахуванням точного задоволення статичних граничних умов на поверхні. Для

розв'язання матричних рівнянь змішаного методу наведено різні варіанти алгоритму методу спряжених градієнтів із презумовленою матрицею. Представлено результати числового аналізу збіжності і точності розв'язання ряду модельних задач теорії пружності та лінійної механіки руйнування. Порівнюються результати, що отримані на основі класичного і змішаного методів скінченних елементів.

1. Чирков А. Ю. Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения задач теории упругости // Пробл. прочности. – 2003. – № 3. – С. 70 – 99.
2. Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L. The Finite Element Method. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi: Butterworth-Heinemann (5th edition), 2000. – 1482 p.
3. Уманский С. Э. Общая теория и практическое применение смягченно-смешанных схем метода конечных элементов // Пробл. прочности. – 1984. – № 12. – С. 83 – 89.
4. Hestens M. and Stiefel E. Methods of conjugate gradients for solving linear system // Nat. Bur. Std. J. Res. – 1952. – 49. – P. 409 – 436.
5. Reid J. K. On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations // Large Sparse Sets Linear Equations. – London; New York: Academic Press, 1971. – P. 231 – 252.
6. Young D. M. On the accelerated SSOR method for solving large linear systems // Adv. Math. – 1977. – 23. – P. 215 – 271.
7. Chang A. Application of Sparse Matrix Methods in Electric Power System Analysis. – Willoughby, 1969. – P. 113 – 122.
8. Jennings A. A compact storage scheme for the solution of symmetric linear simultaneous equations // Comput. J. – 1966. – 9. – P. 281 – 285.
9. Cuthill E. and McKee J. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices // Proc. 24th Nat. Conf. Assoc. Comput. Math. – ACM Publ., 1969. – P. 157 – 172.
10. Felippa C. A. Solution of linear equations with skyline-stored symmetric matrix // Comp. and Struct. – 1975. – 5, No. 1. – P. 13 – 29.
11. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
12. Писаренко Г. С., Азарев В. А., Квитка А. Л., Попков В. Г., Уманский Э. С. Сопротивление материалов. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.
13. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
14. Isida M. Analysis of stress intensity factors for the tension of a centrally cracked strip with stiffened edges // Eng. Fract. Mech. – 1973. – 5, No. 3. – P. 647 – 665.
15. Троценко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др. Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1993. – Ч. 1. – 285 с.

16. *Tada H., Paris P. C., and Irwin G. R.* The Stress Analysis of Cracks: Handbook. – Hellertown: Del Research Corporation, 1973. – 385 p.
17. *Guinea G. V., Pastor J. Y., Planas J., and Elices M.* Stress intensity factor, compliance and CMOD for general three-point-bend beam // *Int. J. Fract.* – 1998. – **89**. – P. 103. – 116.
18. *Delale F. and Erdogan F.* Stress intensity factors in a hollow cylinder containing a radial crack // *Int. J. Fract. Mech.* – 1982. – **20**, No. 4. – P. 251 – 265.
19. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 559 с.

Поступила 05. 07. 2002