

К численному решению задач о деформации анизотропных пластин с отверстием

Н. Д. Панкратова, В. Б. Польчук

Институт прикладного системного анализа НАН и Минобразования Украины, Киев, Украина

Представлен подход к расчету напряженно-деформированного состояния пластин с отверстием, основанный на численной параметризации двусвязной области, сведении исходной нелинейной краевой задачи к последовательности линейных двумерных и интегрировании последних устойчивым численным методом. Исследуется влияние формы и месторасположения отверстия на напряженно-деформированное состояние квадратной пластины.

Ключевые слова: двусвязная область, геометрически нелинейная постановка, численное интегрирование, концентрация напряжений.

Многие конструктивные элементы современной техники, в частности ослабленные отверстиями, изготавливают в виде анизотропных оболочек и пластин сложной формы. В таких случаях на границах и вблизи отверстий имеет место концентрация напряжений, которую необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации изделия.

Задачи о деформации пластин, срединная поверхность которых является двусвязной областью, связаны с интегрированием внутри геометрически сложных областей системы дифференциальных уравнений в частных производных при определенных видах граничных условий на контурах. При этом представление разрешающей системы дифференциальных уравнений и сложность решения соответствующей краевой задачи существенно зависят от системы координат, которая вводится для параметризации указанной области. Рассматриваемой проблеме посвящены исследования [1–5] и др.

Наиболее простой вид имеют уравнения, когда многосвязная область отнесена к такой ортогональной криволинейной системе координат, где обе ограничивающие область контурные линии совпадают с координатными линиями системы [6].

В настоящей работе на основании предложенного в [1] приема построения ортогональной криволинейной системы координат для двусвязной области сложной формы, ограниченной гладкими контурными линиями без угловых точек, решается задача численной параметризации двусвязной области путем построения в ней ортогональной криволинейной сетки, топологически эквивалентной прямоугольнику. Задача о деформации тонких анизотропных пластин, ослабленных отверстием, реализуется в нелинейной геометрической постановке.

Математическая постановка задачи численной параметризации двусвязной области. Рассмотрим тонкую анизотропную пластину, координатная плоскость (x, y) которой представляет собой двусвязную область D , ограниченную гладкими контурными линиями без угловых точек (рис. 1):

$$\phi_0(x, y) = 0; \quad \phi_N(x, y) = 0. \quad (1)$$

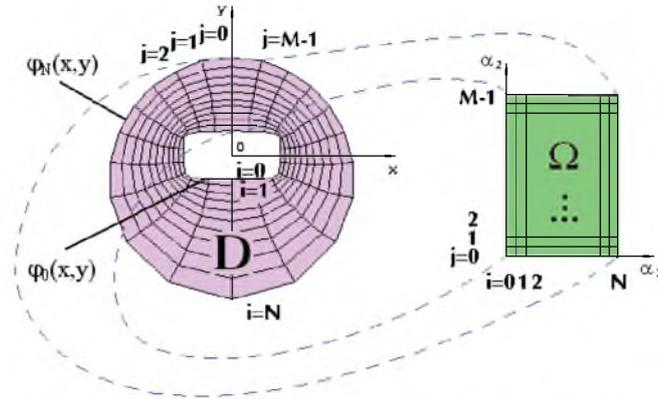


Рис. 1. Численная параметризация двусвязной области.

Реализуется численное построение ортогональной криволинейной сетки применительно к задаче о деформации пластины, ослабленной отверстием, основанное на отыскании функций $x(\alpha_1, \alpha_2)$, $y(\alpha_1, \alpha_2)$, которые обеспечивают однолистное отображение на область пластины D параметрического прямоугольника $\Omega = \{(\alpha_1, \alpha_2) : 0 \leq \alpha_1 \leq L_1; 0 \leq \alpha_2 \leq L_2\}$. При этом на контурных линиях учитываются граничные условия (1), условия ортогональности координатной системы (α_1, α_2) в области D , включая границы

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (2)$$

и условия периодичности по координате α_2

$$x(\alpha_1, 0) = x(\alpha_1, L_2); \quad y(\alpha_1, 0) = y(\alpha_1, L_2). \quad (3)$$

Для нахождения функций $x(\alpha_1, \alpha_2)$, $y(\alpha_1, \alpha_2)$ на каждой границе области D используем систему из двух уравнений (1), (2). Два семейства линий сетки внутри области D строятся как линии уровня функций $\alpha_1(x, y)$, $\alpha_2(x, y)$, удовлетворяющих уравнениям Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Выполняя преобразования уравнений (4) с учетом (2), определение $x(\alpha_1, \alpha_2)$, $y(\alpha_1, \alpha_2)$ сводится к системе из двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_2^2} = 0, \quad \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_2^2} = 0, \quad (5)$$

где A_1^2, A_2^2 – параметры Ламе.

Предлагается численное построение ортогональной криволинейной сетки проводить итерационным методом до определенной заданной практической точности. Для реализации указанного процесса представим уравнения (1) и (3) для внутреннего контура в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x_{0j}^0, y_{0j}^0) \underline{x_{0j}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x_{0j}^0, y_{0j}^0) \underline{y_{0j}} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x_{0j}^0, y_{0j}^0) x_{0j}^0 - \\ & - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x_{0j}^0, y_{0j}^0) y_{0j}^0 + \varphi_0(x_{0j}^0, y_{0j}^0) = 0, \quad j = \overline{0, M-1}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & (\underline{x_{1j}} - \underline{x_{0j}})(x_{0j+1}^0 - x_{0j-1}^0) + (\underline{y_{1j}} - \underline{y_{0j}})(y_{0j+1}^0 - y_{0j-1}^0) + \\ & + (x_{1j}^0 - x_{0j}^0)[(\underline{x_{0j+1}} - \underline{x_{0j-1}}) - (x_{0j+1}^0 - x_{0j-1}^0)] + \\ & + (y_{1j}^0 - y_{0j}^0)[(\underline{y_{0j+1}} - \underline{y_{0j-1}}) - (y_{0j+1}^0 - y_{0j-1}^0)] = 0, \quad j = \overline{0, M-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и далее черта снизу обозначает неизвестные величины.

В уравнении (7) заменим неизвестные $\underline{x_{1j}}$, $\underline{y_{1j}}$, $\underline{x_{0j+1}}$, $\underline{x_{0j-1}}$, $\underline{y_{0j+1}}$, $\underline{y_{0j-1}}$ их значениями на предыдущей итерации, тогда третье и четвертое слагаемые обратятся в нуль, и уравнение преобразуется следующим образом:

$$(x_{1j}^0 - x_{0j}^0)(x_{0j+1}^0 - x_{0j-1}^0) + (y_{1j}^0 - y_{0j}^0)(y_{0j+1}^0 - y_{0j-1}^0) = 0, \quad j = \overline{0, M-1}. \quad (8)$$

Уравнения (6) и (8) составляют систему из $2M$ уравнений и $2M$ неизвестных x_{0j} , y_{0j} , $j = \overline{0, M-1}$. Для каждого j соответствующая система из двух уравнений может быть явно разрешена относительно x_{0j} , y_{0j} :

$$\begin{aligned} & \underline{x_{0j}} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x_{0j}^0, y_{0j}^0)(y_{0j+1}^0 - y_{0j-1}^0) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x_{0j}^0, y_{0j}^0)(x_{0j+1}^0 - x_{0j-1}^0) \right] = \\ & = (y_{0j+1}^0 - y_{0j-1}^0) \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x_{0j}^0, y_{0j}^0) x_{0j}^0 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x_{0j}^0, y_{0j}^0) y_{0j}^0 - \varphi_0(x_{0j}^0, y_{0j}^0) \right] + \\ & + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x_{0j}^0, y_{0j}^0) [y_{1j}^0 (y_{0j-1}^0 - y_{0j+1}^0) + x_{1j}^0 (x_{0j-1}^0 - x_{0j+1}^0)]; \quad (9) \\ & \underline{y_{0j}} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x_{0j}^0, y_{0j}^0)(x_{0j+1}^0 - x_{0j-1}^0) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x_{0j}^0, y_{0j}^0)(y_{0j+1}^0 - y_{0j-1}^0) \right] = \\ & = (x_{0j+1}^0 - x_{0j-1}^0) \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x_{0j}^0, y_{0j}^0) y_{0j}^0 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x_{0j}^0, y_{0j}^0) x_{0j}^0 - \varphi_0(x_{0j}^0, y_{0j}^0) \right] + \\ & + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x_{0j}^0, y_{0j}^0) [x_{1j}^0 (x_{0j-1}^0 - x_{0j+1}^0) + y_{1j}^0 (y_{0j-1}^0 - y_{0j+1}^0)]. \end{aligned}$$

Аналогично, записав уравнения (1) и (2) для внешнего контура, получим выражения для $x_{Nj}, y_{Nj}, j = 0, M - 1$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{x_{Nj}}{x_{Nj}} \left[\frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0)(y_{Nj+1}^0 - y_{Nj-1}^0) - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \varphi_N}{\partial y}(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0)(x_{Nj+1}^0 - x_{Nj-1}^0) \right] = \\
 & = (y_{Nj+1}^0 - y_{Nj-1}^0) \left[\frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0)x_{Nj}^0 + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \varphi_N}{\partial y}(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0)y_{Nj}^0 - \varphi_N(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0) \right] + \\
 & + \frac{\partial \varphi_N}{\partial y}(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0)[y_{N-1j}^0(y_{Nj-1}^0 - y_{Nj+1}^0) + x_{N-1j}^0(x_{Nj-1}^0 - x_{Nj+1}^0)]; \\
 & \frac{y_{Nj}}{y_{Nj}} \left[\frac{\partial \varphi_N}{\partial y}(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0)(x_{Nj+1}^0 - x_{Nj-1}^0) - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0)(y_{Nj+1}^0 - y_{Nj-1}^0) \right] = \\
 & = (x_{Nj+1}^0 - x_{Nj-1}^0) \left[\frac{\partial \varphi_N}{\partial y}(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0)y_{Nj}^0 + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0)x_{Nj}^0 - \varphi_N(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0) \right] + \\
 & + \frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(x_{Nj}^0, y_{Nj}^0)[x_{N-1j}^0(x_{Nj-1}^0 - x_{Nj+1}^0) + y_{N-1j}^0(y_{Nj-1}^0 - y_{Nj+1}^0)].
 \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом получают выражения для всех граничных точек.

Рассмотрим процесс определения выражений для внутренних точек. Уравнения (5), записанные через конечные разности, имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(A_1)^2} x_{i-1j} - \frac{2}{(A_1)^2} x_{ij} + \frac{1}{(A_1)^2} x_{i+1j} + \frac{1}{(A_2)^2} x_{ij-1} - \\
 & - \frac{2}{(A_2)^2} x_{ij} + \frac{1}{(A_2)^2} x_{ij+1} = 0; \\
 & \frac{1}{(A_1)^2} y_{i-1j} - \frac{2}{(A_1)^2} y_{ij} + \frac{1}{(A_1)^2} y_{i+1j} + \frac{1}{(A_2)^2} y_{ij-1} - \\
 & - \frac{2}{(A_2)^2} y_{ij} + \frac{1}{(A_2)^2} y_{ij+1} = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Замена переменных $x_{ij-1}, x_{ij+1}, y_{ij-1}, y_{ij+1}$ их значениями на предыдущей итерации позволяет уравнения (11) представить так:

$$\frac{1}{(A_1)^2} x_{i-1j} - \frac{2A_1 + 2A_2}{(A_1 A_2)^2} x_{ij} + \frac{1}{(A_1)^2} x_{i+1j} = -\frac{1}{(A_2)^2} x_{ij-1}^0 - \frac{1}{(A_2)^2} x_{ij+1}^0;$$

$$\frac{1}{(A_1)^2} y_{i-1j} - \frac{2A_1 + 2A_2}{(A_1 A_2)^2} y_{ij} + \frac{1}{(A_1)^2} y_{i+1j} = -\frac{1}{(A_2)^2} y_{ij-1}^0 - \frac{1}{(A_2)^2} y_{ij+1}^0, \quad (12)$$

$i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}.$

Записывая для x уравнения (9), (10), (12) в следующем порядке: для j ($j = \overline{0, M-1}$) – уравнение (9), для i ($i = \overline{1, N-1}$) – уравнения (12), для j ($j = \overline{0, M-1}$) – уравнение (10), получаем систему уравнений в блочном виде

$$\begin{bmatrix} S_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & S_{M-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_j \\ X_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_j \\ B_{M-1} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Здесь S_j, B_j, X_j имеют вид

$$S_j^{((N+1) \times (N+1))} = \begin{bmatrix} \alpha_j & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_{1j}^1 & \beta_{1j}^2 & \beta_{1j}^3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{2j}^1 & \beta_{2j}^2 & \beta_{2j}^3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{3j}^1 & \beta_{3j}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{N-1j}^2 & \beta_{N-1j}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_j \end{bmatrix};$$

$$B_j^{(N+1)} = \begin{pmatrix} a_j \\ b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \dots \\ b_{N-1j} \\ c_j \end{pmatrix}; \quad X_j = \begin{pmatrix} x_{0j} \\ x_{1j} \\ \dots \\ x_{Nj} \end{pmatrix},$$

где α_j – коэффициенты при x_{0j} из уравнений (9); a_j – правые части уравнений (9); $\beta_{ij}^1, \beta_{ij}^2, \beta_{ij}^3$ – коэффициенты при $x_{i-1j}, x_{ij}, x_{i+1j}$ соответственно из (12); b_{1j} – правые части (12) ($i = \overline{1, N-1}$); γ_j – коэффициенты при x_N из уравнений (10); c_j – правые части уравнений (10).

Таким образом получено $M + 1$ трехдиагональных систем для X размерности $N + 1$, аналогично можно получить $M + 1$ трехдиагональных систем для Y размерности $N + 1$. Учитывая периодичность по j , количество систем сужается до M для X и до M для Y размерности $N + 1$.

За начальные значения координат сетки принимаются координаты сетки, образованной концентрическими окружностями и радиальными линиями, а при ограничивающих контурах сложной формы начальную сетку можно получить путем масштабирования специально подобранного контура, заключенного между ограничивающими контурами, и узлов сетки на этом контуре.

Математическая постановка задачи расчета напряженно-деформированного состояния пластины, ослабленной отверстием. Задачу о деформации анизотропных пластин, в общем случае имеющих одну плоскость упругой симметрии, рассматриваем в геометрически нелинейной постановке с учетом квадратичных приближений [7]. Полная система уравнений, описывающая в произвольной ортогональной системе координат двухмерную геометрически нелинейную деформацию анизотропных слоистых пластин, сведена к разрешающей системе, состоящей из восьми дифференциальных уравнений в частных производных [1]:

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \alpha_1} = \bar{G} \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \bar{Z}}{\partial \alpha_2^k} \right) \quad (k = \overline{1, 4}). \quad (14)$$

Здесь $\bar{Z} = \{N_1, \tilde{S}_1, \tilde{Q}_1, M_1, u, v, w, \theta_1\}^T$ – вектор разрешающих функций; $\bar{G} = \{g_i\}^T$ ($i = \overline{1, 8}$) – вектор правой части системы уравнений, являющийся нелинейной вектор-функцией от \bar{Z} и имеющий следующий вид:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{a_{21}}{A_2}(N_2 - N_1) - \frac{a_{12}}{A_2}(\tilde{S}_1 + T) - A_1 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} + q_1 \right); \\ g_2 &= \frac{a_{12}}{A_2}(N_1 - N_2) - \frac{a_{21}}{A_2}(\tilde{S}_1 + T) - A_1 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} + q_2 \right); \\ g_3 &= -\frac{a_{21}}{A_2} \tilde{Q}_1 - \frac{a_{12}}{A_2} \tilde{Q}_2 - A_1 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{Q}_2}{\partial \alpha_2} + q_3 \right); \\ g_4 &= \frac{a_{21}}{A_2}(M_2 - M_1) - \frac{2}{A_2} \left(a_{12}H + A_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} \right) + A_1 [\tilde{Q}_1 + N_1 \theta_1 + \tilde{S}_1 \theta_2]; \\ g_5 &= A_1 \varepsilon_1 - \frac{a_{12}}{A_2} v - \frac{A_1}{2} (\theta_1)^2; \quad g_6 = A_1 \omega_1 + \frac{a_{12}}{A_2} u; \end{aligned}$$

$$g_7 = -A_1\theta_1; \quad g_8 = A_1\kappa_1 - \frac{a_{12}}{A_2}\theta_2,$$

где

$$a_{12} = \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \quad a_{21} = \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}; \quad T = \tilde{S}_1 - N_1\omega_1 + N_2\omega_2;$$

$$\tilde{Q}_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{a_{12}}{A_1 A_2} (M_2 - M_1) + \frac{2a_{21}}{A_1 A_2} H - N_2 Q_2 - \tilde{S}_1 \theta_1;$$

$$N_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\Omega + K_{11}\kappa_1 + K_{12}\kappa_2 + 2K_{16}\tau_2 - N_{1t};$$

$$N_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{26}\Omega + K_{12}\kappa_1 + K_{22}\kappa_2 + 2K_{26}\tau_2 - N_{2t};$$

$$M_1 = K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + K_{16}\Omega + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + 2D_{16}\tau_2 - M_{1t};$$

$$M_2 = K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2 + K_{26}\Omega + D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2 + 2D_{26}\tau_2 - M_{2t};$$

$$\tilde{S}_1 = C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + C_{66}\Omega + K_{16}\kappa_1 + K_{26}\kappa_2 + 2K_{66}\tau_2 - S_t;$$

$$H = K_{16}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2 + K_{66}\Omega + D_{16}\kappa_1 + D_{26}\kappa_2 + 2D_{66}\tau_2 - H_t;$$

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{a_{21}}{A_1 A_2} u + \frac{1}{2} (\theta_2)^2;$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{a_{21}}{A_1 A_2} \theta_1; \quad \omega_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{a_{12}}{A_1 A_2} v;$$

$$\tau_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} - \frac{a_{21}}{A_1 A_2} \theta_2; \quad \theta_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}; \quad (15)$$

$N_1, \tilde{S}_1, \tilde{Q}_1, M_1$ – соответственно нормальное, приведенные сдвигающее и перерезывающее усилия и изгибающий момент; u, v, w – компоненты перемещения; θ_1 – угол поворота нормали; q_j ($j=1, 3$) – компоненты внешней поверхностной нагрузки; C_{mp}, K_{mp}, D_{mp} ($m, p=1, 2, 6$) – жесткостные характеристики; интегральные характеристики температурного поля N_{it}, M_{it}, S_t, H_t ($i=1, 2$) выражаются через физико-механические характеристики, толщину и температурное поле пластины.

Решение нелинейной краевой задачи, описываемой системой дифференциальных уравнений в частных производных (14) с соответствующими граничными условиями, сводится с помощью метода Ньютона–Канторовича к последовательности решений линейных краевых задач для линеаризованной системы дифференциальных уравнений в частных производных с переменными в двух направлениях коэффициентами [1]:

$$\frac{\partial \bar{Z}^{(s+1)}}{\partial \alpha_1} = \bar{F} \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \bar{Z}^{(s)}}{\partial \alpha_2^k}, \frac{\partial^k \bar{Z}^{(s+1)}}{\partial \alpha_2^k} \right) \quad (k = \overline{1, 4}; s = 0, 1, \dots), \quad (16)$$

где $\bar{F} = \{f_i\}^T$ ($i = \overline{1, 8}$);

$$\bar{F} = \bar{G} \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \bar{Z}^{(s)}}{\partial \alpha_2^k} \right) + J \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \bar{Z}^{(s)}}{\partial \alpha_2^k} \right) (\bar{Z}^{(s+1)} - \bar{Z}^{(s)});$$

$J \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \bar{Z}^{(s)}}{\partial \alpha_2^k} \right)$ – матрица Якоби правой части системы (16).

Для понижения размерности и перехода от полученной двумерной краевой задачи к одномерной искомые функции и правые части системы дифференциальных уравнений в частных производных (16) представляются в виде отрезков тригонометрических рядов:

$$X(\alpha_1, \alpha_2) = X_0(\alpha_1) + \sum_{n=1}^{NH} (X'_n(\alpha_1) \cos n\alpha_2 + X''_n(\alpha_1) \sin n\alpha_2). \quad (17)$$

Представление разрешающих функций в виде рядов Фурье позволяет разделить переменные в исходной системе (16), и двумерная система уравнений приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных значений разрешающих функций.

Таким образом, решение задачи сводится с помощью метода линеаризации Ньютона–Канторовича к итерационному процессу, на каждом шаге которого решается краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. При этом первая итерация является решением задачи в линейной постановке.

Данная краевая задача приводится к семейству задач Коши, которые решаются устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [8]. Для вычисления коэффициентов Фурье (17) таблично заданных разрешающих функций используется интерполяция их кубическими сплайнами.

Обоснование достоверности подхода. В качестве тестового примера рассматривалась задача о напряженно-деформированном состоянии круглой изотропной пластины, ослабленной центральным круговым отверстием. Пластина, жестко заделанная по внешнему контуру, находится под действием равномерной нагрузки $q = q_0$. Расчеты в линейной постановке выполнялись для пластины толщины $h = h_0$, диаметра $a = 30h_0$, диаметра отверстия $b = 10h_0$, модуля упругости $E = E_0$ и коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$. Максимальный прогиб пластины в линейной постановке $w^0 = 6,583 \frac{q_0 h_0}{E_0} \times 10^3$, что согласуется до третьего значащего разряда с аналитическим расчетом [9].

Для сопоставления результатов расчетов в линейной и геометрически нелинейной постановках, осуществляемых по предлагаемому и известному численно-аналитическому подходу [10], решалась задача о напряженно-деформированном состоянии кольцевой пластины, находящейся под действием нормальной поверхностной нагрузки $q = q_0(1 + 0,1\cos\alpha_2)$ ($0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$). Расчеты выполнялись для пластины толщины $h = h_0$, диаметра $a = r_0$, диаметра отверстия $b = 0,5r_0$. Полученные результаты для максимальных значений прогибов в линейной $w^0 = 3,079h_0$ и в геометрически нелинейной $w = 1,966h_0$ постановках согласуются с расчетами, приведенными в [2].

Напряженно-деформированное состояние квадратной пластины с отверстием. На основании предложенного подхода рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии тонкой изотропной квадратной пластины со сглаженными углами, ослабленной отверстием, которая жестко закреплена по внешним сторонам, свободна по внутренней контуру отверстия и находится под действием равномерной внешней нагрузки $q = q_0$.

Срединная поверхность пластины отнесена к декартовой системе координат xOy так, чтобы ее стороны были параллельны координатным осям, а начало координат лежало в середине отверстия.

Расчеты выполнялись при следующих параметрах: толщина пластины $h = h_0$, стороны пластины $a = 28h_0$, модуль упругости $E = E_0$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

При решении задачи исследовалось влияние изменения формы и месторасположения отверстия на пластине на ее напряженно-деформированное состояние. Рассматривались два случая отверстия: круглое диаметра $d = 8h_0$ (случай I) и квадратное со сторонами $b = 6h_0$ (случай II). При этом учитывались следующие варианты смещения отверстия относительно центра пластины: а) $\Delta x = 0$; $\Delta y = 0$; б) $\Delta x = 0$; $\Delta y = 3h_0$; в) $\Delta x = 0$; $\Delta y = 6h_0$; г) $\Delta x = 6h_0$; $\Delta y = 6h_0$.

Построение численной параметризации (α_i, α_j) , где $i = \overline{1, 30}$; $j = \overline{1, 200}$, срединной поверхности пластины проводилось до достижения при итерационном процессе точности $\varepsilon = 10^{-3}$. Визуализация численной параметризации пластин для случаев круглого и квадратного отверстий приведена на рис. 2 и 3 соответственно.

При численном интегрировании краевой задачи в разложениях (17) удерживалось 11 членов ряда. Решение двумерных краевых задач (14) на основании итерационного процесса (16) проводилось до достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$. При рассмотрении центрального расположения отверстия удерживалось в (16) до 6 итераций, для остальных случаев расположения отверстия – до 8–10 итераций. На рис. 4–9 представлены результаты численных расчетов полей перемещений и напряжений. Распределения нормальных перемещений вдоль контуров круглого и прямоугольного отверстий приведены на рис. 4, 5, где штриховые линии – результаты решения задачи в линейной постановке, сплошные – в нелинейной. Как видно, различие результатов решения задачи превышает 50%. Наблюдается некоторая закономерность в распределении нормальных перемещений: наибольшая податли-

вость контура отверстия имеет место в точках, наиболее отдаленных от края пластины, и наоборот, наименьшая – в точках, максимально приближенных к краю пластины. В окрестности скругленных углов квадратного отверстия отмечается меньшая податливость, чем на других участках отверстия.

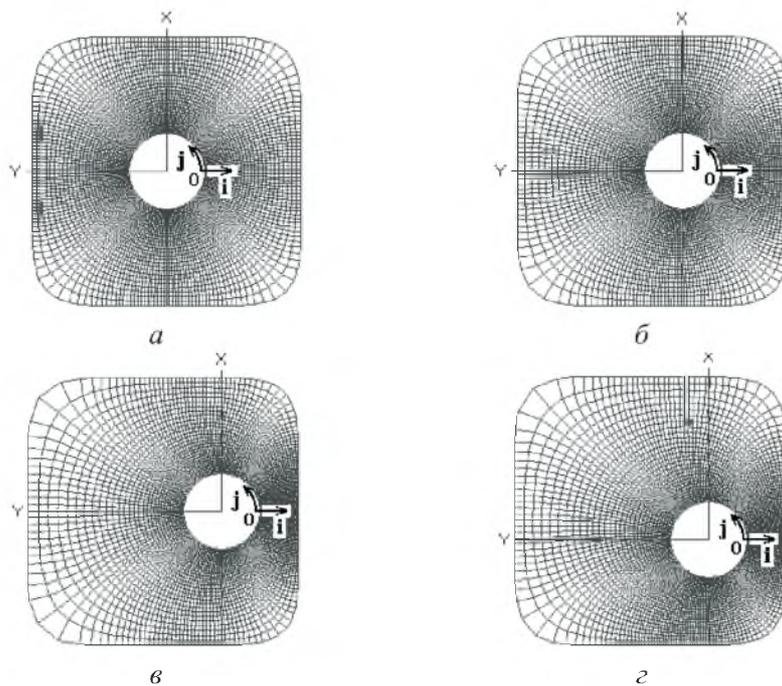


Рис. 2. Визуализация численной параметризации пластины с круглым отверстием. (Здесь и на рис. 3–9 *a–г* соответствуют вариантам смещения отверстия.)

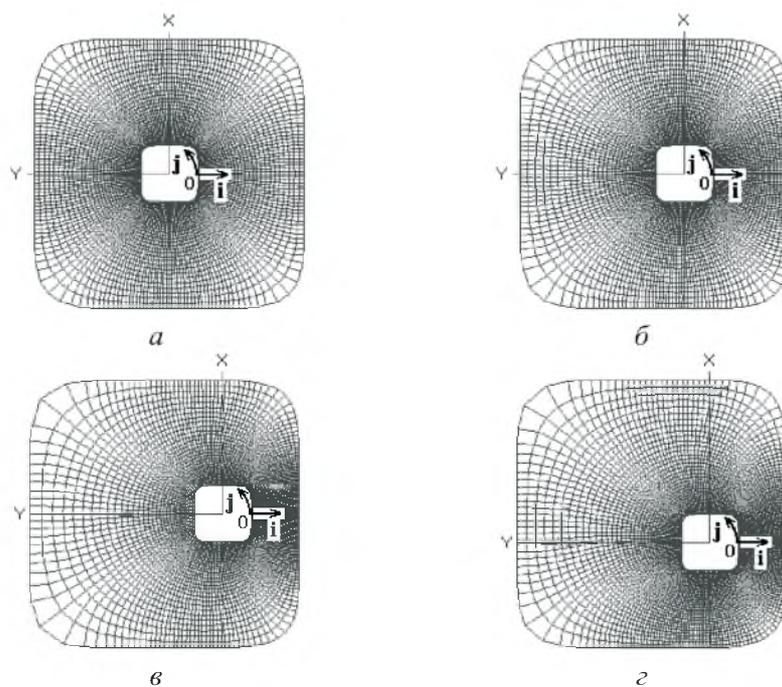


Рис. 3. Визуализация численной параметризации пластины с квадратным отверстием.

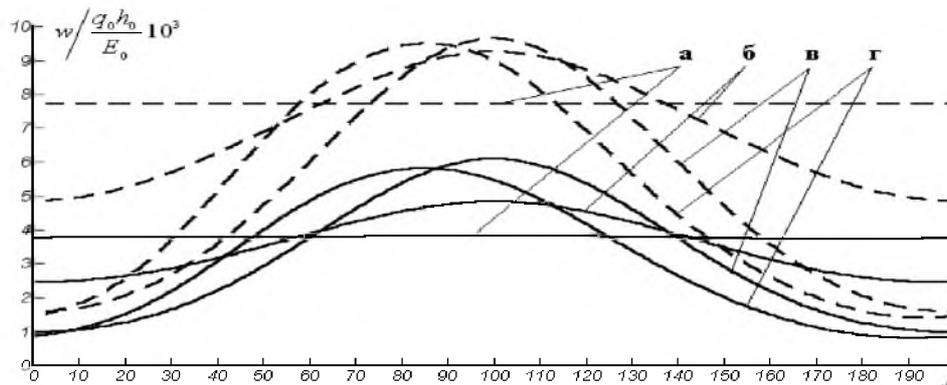


Рис. 4. Распределение нормальных перемещений w вдоль контура круглого отверстия.

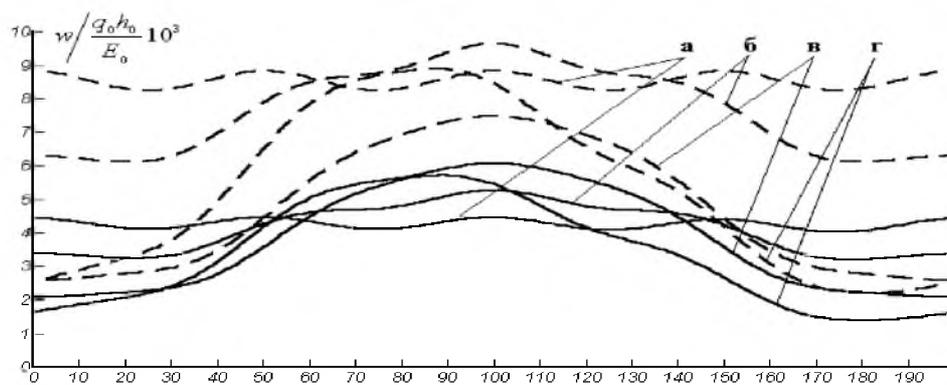


Рис. 5. Распределение нормальных перемещений w вдоль контура квадратного отверстия.

Двухмерное распределение нормальных напряжений показано на рис. 6, 7, а вдоль контуров круглого и квадратного отверстия – соответственно на рис. 8, 9. Видно, что для вариантов а)–в) при $\Delta x = 0$ перемещения и напряжения симметрично распределены относительно оси y . При этом с увеличением Δy наблюдается уменьшение значений нормальных перемещений w с приближением к окрестности $j = 0$ и $j = 100$.

Для варианта г) при $\Delta x \neq 0$ имеет место несимметричное распределение перемещений и напряжений вдоль контуров круглого и квадратного отверстия. Максимальные значения нормальных перемещений w на контуре находятся в точках $j = 87$ и $j = 80$ для круглого и квадратного отверстия соответственно.

Смещение отверстия (варианты б) $\Delta y = 3h_0$ и в) $\Delta y = 6h_0$) от центра пластины приводит к немонотонному перераспределению напряжений вдоль его контура. В случае квадратного отверстия, где наблюдается локальное увеличение напряжений в окрестности угловых точек контура отверстий, перераспределение напряжений проявляется более существенно. Так, квадратное отверстие со сглаженными углами инициирует значительно большие концентрации напряжений, превышающие напряжения в пластине с круглым отверстием.

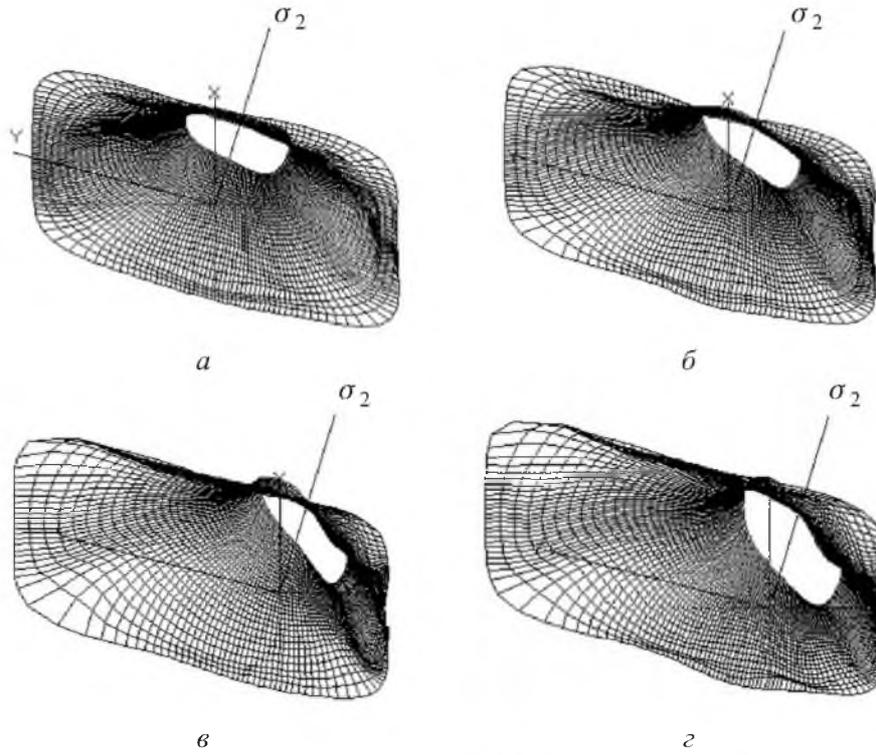


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений σ_2 в пластине с круглым отверстием.

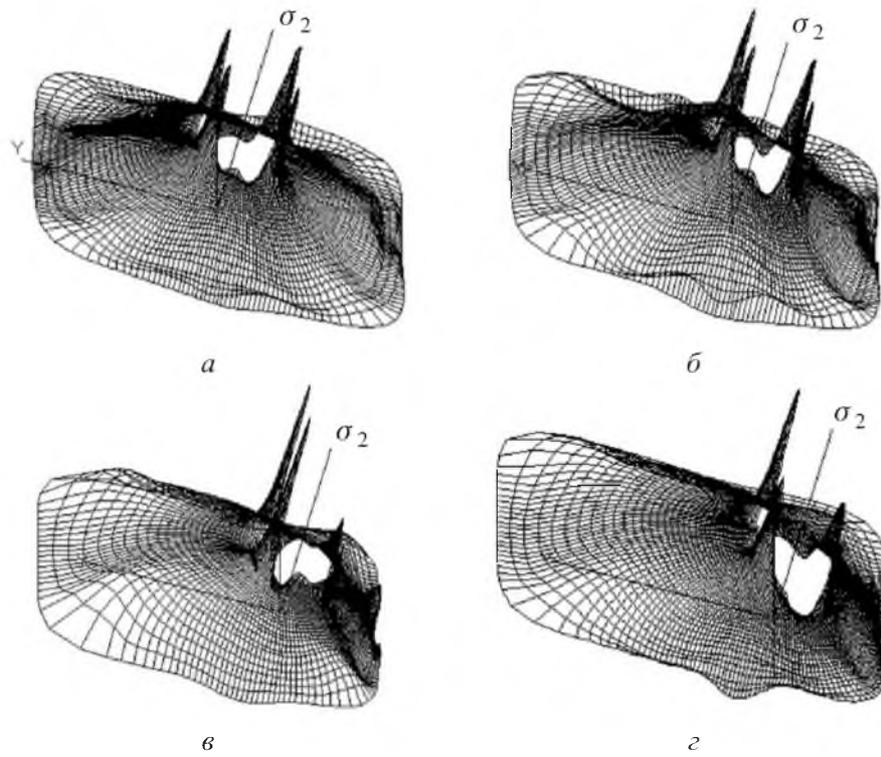


Рис. 7. Распределение нормальных напряжений σ_2 в пластине с квадратным отверстием.

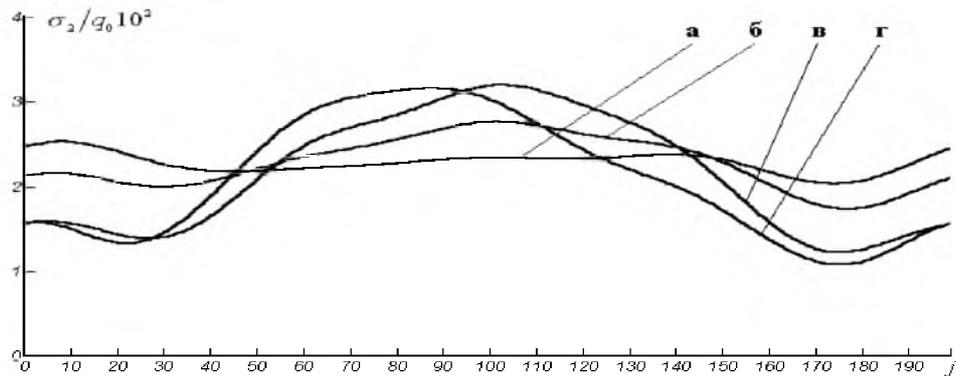


Рис. 8. Распределение нормальных напряжений σ_2 вдоль контура круглого отверстия.

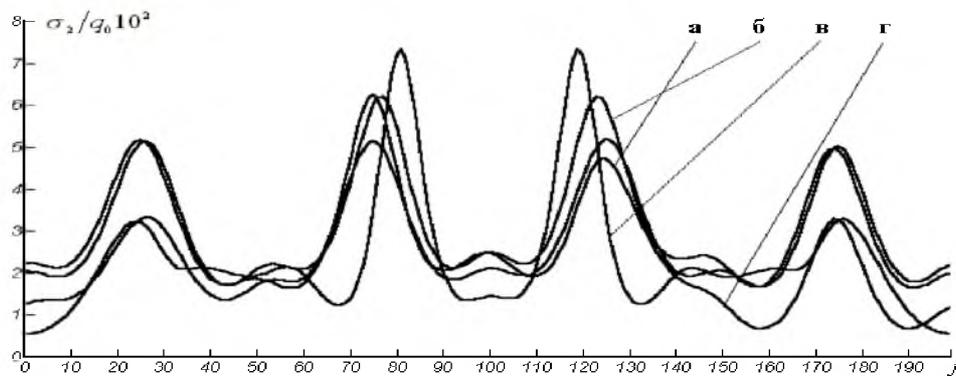


Рис. 9. Распределение нормальных напряжений σ_2 вдоль контура квадратного отверстия.

Проведенные исследования показали, что форма и месторасположение отверстия на пластине оказывают существенное влияние на перераспределение напряжений, которые локализуются в его окрестности. При этом максимальное значение прогиба практически не зависит от формы отверстия: перераспределение значений прогиба увеличивается со смещением отверстия от центра пластины.

Резюме

Представлено підхід до розрахунку напружено-деформованого стану пластин, що послаблені отвором. Підхід базується на числовій параметризації двозв'язної області, зведенні вихідної нелінійної задачі до послідовності лінійних двомірних та останніх до одновірних, інтегрування яких проводиться стійким числовим методом. Досліджується вплив форми та місцезнаходження отвору на напружено-деформований стан квадратної пластини.

1. Григоренко Я. М., Тимонин А. М. Численное решение задач о деформации гибких анизотропных пластин сложной геометрии // Докл. АН УССР. – 1990. – № 6. – С. 43 – 47.

2. Довбня Е. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния ортотропной оболочки с эллиптическим отверстием // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – № 32. – С. 140 – 144.
3. Колоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Механика композитов. Т. 7. Концентрация напряжений. – Киев: А.С.К, 1998. – С. 10 – 26.
4. Chern S. M. and Tuttle M. E. On displacement fields in orthotropic laminates containing an elliptical hole // Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 2000. – 67, No. 3. – P. 527 – 540.
5. Gudushouri I., Kipiani G., and Danelia D. Algorithm of solving for the concrete problem of calculating the rectangular plate with the hole of the same form // Probl. Appl. Mech. – 2000. – No. 1. – P. 60 – 68.
6. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Методы расчета оболочек. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
7. Шаповалов Л. А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. – 1968. – № 1. – С. 56 – 62.
8. Григоренко Я. М., Нанкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Киев: Либідь, 1995. – 280 с.
9. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
10. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.

Поступила 20. 11. 2002