

Устойчивость оболочек по форме близких к цилиндрическим

Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер, А. С. Ситник

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Предлагается методика определения критических нагрузок упругих оболочек по форме близких к цилиндрическим с помощью уравнений в перемещениях. Получено аналитическое выражение для оценки критических напряжений в безмоментных гладких оболочках. Проведен графический анализ роли отдельных составляющих полной потенциальной энергии указанных оболочек в стабилизации или дестабилизации деформированного состояния. Дана оценка безразмерных критических напряжений по отношению к классическим, определяемым для идеальных цилиндрических оболочек. Полученные данные сравниваются с результатами известных экспериментов.

Ключевые слова: устойчивость, оболочка по форме близкая к цилиндрической, уравнения в перемещениях.

Введение. В настоящей работе предлагается способ нахождения аналитического решения для задачи устойчивости упругих оболочек по форме близких к цилиндрическим. В основу известных первых решений [1, 2] и многих других для идеальных цилиндрических оболочек положена схема безмоментного докритического состояния, которая стала классической. Ее использовали также для оболочек с осесимметричной вмятиной в работах, например [3], где нет сравнения теоретических результатов с экспериментом. В отличие от указанной работы, где применены уравнения смешанной формы, нами используются уравнения в перемещениях и принятая С. П. Тимошенко схема упругого докритического состояния.

Следует подчеркнуть, что согласно этой схеме предполагается определенное ограничение на толщину оболочек ($r/t \geq 200$), ибо в противном случае кроме несовершенств необходимо учитывать пластические деформации аналогично работам [4, 5].

Авторы распространяют на рассматриваемые оболочки подход, предложенный в работах [6, 7] для цилиндрических идеальных оболочек. Полученные решения сравниваются с результатами известных экспериментов.

1. Анализ устойчивости оболочек по форме близких к цилиндрическим. Полная потенциальная энергия равномерно продольно сжатой цилиндрической оболочки длины l , радиуса r и толщины t , испытывающей перемещения относительно ненагруженного и недеформированного состояния, может быть записана в виде

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} [M_x X_x + M_\theta X_\theta + 2M_{x\theta} X_{x\theta}] r d\theta dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} [N_x E_x + N_\theta E_\theta + 2N_{x\theta} E_{x\theta}] r d\theta dx - \int_0^{2\pi} \sigma t U \Big|_{x=0}^{x=l} r d\theta, \quad (1)$$

где $M_x, M_\theta, M_{x\theta}$ – соответствующие изгибающие и крутящие моменты; $E_x, E_\theta, E_{x\theta}$ – мембранные деформации; $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ – мембранные усилия; $X_x, X_\theta, X_{x\theta}$ – изменения кривизны срединной поверхности оболочки; σ – напряжение; U – продольное перемещение.

Примем, что поведение оболочки под нагрузкой можно описать фундаментальным осесимметричным мембранным решением с соответствующими деформациями для гладкой оболочки по форме близкой к цилиндрической (рис. 1):

$$\begin{aligned} (N_x^F, N_\theta^F, N_{x\theta}^F) &= (-\sigma t, \sigma t r / \rho, 0); \\ (E_x^F, E_\theta^F, E_{x\theta}^F) &= (-\sigma / E(1 + \mu r / \rho), \sigma / E(\mu + r / \rho), 0), \end{aligned} \quad (2)$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; ρ – постоянный радиус меридиональной кривизны оболочки.

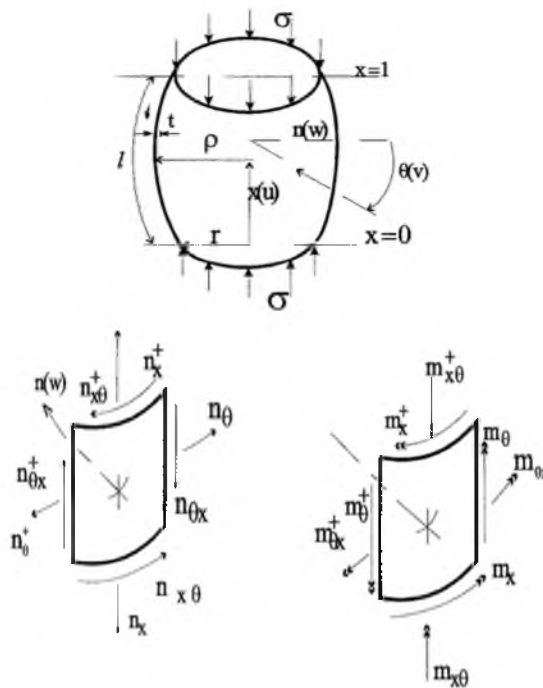


Рис. 1. Система координат, правила знаков и обозначения для усилий и моментов.

Состояния равновесия, отличные от принятого, можно описать с использованием приращения перемещений u, v, w . Таким образом, полные перемещения принимают вид

$$U \equiv U^F(\sigma) + u; \quad V \equiv V^F(\sigma) + v; \quad W \equiv W^F(\sigma) + w. \quad (3)$$

Величины полных усилий, моментов, деформаций и кривизны аналогично (3) запишем следующим образом:

$$\begin{cases} N_x \equiv N_x^F(\sigma) + n_x; & M_x \equiv M_x^F(\sigma) + m_x = m_x; \\ N_\theta \equiv N_\theta^F(\sigma) + n_\theta; & M_\theta \equiv M_\theta^F(\sigma) + m_\theta = m_\theta; \\ N_{x\theta} \equiv N_{x\theta}^F(\sigma) + n_{x\theta} = n_{x\theta}; & M_{x\theta} \equiv M_{x\theta}^F(\sigma) + m_{x\theta} = m_{x\theta}; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} E_x \equiv E_x^F(\sigma) + \varepsilon_x; & X_x \equiv X_x^F(\sigma) + \chi_x = \chi_x; \\ E_\theta \equiv E_\theta^F(\sigma) + \varepsilon_\theta; & X_\theta \equiv X_\theta^F(\sigma) + \chi_\theta = \chi_\theta; \\ E_{x\theta} \equiv E_{x\theta}^F(\sigma) + \varepsilon_{x\theta} = \varepsilon_{x\theta}; & X_{x\theta} \equiv X_{x\theta}^F(\sigma) + \chi_{x\theta} = \chi_{x\theta}. \end{cases} \quad (5)$$

Эквивалентность полных изгибных напряжений и деформаций приращением изгибных напряжений и деформаций – следствие предполагаемого основного мембранного состояния. При последующем анализе для удобства разобьем приращение мембранных деформаций на линейные $\varepsilon'_x, \varepsilon'_\theta, \varepsilon'_{x\theta}$ и квадратичные $\varepsilon''_x, \varepsilon''_\theta, \varepsilon''_{x\theta}$ компоненты и определим связанные мембранные результирующие напряжения $n'_x, n'_\theta, n'_{x\theta}$ и $n''_x, n''_\theta, n''_{x\theta}$ этих линейных и квадратичных деформаций соответственно.

Следовательно, уравнение (1) можно заменить выражением

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots, \quad (6)$$

где вклады в полную потенциальную энергию являются интегралами независимыми V_0 , линейными V_1 , квадратичными V_2, \dots от приращений перемещений и могут быть представлены в виде

$$V_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [N_x^F E_x^F + N_\theta^F E_\theta^F + 2N_{x\theta}^F E_{x\theta}^F] r d\theta dx - \int_0^{2\pi} \sigma t U^F \Big|_0^1 r d\theta; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [(N_x^F \varepsilon'_x + n'_x E_x^F) + (N_\theta^F \varepsilon'_\theta + n'_\theta E_\theta^F) + \\ & + 2(N_{x\theta}^F \varepsilon'_{x\theta} + n'_{x\theta} E_{x\theta}^F)] r d\theta dx - \int_0^{2\pi} \sigma t u \Big|_0^1 r d\theta; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} V_2 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [m'_x \chi'_x + m'_\theta \chi'_\theta + 2m'_{x\theta} \chi'_{x\theta}] r d\theta dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [n'_x \varepsilon'_x + n'_\theta \varepsilon'_\theta + 2n'_{x\theta} \varepsilon'_{x\theta}] r d\theta dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [(N_x^F \varepsilon''_x + n''_x E_x^F) + \\ & + (N_\theta^F \varepsilon''_\theta + n''_\theta E_\theta^F)] r d\theta dx = U_M + U_B + \tilde{V}_M^x + \tilde{V}_M^\theta + \tilde{\tilde{V}}_M^x + \tilde{\tilde{V}}_M^\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

где U_M – первый интеграл для линейной составляющей мембранной энергии деформации; U_B – второй интеграл для линейной составляющей энергии деформации при изгибе;

$$\begin{aligned} \tilde{V}_M^x &= \frac{1}{2} \int \int N_x^F \varepsilon_x'' r d\theta dx; & \tilde{\tilde{V}}_M^x &= \frac{1}{2} \int \int n_x'' E_x^F r d\theta dx; \\ \tilde{V}_M^\theta &= \frac{1}{2} \int \int N_\theta^F \varepsilon_\theta'' r d\theta dx; & \tilde{\tilde{V}}_M^\theta &= \frac{1}{2} \int \int n_\theta'' E_\theta^F r d\theta dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Устойчивость равновесия основного состояния контролируется квадратичными компонентами V_2 , входящими в полную потенциальную энергию, в связи с чем возникает задача определения их собственных значений. В выражении для V_2 первый интеграл состоит из окружной и крутящих составляющих мембранной энергии деформации, а второй – представляет соответствующие составляющие для энергии деформации при изгибе. Третий интеграл зависит от мембранных квадратичных соотношений между деформациями и перемещениями и, следовательно, может быть рассмотрен как часть нелинейной мембранной энергии деформации. В нем напряжения основного состояния (N_x^F, N_θ^F) и деформации (E_x^F, E_θ^F) являются коэффициентами. Это обстоятельство, как будет показано ниже, имеет существенное значение.

С использованием обозначений и знаков, принятых на рис. 1, линейные зависимости между деформациями и приращениями в уравнении (9) представим в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_x' &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{\rho}; & \chi_x' &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_\theta' &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right); & \chi_\theta' &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right); \\ \varepsilon_{x\theta}' &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right); & \chi_{x\theta}' &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения для малых деформаций при конечных углах вращения запишем следующим образом:

$$\varepsilon_x'' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{\rho} \right)^2 \right]; \quad \varepsilon_\theta'' = \frac{1}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right)^2 \right]. \quad (12)$$

В третий интеграл выражения для V_2 входят слагаемые, связанные с наличием мембранного основного напряженного состояния, в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (N_x^F \varepsilon_x'' + N_\theta^F \varepsilon_\theta'') r d\theta dx.$$

Обычно эти слагаемые, применяемые для оценки работы внешних сил, характеризуют отрицательную потенциальную энергию последних. Однако ограничиваться только ими некорректно, ибо при этом не учитывается важный вклад в нелинейную окружную энергию деформации слагаемого

$$\left[\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (E_\theta^F n_\theta'') rd\theta dx \right].$$

Результирующие напряжения и моменты связаны с линейными компонентами деформаций следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} n_x' &= K(\varepsilon_x' + \mu\varepsilon_\theta'); & m_x' &= D(\chi_x' + \mu\chi_\theta'); \\ n_\theta' &= K(\varepsilon_\theta' + \mu\varepsilon_x'); & m_\theta' &= D(\chi_\theta' + \mu\chi_x'); \\ n_{x\theta}' &= K(1-\mu)\varepsilon_{x\theta}'; & m_{x\theta}' &= D(1-\mu)\chi_{x\theta}', \end{aligned} \quad (13)$$

где $K = Et/(1-\mu^2)$; $D \equiv Et^3/12(1-\mu^2)$.

Квадратичные компоненты усилий имеют вид

$$n_x'' = K(\varepsilon_x'' + \mu\varepsilon_\theta''); \quad n_\theta'' = K(\varepsilon_\theta'' + \mu\varepsilon_x''), \quad (14)$$

входящие в (14) нелинейные деформации определяются по формулам (12).

После подстановки формул (11), (13) в выражение для энергии (9) оно преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{K}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{\rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{\rho} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] rd\theta dx + \frac{D}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 - \right. \\ &- 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \left. \frac{2(1-\mu)}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] rd\theta dx + \tilde{V}_M^x + \tilde{\tilde{V}}_M^x + \tilde{V}_M^\theta + \tilde{\tilde{V}}_M^\theta. \quad (15) \end{aligned}$$

Суммы последних составляющих выражения (15) равны

$$\tilde{V}_M^x + \tilde{\tilde{V}}_M^\theta + \tilde{\tilde{V}}_M^x + \tilde{\tilde{V}}_M^\theta = -\frac{\sigma K}{2E} (1-\mu^2) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{r}{\rho} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right] rd\theta dx; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_M^x + \tilde{V}_M^\theta + \tilde{\tilde{V}}_M^x = & -\frac{\sigma K}{4E} \left(2 - \mu^2 - \mu \frac{r}{\rho} \right) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 r d\theta dx - \\ & -\frac{\sigma K}{4E} \left(\mu - 2\mu^2 + \frac{r}{\rho} \right) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 r d\theta dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Для оболочки с классическими шарнирно опертыми краями перемещения выбираем в форме

$$u = u_{ij} \cos i\theta \cos j\pi x/l; \quad v = v_{ij} \sin i\theta \sin j\pi x/l; \quad w = w_{ij} \cos i\theta \sin j\pi x/l. \quad (18)$$

Подставив выражения (18) в (15) и (16), получим

$$\begin{aligned} V_2^* = V_2 \alpha = & \left[-\lambda u_{ij} + i v_{ij} - \left(1 + \frac{r}{\rho} \right) w_{ij} \right]^2 + 2(1 - \mu) \left(\lambda u_{ij} + \frac{r}{\rho} w_{ij} \right) (i v_{ij} - w_{ij}) + \\ & + \frac{1 - \mu}{2} (-i u_{ij} + \lambda v_{ij})^2 + \frac{1}{a} \left[-(i^2 + \lambda^2) w_{ij} - \frac{r}{\rho} \lambda u_{ij} \right]^2 + \\ & + 2(1 - \mu) \left[\left(\lambda^2 w_{ij} + \frac{r}{\rho} \lambda u_{ij} \right) (-i^2 w_{ij} + i v_{ij}) + \left(-\lambda i w_{ij} + \lambda v_{ij} - \frac{r}{\rho} i u_{ij} \right)^2 \right] + \\ & + \tilde{V}_M^x + \tilde{\tilde{V}}_M^x + \tilde{V}_M^\theta + \tilde{\tilde{V}}_M^\theta, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{V}_M^x + \tilde{\tilde{V}}_M^x + \tilde{V}_M^\theta + \tilde{\tilde{V}}_M^\theta = & -\frac{\sigma}{E} (1 - \mu^2) \left(\lambda^2 + \frac{r}{\rho} i^2 \right) w_{ij}^2; \\ \alpha = & \frac{4r}{K\pi l}; \quad a = 12R^2 = 12(r/t)^2; \quad \lambda = j\pi/l. \end{aligned}$$

Из условий экстремума полной потенциальной энергии системы получаются соответствующие уравнения равновесия. Приравнявая нулю первые производные от V_2^* по параметрам прогибов u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} , получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_2^*}{\partial u_{ij}} = A_{11} u_{ij} + A_{12} v_{ij} + A_{13} w_{ij} = 0; \\ \frac{\partial V_2^*}{\partial v_{ij}} = A_{12} u_{ij} + A_{22} v_{ij} + A_{23} w_{ij} = 0; \\ \frac{\partial V_2^*}{\partial w_{ij}} = A_{13} u_{ij} + A_{23} v_{ij} + \left(A'_{33} - \frac{\sigma}{E} A''_{33} \right) w_{ij} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\begin{cases} A_{11} = \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2}i^2 + \frac{(r/\rho)^2}{a}[\lambda^2 + 2(1-\mu)i^2]; \\ A_{12} = -\frac{1+\mu}{2}i\lambda - \frac{r/\rho}{a}(2-\mu)i\lambda; \\ A_{13} = \lambda\left(\frac{r}{\rho} + \mu\right) + \lambda\frac{r}{\rho}[\lambda^2 + (2-\mu)i^2]; \\ A_{22} = \frac{1-\mu}{2}\lambda^2 + i^2 + \frac{1}{a}[i^2 + 2(1-\mu)\lambda^2]; \\ A_{23} = -i\left(1 + \mu\frac{r}{\rho}\right) - \frac{i}{a}[i^2 + (2-\mu)\lambda^2]; \\ A_{33} = 1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + 2\mu\frac{r}{\rho} + \frac{1}{a}(i^2 + \lambda^2)^2; \\ (A''_{33})_{cl} = (1-\mu^2)\left(\lambda^2 - \frac{r}{\rho}i^2\right). \end{cases} \quad (21)$$

Тогда (16) преобразуется к виду

$$\tilde{V}_M^x + \tilde{V}_M^\theta + \tilde{\tilde{V}}_M^x + \tilde{\tilde{V}}_M^\theta = -\frac{K}{2r^2} \frac{\sigma}{E} (A''_{33})_{cl}. \quad (22)$$

Систему (20) кратко можно записать так:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ w_{ij} \end{Bmatrix} = 0, \quad (23)$$

где $A_{33} = A'_{33} - \Lambda A''_{33}$, $\Lambda = \sigma/E$, $A_{12} = A_{21}$, $A_{13} = A_{31}$.
 Раскрывая детерминант (23), получаем

$$A_{13} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23} \end{vmatrix} - A_{23} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{23} \end{vmatrix} + \left(A_{33} - \frac{\sigma}{E} A''_{33}\right) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (24)$$

В результате определим решение уравнения (24)

$$\left(\frac{\sigma}{E}\right)_c = \frac{1}{(A''_{33})_{cl}} \left[A'_{33} + \frac{2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right]. \quad (25)$$

На рис. 2 показан спектр критических нагрузок продольно-сжатой оболочки по форме близкой к цилиндрической ($R = r/t = 300$, $l/r = 2,88$, $r/\rho = 0,09$) для различных мод в виде осевых полуволн. Величина

$\sigma_{cl}/E = 0,605 t/r$ определяет безразмерную минимальную критическую нагрузку шарнирно опертой цилиндрической оболочки. Для оболочек по форме близких к цилиндрическим правый пучок восходящих ветвей постоянно сжимается и становится более пологим, величина σ_c/E при этом приближается к σ_{cl}/E .

Рис. 3 иллюстрирует зависимость σ_c/σ_{cl} от числа окружных волн i для оболочек по форме близких к цилиндрическим при $r/t = 300$, $l/r = 2,88$.

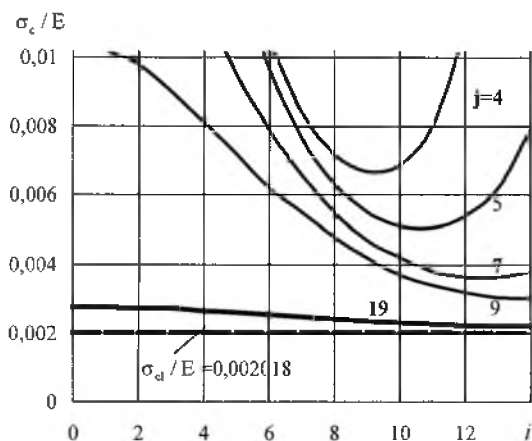


Рис. 2. Зависимость безразмерных критических напряжений σ_c/E от числа окружных волн i при $r/\rho = 0,09$ и фиксированных j .

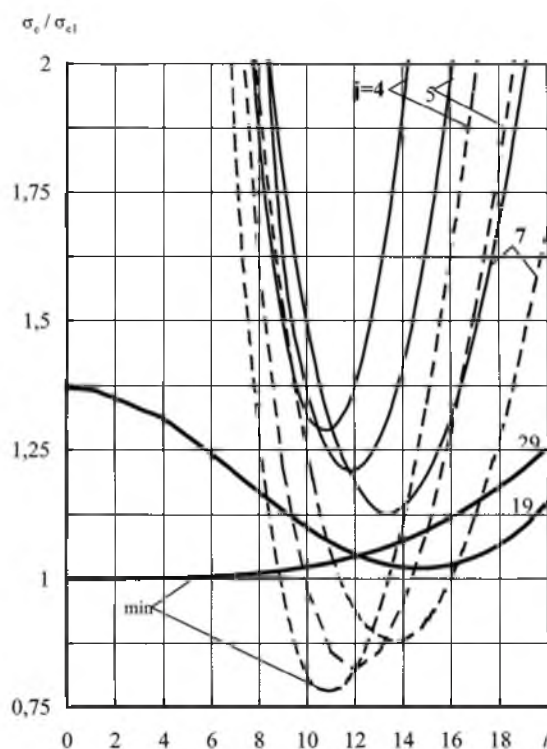


Рис. 3. Зависимость безразмерных критических напряжений σ_c/σ_{cl} от числа окружных волн i : сплошные линии – $r/\rho = 0,02$; пунктирные – $r/\rho = -0,02$.

2. Аналитические выражения для отдельных составляющих полной потенциальной энергии для оболочек по форме близких к цилиндрическим. Чтобы оценить величину каждого слагаемого в полной потенциальной энергии V_2 (9) возмущенного состояния, необходимо проанализировать их поведение в зависимости от i и j .

Выражения для отдельных слагаемых (9) предварительно представим в виде

$$\begin{aligned} U_{1B} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} m'_x \chi'_{x'} r d\theta dx; & U_{2B} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} m'_\theta \chi'_{\theta'} r d\theta dx; \\ U_{3B} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} m'_{\theta x} \chi'_{x\theta} r d\theta dx. \end{aligned} \quad (26)$$

После подстановки соотношений (11), (13), (19) в (26) имеем

$$\begin{cases} U_{1B} = \frac{D \pi l}{4 r^3} \left[\lambda \left(\lambda w_{ij} + \frac{r}{\rho} u_{ij} \right) \left(\left(\lambda w_{ij} + \frac{r}{\rho} u_{ij} \right) + \mu i (i w_{ij} - v_{ij}) \right) \right]; \\ U_{2B} = \frac{D \pi l}{4 r^3} \left[i (i w_{ij} - v_{ij}) \left(\left(\lambda w_{ij} + \frac{r}{\rho} u_{ij} \right) - \lambda \mu + i (i w_{ij} - v_{ij}) \right) \right]; \\ U_{3B} = \frac{D (1 - \mu) \pi l}{2 r^3} \left(-\lambda i w_{ij} + \lambda v_{ij} - \frac{r}{\rho} i u_{ij} \right)^2. \end{cases} \quad (27)$$

Первые два уравнения (23) запишем в виде

$$\begin{aligned} A_{11} u_{ij} + A_{12} v_{ij} &= -A_{13} w_{ij}; \\ A_{21} u_{ij} + A_{22} v_{ij} &= -A_{23} w_{ij}, \end{aligned} \quad (28)$$

откуда получаем

$$u_{ij} = -\frac{A_{22} A_{13} - A_{23} A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} w_{ij}; \quad v_{ij} = -\frac{A_{11} A_{23} - A_{12} A_{13}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} w_{ij} \quad (29)$$

или в иной форме

$$u_{ij} = \bar{u}_{ij} w_{ij}; \quad v_{ij} = \bar{v}_{ij} w_{ij}. \quad (30)$$

Безразмерные компоненты \bar{U}_{1B} , \bar{U}_{2B} , \bar{U}_{3B} с учетом (30) примут вид

$$\begin{cases} \bar{U}_{1B} = \frac{U_{1B}}{w_{ij}^2} \alpha = \lambda \left(\lambda + \frac{r}{\rho} \bar{u}_{ij} \right) \left(\lambda^2 + \mu i^2 + \lambda \frac{r}{\rho} \bar{u}_{ij} - i \mu \bar{v}_{ij} \right) \frac{1}{a}; \\ \bar{U}_{2B} = \frac{U_{2B}}{w_{ij}^2} \alpha = i (i - \bar{v}_{ij}) \left(\mu \lambda^2 + i^2 + \mu \lambda \frac{r}{\rho} \bar{u}_{ij} - i \bar{v}_{ij} \right) \frac{1}{a}; \\ \bar{U}_{3B} = \frac{U_{3B}}{w_{ij}^2} \alpha = 2(1 - \mu) \left(i \lambda + i \frac{r}{\rho} \bar{u}_{ij} - \lambda \bar{v}_{ij} \right) \frac{1}{a}. \end{cases} \quad (31)$$

Аналогичные выкладки выполним для U_{1M}, U_{2M}, U_{3M} , входящих в (9):

$$\begin{aligned}
 U_{1M} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} n'_x \varepsilon'_x r d\theta dx; & U_{2M} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} n'_\theta \varepsilon'_\theta r d\theta dx; \\
 U_{3M} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} n'_{\theta x} \varepsilon'_{\theta x} r d\theta dx.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Безразмерные компоненты $\bar{U}_{1M}, \bar{U}_{2M}, \bar{U}_{3M}$ представим так:

$$\begin{cases}
 \bar{U}_{1M} = \frac{U_{1M}}{w_{ij}^2} \alpha r^2 = \left(\lambda \bar{u}_{ij} + \frac{r}{\rho} \right) \left(\lambda \bar{u}_{ij} - i \mu \bar{v}_{ij} + \frac{r}{\rho} + \mu \right); \\
 \bar{U}_{2M} = \frac{U_{2M}}{w_{ij}^2} \alpha r^2 = (i \bar{v}_{ij} - 1) \left(i \bar{v}_{ij} - \mu \lambda \bar{u}_{ij} - 1 - \mu \frac{r}{\rho} \right); \\
 \bar{U}_{3M} = \frac{U_{3M}}{w_{ij}^2} \alpha r^2 = \frac{1 - \mu}{2} (\lambda \bar{v}_{ij} - i \bar{u}_{ij})^2.
 \end{cases}
 \tag{33}$$

Нелинейные компоненты

$$V_{1M} = \tilde{V}_M^x + \tilde{\tilde{V}}_M^x = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (n_x'' E_x^F + N_x^F \varepsilon_x'') r d\theta dx$$

и

$$V_{2M} = \tilde{V}_M^\theta + \tilde{\tilde{V}}_M^\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (n_\theta'' E_\theta^F + N_\theta^F \varepsilon_\theta'') r d\theta dx,$$

входящие в (9) с учетом (14) и упрощенных соотношений (12), предложенных А. Доннеллом [6] в виде

$$\varepsilon_x'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_\theta'' = \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2,
 \tag{34}$$

преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 V_{1M} &= \frac{K}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [(\varepsilon_x'' + \mu \varepsilon_\theta'') E_x^F + (E_x^F + \mu E_\theta^F) \varepsilon_x''] r d\theta dx = \\
 &= \frac{K}{2} \left[\int_0^1 \int_0^{2\pi} \varepsilon_x'' (2E_x^F + \mu E_\theta^F) + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu \varepsilon_\theta'' E_x^F \right] r d\theta dx;
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

$$V_{2M} = \frac{K}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [(\mu \varepsilon_x'' + \varepsilon_\theta'') E_\theta^F + (\mu E_x^F + E_\theta^F) \varepsilon_\theta''] r d\theta dx =$$

$$= \frac{K}{2} \left[\int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu E_\theta^F \varepsilon_x'' + \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\mu E_x^F + 2E_\theta^F) \varepsilon_\theta'' \right] r d\theta dx. \quad (36)$$

Безразмерные компоненты \bar{V}_{1M} и \bar{V}_{2M} запишем в виде

$$\bar{V}_{1M} = \frac{V_{1M}}{w_{ij}^2} \alpha = -\frac{\sigma}{2E} \left[\lambda^2 \left(2 - \mu^2 - \mu \frac{r}{\rho} \right) + \mu i^2 \left(1 - \mu \frac{r}{\rho} \right) \right]; \quad (37)$$

$$\bar{V}_{2M} = \frac{V_{2M}}{w_{ij}^2} \alpha = -\frac{\sigma}{2E} \left[\mu \left(\mu - \frac{r}{\rho} \right) \lambda^2 + i^2 \left(\mu + \frac{r}{\rho} (\mu^2 - 2) \right) \right]. \quad (38)$$

На рис. 4 все составляющие, входящие в полную потенциальную энергию, т.е. $\bar{U}_{1B}, \bar{U}_{2B}, \bar{U}_{3B}, \bar{U}_{1M}, \bar{U}_{2M}, \bar{U}_{3M}$ и V_{1M}, V_{2M} , будут обозначены одним безразмерным параметром ω . Следовательно, каждая из указанных компонент в размерном виде будет определяться из выражений типа

$$\left. \begin{matrix} U_{1B} \\ U_{2B} \\ U_{3B} \end{matrix} \right\} = \omega \frac{w_{ij}^2}{\alpha}, \quad (39)$$

где ω – безразмерная величина $\bar{U}_{1B}, \bar{U}_{2B}, \bar{U}_{3B}$ из (31).

Для определения U_{1M}, U_{2M}, U_{3M} величины ω будут заданы по формулам (33), для V_{1M}, V_{2M} – по формулам (37), (38).

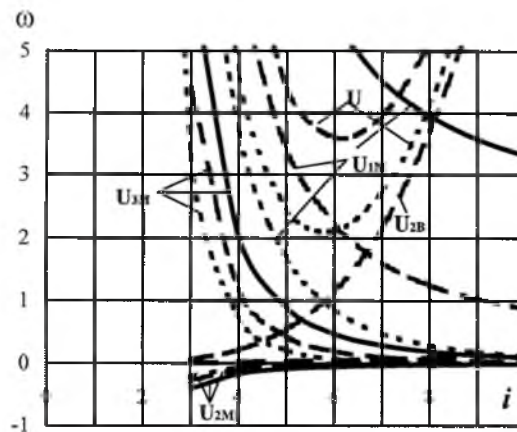


Рис. 4. Составляющие полной потенциальной энергии для гладкой оболочки по форме близкой к цилиндрической ($L = 2,88; R = 300; \mu = 0,3; j = 1$): пунктирные линии – $r/\rho = 0$; штриховые – $r/\rho = 0,02$; сплошные – $r/\rho = 0,05$.

3. Графический анализ составляющих полной потенциальной энергии для оболочек по форме близких к цилиндрическим. На рис. 4 представлены графики зависимости U_M (линейная мембранная энергия деформации) и U_B (линейная энергия деформации при изгибе) от i (фактически для безразмерных \bar{U}_M и \bar{U}_B , у которых с целью упрощения рисунков опущена верхняя черта и они отождествлены с соответствующей ω).

Таким образом, имеем зависимость всех безразмерных U_{kM} и U_{kB} ($k=1, 2, 3$) в виде графиков $U_k = f(i)$. Как оказалось, составляющие U_{1B} , U_{2M} , U_{3B} малы в возмущенном состоянии. Составляющие U_{1M} и U_{3M} быстро уменьшаются с ростом i , т.е. энергии мембранных деформаций имеют существенный удельный вес лишь при малых i . Составляющая U_{2B} (окружная энергия деформации при изгибе), наоборот, с изменением i стремительно увеличивается.

Поведение суммарной энергии, т.е. $U = f(i)$, в первую очередь определяется суммой слагаемых U_{1M} , U_{2B} . Остальные слагаемые ее мало изменяют.

В оболочках по форме близких к цилиндрическим положительная кривизна r/ρ (рис. 4) приводит к увеличению составляющих компонент энергии, причем особенно быстро повышается U_{1M} с ростом i при фиксированном $j=1$.

График для U_{2B} практически не изменяется с изменением r/ρ . Суммарная величина линейной части энергии деформации, определяемая функцией $U = f(i)$, существенно возрастает при увеличении r/ρ (для оболочек положительной кривизны). При $r/\rho = 0,05$ минимальное значение U выходит за пределы рис. 4.

Проиллюстрировав поведение линейных составляющих полной потенциальной энергии, особо остановимся на величине и роли нелинейных составляющих энергии мембранной деформации.

Главный вклад в стабилизацию деформированного состояния оболочки вносит слагаемое $\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} n_\theta'' E_\theta^F r d\theta dx$, представляющее собой нелинейную

окружную составляющую энергии мембранной деформации. Сравнение ее с данными рис. 4 показывает, что минимальное значение нелинейной окружной составляющей энергии мембранной деформации в несколько раз выше линейной энергии U .

Главным дестабилизирующим фактором является компонента $\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (n_x'' E_x^F + N_x^F \varepsilon_x'') r d\theta dx$, характеризующая нелинейную осевую составляющую энергии мембранной деформации.

В оболочках по форме близких к цилиндрическим появляется нелинейная составляющая $\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (n_\theta'' E_\theta^F + N_\theta^F \varepsilon_\theta'') r d\theta dx$. Как и в гладких цилиндрических оболочках, в них сохраняется стабилизирующая роль составляющей

$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} n_\theta'' E_\theta^F r d\theta dx$. Она вносит основной положительный вклад в полную

потенциальную энергию, причем величина ее несколько возрастает по сравнению с энергией для цилиндрической оболочки.

Второе слагаемое $\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} N_\theta^F \varepsilon_\theta'' r d\theta dx$ вносит небольшой стабилизиру-

ющий вклад, и его величина существенно ниже (в 6–10 раз), чем первого слагаемого. Поведение оболочек с отрицательной гауссовой кривизной иное.

Если в оболочке с положительной гауссовой кривизной ($r/\rho = 0,02$) по сравнению с цилиндрической величина $\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (n_\theta'' E_\theta^F + N_\theta^F \varepsilon_\theta'') r d\theta dx$ воз-

растала, то в оболочке с отрицательной гауссовой кривизной ($r/\rho = -0,02$) она резко уменьшилась (почти в три раза).

Следовательно, стабилизирующая роль нелинейной окружной составляющей резко уменьшается в оболочках с $r/\rho < 0$.

Одновременно снижается дестабилизирующая роль нелинейной осевой составляющей энергии $\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (n_x'' E_x^F + N_x^F \varepsilon_x'') r d\theta dx$ при $r/\rho = -0,02$ (почти

в три раза по сравнению с соответствующей величиной для цилиндрической оболочки).

В оболочках с отрицательной гауссовой кривизной линейная энергия U уменьшается, стремясь к нулю. Поэтому их несущая способность существенно падает.

На основании проведенных расчетов и полученных графиков можно сделать следующие главные выводы:

1) линейная энергия деформации U в первую очередь определяется вкладом мембранной и изгибной составляющих – в оболочках с положительной гауссовой кривизной она существенно возрастает по сравнению с цилиндрическими оболочками, в оболочках с отрицательной гауссовой кривизной ее минимальное значение может снижаться до нуля;

2) нелинейные составляющие энергии деформации вносят двойной вклад в полную энергию:

первая составляющая $\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (n_\theta'' E_\theta^F + N_\theta^F \varepsilon_\theta'') r d\theta dx$ для оболочек с по-

ложительной гауссовой кривизной является стабилизирующей и увеличивается с ростом r/ρ ;

вторая составляющая $\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (n_x'' E_x^F + N_x^F \varepsilon_x'') r d\theta dx$ вносит дестабили-

зирующий вклад и также увеличивается с ростом r/ρ ;

3) для оболочек с отрицательной гауссовой кривизной минимальный стабилизирующий вклад первой составляющей и дестабилизирующий вклад второй составляющей могут резко устремиться к нулю.

4. Критические напряжения в оболочках по форме близких к цилиндрическим. Проанализируем более детально характер поведения критических напряжений в оболочках по форме близких к цилиндрическим. Величина их определяется по методике, изложенной в п. 1.

Построим графики зависимости $\bar{\sigma}_{кр} = \frac{\sigma_{кр} r}{0,605 Et}$ от отношения r/ρ и r/t , где $\bar{\sigma}_{кр} = \frac{\sigma_{кр} r}{\sigma_{cl} r} = \frac{\sigma_{кр} r}{0,605 Et}$ – отношение критического напряжения к классическому его значению для равномерно сжатой и шарнирно опертой гладкой цилиндрической оболочки.

Как видно, характер поведения $\bar{\sigma}_{кр}$ существенно зависит от знака r/ρ :

1) для оболочек с положительной гауссовой кривизной $\bar{\sigma}_{кр}$ не зависит от r/ρ и r/t , для рассмотренных r/ρ величина $\bar{\sigma}_{кр} = 1$ (рис. 5), т.е. совпадает с классическим критическим напряжением σ_{cl} для цилиндрической оболочки;

2) для оболочек с отрицательной гауссовой кривизной $\bar{\sigma}_{кр}$ существенно зависит от r/ρ и резко снижается с ростом $|r/\rho|$, особенно при увеличении параметра длины $l/r = 3$.

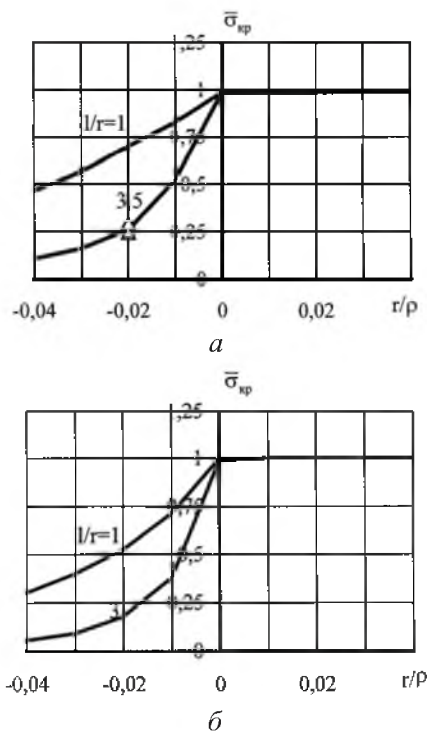


Рис. 5. Зависимость $\bar{\sigma}_{кр}$ от r/ρ для гладкой оболочки по форме близкой к цилиндрической при различных l/r : *a* – $r/t=400$; *б* – $r/t=1000$ (Δ – экспериментальные данные [8] для оболочек при $r/t=400$, $l/r = 3,5$, $r/\rho < 0$).

На рис. 5, *a* точками нанесены экспериментальные результаты [8] для оболочек при $r/t = 400$, $l/r = 3,5$ ($r/\rho < 0$). Отметим, что используемые в

работе [8] опытные образцы были качественные, т.е. без начальных напряжений и несовершенств. Этому способствовал выбор материала (латунь Л-62М), специальная процедура снятия начальных напряжений, почти постоянная толщина оболочки, отсутствие начальных прогибов в самой форме оболочки. Экспериментальные значения критических напряжений были близки между собой, а также к полученным авторами путем расчета.

Заключение. Разработана методика определения критических нагрузок упругих оболочек по форме близких к цилиндрическим и предложена аналитическая формула для их расчета.

Проведено сравнение полученных результатов с безмоментным решением для идеальных цилиндрических оболочек и известными в литературных источниках экспериментальными данными [8]. Критические нагрузки, определенные в настоящей работе, совпали с экспериментальными данными [8].

Резюме

Запропоновано методику визначення критичних навантажень пружних оболонок за формою близьких до циліндричних. Використовуються рівняння в переміщеннях. Отримано аналітичну формулу для оцінки критичних напружень у безмоментних гладких оболонках. Проведено графічний аналіз ролі окремих складових повної потенціальної енергії указаних оболонок в стабілізації або дестабілізації деформованого стану. Оцінено безрозмірні критичні напруження по відношенню до класичних, що визначаються для ідеальних циліндричних оболонок. Отримані результати зіставляються з результатами відомих експериментів.

1. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек – М.: Наука, 1971. – 807 с.
2. Lorenz R. Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder // Physik-Zeitschrift. – 1911. – Bd. 12, No. 7. – S. 241 – 260.
3. Амиро И. Я. К вопросу об устойчивости тонких цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1963. – 9, вып. 3. – С. 264 – 269.
4. Гудрамович В. С., Герасимов В. П., Деменков А. Ф. Предельный анализ элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с.
5. Гудрамович В. С., Деменков А. Ф. Упруго-пластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 176 с.
6. Batista R. C. Lower Bound Estimates for Cylindrical Shell Buckling. Ph. D. Thesis. – London: University College, 1979.
7. Croll J. G. A. and Batista R. C. Explicit lower bounds for the buckling of axially loaded cylinders // J. Mech. Sci. – 1981. – 23. – P. 331 – 343.
8. Полуэктов А. Е. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек с криволинейными образующими при кручении и осевом сжатии. – М.: Мин-во обороны СССР, 1969. – Вып. 8. – С. 143 – 152.

Поступила 02. 04. 2002