

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.4

О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов

А. А. Лебедев^а, В. М. Михалевич^б

^а Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

^б Винницкий государственный технический университет, Винница, Украина

Предлагается критерию прочности формулировать в виде зависимости интенсивности напряжений от безразмерного инварианта η , равного отношению первого инварианта тензора напряжений к интенсивности напряжений. Приведено доказательство корректности использования инварианта η в случае плоского напряженного состояния. На примерах сопоставления расчетных и экспериментальных данных показаны преимущества предложенной формы представления условий предельного состояния в сравнении с классическим подходом. Указаны возможные пути распространения описанного подхода применительно к объемному напряженному состоянию.

Ключевые слова: критерии прочности, тензор напряжений, плоское и объемное напряженное состояние.

При расчетах элементов конструкций на прочность фактические коэффициенты запаса определяют путем сопоставления уровня реально действующих в рассматриваемом элементе напряжений с характеристиками прочности материала.

За меру интенсивности внутренних усилий при произвольной системе напряжений принимается эквивалентное напряжение, рассчитанное по той или иной теории прочности, а в качестве меры прочности материала – характеристики, которые определяют путем испытания материала при простейших видах нагружения (растяжение, сжатие, реже – кручение).

Аналитическая формулировка условия прочности может быть представлена уравнением

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i) = 0, \quad (1)$$

которое в пространстве главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ должно иметь однозначную геометрическую интерпретацию в виде регулярной или сингулярной поверхности, ограничивающей безопасную для заранее оговоренных условий область напряженных состояний. В уравнении (1) m_i – константа, характеризующая свойства материала.

Иногда в качестве параметров напряженного состояния принимают не главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а их инварианты. В этом случае условие прочности можно записать следующим образом:

$$F(J_1, J_2, J_3, m_i) = 0, \quad (2)$$

где J_1 – первый инвариант тензора напряжений, равный среднему напряжению σ ,

$$J_1 = \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad (3)$$

J_2 – второй инвариант девиатора напряжений, равный с точностью до коэффициента квадрату интенсивности напряжений $\sigma_{\text{и}}$,

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma_{\text{и}}^2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]; \quad (4)$$

J_3 – третий инвариант девиатора напряжений, связанный с углом ψ вида девиатора, или с фазой, определяющей направление октаэдрического касательного напряжения $\tau_{\text{окт}}$ в девиаторной плоскости.

Угол ψ и параметр Лоде–Надаи μ_{σ}

$$\mu_{\sigma} = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \quad (5)$$

связаны зависимостью

$$\mu_{\sigma} = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\psi + \frac{2\pi}{3} \right). \quad (6)$$

Таким образом, третий инвариант девиатора J_3 адекватен параметру μ_{σ} . Следовательно, условие прочности для произвольной системы напряжений (2) можно записать в виде

$$F^*(\sigma, \sigma_{\text{и}}, \mu_{\sigma}, m_i) = 0, \quad (7)$$

а предельные поверхности рассматривать в системе $\sigma - \sigma_{\text{и}} - \mu_{\sigma}$.

Применительно к плоскому напряженному состоянию ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0$) условие (7) без изменения его физического смысла можно упростить путем формального исключения параметра μ_{σ} :

$$\sigma_{\text{и}} = f(\eta), \quad (8)$$

где η – показатель, имеющий смысл “жесткости” напряженного состояния,

$$\eta = \frac{3\sigma}{\sigma_{\text{и}}}. \quad (9)$$

При этом анализ различных напряженных состояний и обработка экспериментальных данных во многих случаях упрощаются, так как обработка

выполняется не в трехмерном пространстве главных напряжений, а в плоскости. Причем система $\sigma_{ii} - \eta$ является более гибкой и не приводит к неоднозначным результатам.

Докажем последнее утверждение. При плоском напряженном состоянии одно из главных напряжений равно нулю. Поэтому, учитывая, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, возможна реализация одного из трех вариантов:

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq 0 \quad (\sigma_3 < 0); \quad (10)$$

$$\sigma_1 \geq 0; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 \leq 0 \quad (\sigma_1 + |\sigma_3| > 0); \quad (11)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0; \quad \sigma_3 = 0 \quad (\sigma_1 > 0). \quad (12)$$

Для первого варианта с учетом (3), (4), (9) имеем

$$\sigma_2 + \sigma_3 = \eta \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2}; \quad 3\sigma = \sigma_2 + \sigma_3. \quad (13)$$

Тогда

$$\eta = -\frac{1+k_1}{\sqrt{k_1^2 - k_1 + 1}}; \quad k_1 = \sigma_2/\sigma_3 \in [0; 1]. \quad (14)$$

Поскольку производная

$$d\eta/dk_1 = (3/2) \frac{k_1 - 1}{(k_1^2 - k_1 + 1)^{3/2}} < 0 \quad \text{при } k_1 \in [0; 1] \quad (15)$$

непрерывна, показатель η в данном случае изменяется в пределах

$$\eta(k_1 = 1) = -2 \leq \eta \leq \eta(k_1 = 0) = -1. \quad (16)$$

Для второго и третьего вариантов аналогично получим

$$\eta = -\frac{1+k_2}{\sqrt{k_2^2 - k_2 + 1}}, \quad k_2 = \sigma_1/\sigma_3 \in (-\infty; 0]; \quad (17)$$

$$d\eta/dk_2 = (3/2) \frac{k_2 - 1}{(k_2^2 - k_2 + 1)^{3/2}} < 0 \quad \text{при } k_2 \in (-\infty; 0]; \quad (18)$$

$$\eta(k_2 = 0) = -1 \leq \eta \leq \eta(k_2 = -\infty) = 1, \quad (19)$$

причем

$$\text{для } k_2 \in [-1; 0] \text{ имеем } \eta \in [-1; 0], \text{ для } k_2 \in [-\infty; -1] - \eta \in [0; 1]; \quad (20)$$

$$\eta = \frac{1+k_3}{\sqrt{k_3^2 - k_3 + 1}}, \quad k_3 = \sigma_2/\sigma_1 \in [0; 1]; \quad (21)$$

$$d\eta/dk_3 = (3/2) \frac{1-k_3}{(k_3^2 - k_3 + 1)^{3/2}} > 0 \quad \text{при } k_3 \in [0; 1]; \quad (22)$$

$$\eta(k_3 = 0) = 1 \leq \eta \leq \eta(k_3 = 1) = 2. \quad (23)$$

Что касается параметра Лоде–Надаи μ_σ (5), то для каждого из трех вариантов он принимает все значения от -1 до $+1$. Действительно, для первого варианта имеем

$$\mu_\sigma = -2k_1 + 1, \quad \text{т.е. } \mu_\sigma(k_1 = 0) = 1, \quad \mu_\sigma(k_1 = 1) = -1; \quad (24)$$

для второго –

$$\mu_\sigma = \frac{2}{1-k_2} - 1, \quad \text{т.е. } \mu_\sigma(k_2 = -\infty) = -1, \quad \mu_\sigma(k_2 = 0) = 1; \quad (25)$$

для третьего –

$$\mu_\sigma = 2k_3 - 1, \quad \text{т.е. } \mu_\sigma(k_3 = 0) = -1, \quad \mu_\sigma(k_3 = 1) = 1. \quad (26)$$

Это означает, что значения σ_i, η однозначно определяют величины главных напряжений, а σ_i, μ_σ – неоднозначно.

Запишем соотношение (13) в виде, общем для всех трех вариантов:

$$\sigma_i + \sigma_j = \eta \sqrt{\sigma_i^2 - \sigma_i \sigma_j + \sigma_j^2}, \quad (27)$$

где i, j могут принимать любые из значений от единицы до трех, причем $i \neq j$.

Из приведенного анализа следует, что для $-2 \leq \eta \leq -1$ получаем $i=2, j=3$, для $-1 \leq \eta \leq 1-i=1, j=3$, для $1 \leq \eta \leq 2-i=1, j=2$. Возникающая неоднозначность при $|\eta|=1$ принципиального значения не имеет. Например, при $|\eta|=1$ из (27) следует

$$\sigma_i \sigma_j = 0. \quad (28)$$

Пусть $\eta=1$. Полагая $i=1, j=3$, получаем $\sigma_1 \sigma_3 = 0$. А поскольку $\sigma_1 \geq \sigma_3, \sigma_1 + |\sigma_3| > 0$ (см. (11)), то $\sigma_3 = 0, \sigma_1 > 0$. Аналогично, принимая $i=1, j=2$, получаем $\sigma_1 \sigma_2 = 0$, а так как $\sigma_1 > 0$ (см. (12)), то $\sigma_2 = 0, \sigma_1 > 0$. В обоих случаях конечный результат один и тот же: $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

При $|\eta| \neq 1$ на основании (27) запишем

$$k_l^2 - 2f_1(\eta)k_l + 1 = 0, \quad 0 \leq k_l \leq \sigma_i/\sigma_j; \quad (29)$$

$$f_1(\eta) = \frac{1 + 0,5\eta^2}{\eta^2 - 1}. \quad (30)$$

Из (27), (29) следует

$$k_l = \begin{cases} f_1(\eta) - \sqrt{f_1^2(\eta) - 1}, & \eta \in [-2; -1] \cup [0; 1] \cup [1; 2]; \\ f_1(\eta) + \sqrt{f_1^2(\eta) - 1}, & \eta \in [-1; 0]; \\ 0, & \eta = \pm 1, \end{cases} \quad (31)$$

причем при $\eta \in [-2, -1]$ $l=1$, при $\eta \in [-1, 1]$ $l=2$, при $\eta \in [1, 2]$ $l=3$.

Пример 1. Рассмотрим физически разные напряженные состояния:

а) равномерное двухосное растяжение – $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$;

б) одноосное сжатие – $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$.

В обоих случаях $\mu_\sigma = +1$, а показатель $\eta = 2$ в случае а) и $\eta = -1$ в случае б).

Пример 2. Значению $\mu_\sigma = 0$ соответствуют три разных показателя: $\eta_1 = -\sqrt{3}$ ($\sigma_2 = 0,5\sigma_3 < 0$, $\sigma_1 = 0$); $\eta_2 = 0$ ($\sigma_1 = -\sigma_3 > 0$, $\sigma_2 = 0$); $\eta_3 = +\sqrt{3}$ ($\sigma_2 = 0,5\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 = 0$). В приведенных примерах абсолютные значения главных напряжений определяются величиной σ_{ii} .

Представляет интерес еще один способ доказательства сформулированного утверждения, отличающийся наглядностью конечного вывода. В работе [1]* установлена связь между третьим инвариантом девиатора напряжений и инвариантами самого тензора:

$$J'_3 = J_3 - J_1 J_2 + \frac{2}{9} J_1^3, \quad (32)$$

где

$$J'_3 = s_{ij}s_{jk}s_{ki}; \quad J_3 = \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}; \quad J_1 = \sigma_{ii} = 3\sigma; \quad J_2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij}; \quad (33)$$

$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ – девиатор напряжений; σ_{ij} – тензор напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера.

Зависимость (32) с учетом равенства [2]

$$|\sigma_{ij}| = \frac{1}{3} J_3 + \frac{1}{6} J_1^3 - \frac{1}{5} J_1 J_2 \quad (34)$$

принимает вид

$$J'_3 = 3|\sigma_{ij}| + \frac{1}{2} J_1 J_2 - \frac{5}{18} J_1^3. \quad (35)$$

С другой стороны, определитель $|\sigma_{ij}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ и при плоском напряженном состоянии равен нулю. Поэтому из (35) следует известная зависи-

* В [1] допущена опечатка: перед последним слагаемым должен стоять знак плюс (см. уравнение (32)).

мость [3] между третьим инвариантом девиатора напряжений, интенсивностью напряжений и средним напряжением:

$$J'_3 = \sigma(\sigma_{\text{и}}^2 - 3\sigma^2), \quad (36)$$

которую легко представить следующим образом:

$$J'_3 = \frac{1}{9} \sigma_{\text{и}}^3 \eta(3 - \eta^2). \quad (37)$$

Известно также, что в общем случае трехосного напряженного состояния имеет место равенство [1, 2]

$$J'_3 = \frac{2}{9} \sigma_{\text{и}}^3 \cos(3\psi). \quad (38)$$

Из (37) и (38) следует, что при плоском напряженном состоянии угол вида девиатора напряжений ψ определяется зависимостью

$$\psi = \frac{1}{3} \arccos[0,5\eta(3 - \eta^2)]. \quad (39)$$

Несложно показать, что

$$\mu_{\sigma} = \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right). \quad (40)$$

Ю. Н. Работновым [1] используется безразмерный инвариант ξ , равный

$$\xi = \frac{\sqrt{6} J'_3}{(J'_2)^{3/2}} = \cos(3\psi). \quad (41)$$

В работах А. А. Ильюшина фигурирует третий инвариант направляющего тензора напряжений D , равный $\xi/\sqrt{54}$.

На рис. 1 представлены графики, рассчитанные по соотношениям (39)–(41). Видно, что величины ψ , μ_{σ} , ξ однозначно определяются показателем η . Обратное неверно.

Преимущества предложенного подхода проиллюстрируем путем анализа известных экспериментальных данных [4], полученных при испытании трубчатых образцов из серого чугуна [5]. Результаты опытов обрабатывали по двухпараметрическим критериям Баландина и Писаренко–Лебедева для структурно-неоднородных материалов, к которым относится серый чугун:

$$\sigma_{\text{и}}^2 = A + B\sigma; \quad (42)$$

$$\sigma_{\text{и}} = a + b\sigma_1 0,75^{1-\eta}. \quad (43)$$

Выразив в соотношениях (42), (43) инварианты $\sigma_{\text{и}}$, σ через главные нормальные напряжения, а константы A, B, a, b через предельные напряжения при растяжении $\sigma_{\text{р}}$ и сжатии $\sigma_{\text{с}}$, получим:

для критерия Баландина

$$\begin{aligned} &\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \\ &+ (\sigma_{\text{с}} - \sigma_{\text{р}})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{р}}\sigma_{\text{с}}; \end{aligned} \quad (44)$$

для критерия Писаренко–Лебедева –

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma_{\text{р}}}{\sqrt{2}\sigma_{\text{с}}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} + \\ &+ \left(1 - \frac{\sigma_{\text{р}}}{\sigma_{\text{с}}}\right) \sigma_1 0,75^{1-\eta} = \sigma_{\text{р}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Отметим, что многие известные критерии являются частными случаями критериев (44), (45).

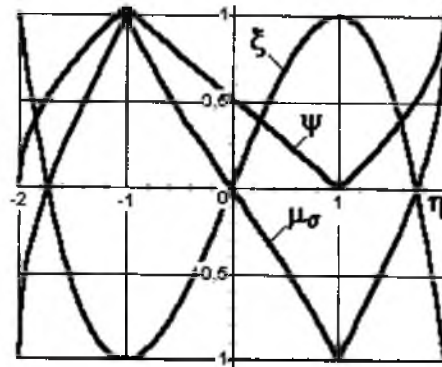


Рис. 1. Зависимости между инвариантами при плоском напряженном состоянии.

На рис. 2 приведено сопоставление экспериментальных и расчетных данных в традиционном пространстве главных напряжений.

Путем преобразований уравнений (44), (45) в координатах $\sigma_{\text{и}} - \eta$ получим:

для критерия Баландина

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{1}{2}(\sigma_{\text{р}} - \sigma_{\text{с}})\eta + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_{\text{р}} - \sigma_{\text{с}})\eta\right)^2 + \sigma_{\text{р}}\sigma_{\text{с}}}; \quad (46)$$

для критерия Писаренко–Лебедева –

$$\sigma_{и} = \frac{\sigma_p}{\frac{\sigma_p}{\sigma_c} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \right) \left\{ \eta + 2 \cos \left[\frac{1}{3} \arccos(0,5 \eta (3 - \eta^2)) \right] \right\}} \cdot 0,75^{1-\eta}. \quad (47)$$

Эти соотношения, последнее из которых справедливо только применительно к плоскому напряженному состоянию, можно трактовать как зависимость интенсивности напряжений от “жесткости” напряженного состояния, характеризуемой показателем η .

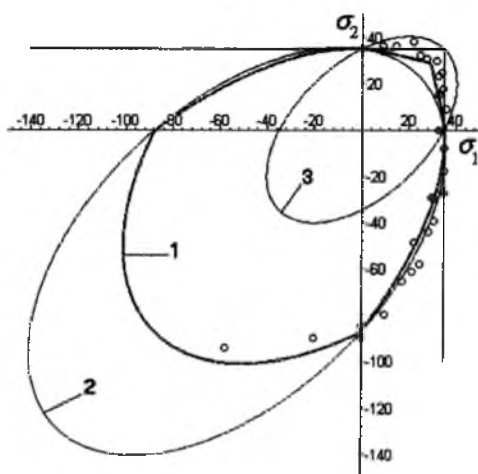


Рис. 2. Представление расчетных и экспериментальных данных по прочности серого чугуна в традиционном пространстве главных напряжений: 1 – условие Писаренко–Лебедева (45); 2 – условие Баландина (44); 3 – условие Мизеса; вертикальная и горизонтальная прямые – первая теория прочности.

На рис. 3 в координатах $\sigma_{и} - \eta$ представлены те же экспериментальные данные, что и на рис. 2. Поверхности длительной прочности

$$t_{*c} = t_{*c}(\sigma_i, \eta), \quad (48)$$

где t_{*c} – время до разрушения, построенные на основе известных экспериментальных данных, приведены в работах авторов [6, 7].

Сопоставление данных на рис. 2 и 3 показывает, что предлагаемая трактовка условий предельного состояния имеет очевидные преимущества в сравнении с классической. Прежде всего зависимость $\sigma_{и} = \sigma_{и}(\eta)$ представляется однозначной функцией, что облегчает визуальную оценку результатов и сравнение аналитических и экспериментальных данных. Например, из рис. 3 более четко видно, что условия Баландина и Писаренко–Лебедева имеют один и тот же порядок соответствия экспериментальным данным в области $-1 \leq \eta \leq 1$. В областях $-2 \leq \eta < -1$ и $1 \leq \eta < 2$ условие Баландина приводит к серьезному, даже качественному искажению, а погрешность превышает 60%.

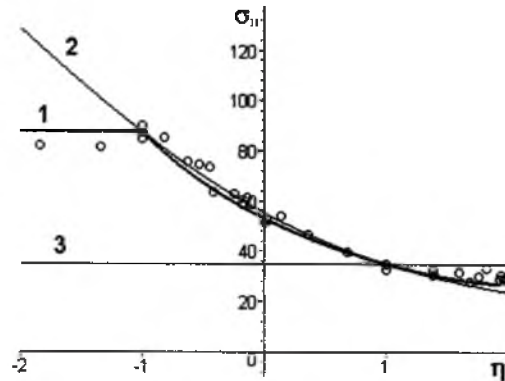


Рис. 3. Представление расчетных и экспериментальных данных по прочности чугуна в виде зависимости интенсивности напряжений от показателя “жесткости” напряженного состояния: 1 – условие Писаренко–Лебедева (47); 2 – условие Баладина (46); 3 – условие Мизеса.

Использование критериев в виде $\sigma_{и} = \sigma_{и}(\eta)$ исключает возможные ошибки и свободно от условностей, имеющих место при анализе условий предельного состояния в пространстве главных напряжений, так как система σ_1, σ_2 справедлива только для первого квадранта. Оси напряженных состояний четвертого квадранта должны иметь наименование σ_1, σ_2 , третьего квадранта – σ_2, σ_3 , второй квадрант вообще не используется.

При объемном напряженном состоянии одного показателя η уже недостаточно. Казалось бы естественным введение в этом случае параметра Лоде–Надаи μ_σ или угла вида девиатора ψ , однако эти параметры не остаются неизменными в условиях плоского напряженного состояния. Выбрав с учетом (39) в качестве второго показателя v соотношение в виде

$$v = \cos(3\psi_\sigma) - 0,5\eta(3 - \eta^2), \quad (49)$$

критерии предельного состояния для произвольной системы напряжений можно свести к форме

$$\sigma_{и} = f(\eta, v), \quad (50)$$

причем показатель v тождественно равен нулю при плоском напряженном состоянии. Можно показать, что к результату (49) мы пришли бы, приняв

$$v = \frac{|\sigma_{ij}|}{(\sigma_{и}/3)^3}. \quad (51)$$

Следует заметить, что случай трехосного напряженного состояния требует более глубокого анализа.

Предложенная форма геометрической интерпретации критериев предельного состояния не исключает использования классических подходов. В отдельных случаях благодаря отмеченным выше преимуществам она, несомненно, может оказаться более информативной и удобной.

Резюме

Запропоновано критерії міцності формулювати у вигляді залежності інтенсивності напружень від безрозмірного інваріанта η , який дорівнює відношенню першого інваріанта тензора напружень до інтенсивності напружень. Представлено доведення коректності використання інваріанта η у випадку плоского напруженого стану. На прикладах зіставлення розрахункових і експериментальних даних доведено переваги запропонованої форми подання умов граничного стану порівняно з класичним підходом. Установлено можливі шляхи розповсюдження описаного підходу стосовно об'ємного напруженого стану.

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
3. *Шевченко Ю. Н.* Термовязкоупругопластические процессы деформирования элементов твердого тела (обзор) // Прикл. механика. – 1994. – № 3. – С. 3 – 24.
4. *Павлов П. А.* Механические состояния и прочность материалов. – Л.: Из-во Ленинград. ун-та, 1979. – 176 с.
5. *Coffin L. F.* The flow and fracture of a brittle material // J. Appl. Mech. – 1950. – 17, No. 3. – P. 233 – 248.
6. *Лебедев А. О., Михалевич В. М.* До теорії тривалої міцності // Доп. НАН України. – 1998. – № 5. – С. 57 – 62.
7. *Михалевич В. М.* Тензорні моделі накопичення пошкоджень. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 1998. – 195 с.

Поступила 30. 09. 2002