

## Расчет напряженного состояния и оценка прочности режущего инструмента с тонким покрытием

А. И. Олейников<sup>а</sup>, А. О. Кузьмин<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

<sup>б</sup> Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, Комсомольск-на-Амуре, Россия

*Предложена регуляризация расчета напряжений и показателя прочности методом граничных элементов, позволяющая численно исследовать тела с тонкими, в том числе многослойными и композиционными покрытиями. Приводятся результаты расчета и исследования режущего инструмента из твердого сплава ВК6 с монопочтием TiN толщиной 6 мкм.*

**Ключевые слова:** покрытие, напряжения, прочность, метод граничных элементов, регуляризация.

### Обозначения

$N$	– число фаз $\Omega_n$ кусочно-однородного тела $\Omega$ с внешней поверхностью $\partial\Omega$ и поверхностью $\Sigma_{n,n}$ раздела фаз $\Omega_n$ и $\Omega_m$
$P_x, P_y$	– компоненты вектора нагрузки
$u_x, u_y$	– компоненты вектора перемещения
$\varepsilon_{xx}^{(n)}, \varepsilon_{yy}^{(n)}, \varepsilon_{xy}^{(n)}$	– компоненты тензора деформаций $n$ -й фазы
$\sigma_{xx}^{(n)}, \sigma_{yy}^{(n)}, \sigma_{xy}^{(n)}$	– компоненты тензора напряжений $n$ -й фазы
$G^{(n)}, \nu^{(n)}$	– модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала $n$ -й фазы
$H_{ij,ik}, I_{ik}$	– фундаментальные решения уравнений теории упругости для бесконечной плоскости
$\bar{e}_x, \bar{e}_y$	– базис прямоугольной декартовой системы координат
$f_x^{(n)}, f_y^{(n)}$	– искомые фиктивные нагрузки для $n$ -й фазы
$n_x, n_y$	– компоненты единичной нормали к поверхности $\Omega_n$
$q, q_0$	– точки граничного контура
$\ \dots\ $	– среднеквадратичное отклонение
$\alpha, \alpha_p, \alpha_{опт}$	– параметры регуляризации
$A, A^*, E$	– соответственно матрица, сопряженная матрица и единичная матрица
$b$	– вектор-столбец
$x^\alpha$	– регуляризованное приближение
$\nu_0, \nu_n, E_0, E_n$	– коэффициент Пуассона и модуль Юнга соответственно основы и покрытия

- $\sigma, \tau, \sigma_1, \tau_{\max}, \sigma_B$  – соответственно среднее нормальное напряжение, интенсивность касательных напряжений, максимальное главное напряжение, максимальное касательное напряжение, предел прочности при растяжении
- $\sigma_\eta$  – критериальный показатель прочности Лебедева–Писаренко

**Введение.** При расчете на прочность разных элементов конструкций и оборудования, пар трения или инструментов с покрытиями необходимо учитывать распределение напряжений в композиции основа–покрытие.

Влияние различных характеристик упругости основы и покрытия на напряженное состояние в условиях одноосного растяжения основы рассмотрено аналитически в [1–4].

При исследовании тел с покрытиями широко используется моделирование покрытия пластиной или оболочкой [5, 6]. Однако выбор варианта механической модели для такого описания поведения покрытия неоднозначен и может существенно повлиять на результаты расчета, приводя к некорректностям решения, к сильному искажению истинной картины распределения напряжений [5, 7]. Для анализа напряжений в материалах с покрытием использовались графовая модель упругого тела [8, 9] и метод конечных элементов [10, 11]. Из-за очень малой толщины покрытия по сравнению с характерным размером исследуемой области соответствующая этому методу система линейных уравнений имеет слишком высокий порядок и часто оказывается неадекватной.

Метод граничного элемента (МГЭ) требует дискретизации только границ и может приводить к системам существенно более низкого порядка. Для кусочно-однородных тел с тонкими слоями это преимущество граничных элементов перед конечными сильно уменьшается, так же как и адекватность системы. Однако достоинство этого метода, которое заключается в эффективности и точности расчета полей напряжений с высокими градиентами, остается. Именно в таких высокоградиентных полях чаще всего приходится работать инструментам с покрытиями.

В данной работе предпринята попытка разработать схему реализации метода граничного элемента, которая позволит проводить расчет напряжений в основе и в тонком, в том числе многослойном и композиционном покрытии [12–15].

**Математическая постановка задачи и гранично-интегральная формулировка.** Задача теории упругости для материалов с покрытиями основывается на рассмотрении кусочно-однородного тела  $\Omega$ , состоящего из однородных фаз  $\Omega_n$ , так что  $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$  и  $\Sigma_{n,m} = \Omega_n \cap \Omega_m$  – поверхность раздела фаз  $\Omega_n$  и  $\Omega_m$ ,  $n, m = 1, \dots, N$ . Описание напряженно-деформированного состояния тела  $\Omega$  осуществляется вектором перемещения  $\vec{U}(u_x, u_y)$ , тензорами деформаций  $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$  и напряжений  $\sigma = (\sigma_{ij})$  для каждой фазы.

Основными соотношениями при плоской деформации являются уравнения равновесия фаз и выражения для деформаций и напряжений:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(n)}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(n)}}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(n)} = \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy}^{(n)} = \frac{\partial u_y^{(n)}}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy}^{(n)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(n)}}{\partial x} \right); \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{(n)} = \frac{2G^{(n)}}{1-2\nu^{(n)}} [(1-\nu^{(n)})\varepsilon_{xx}^{(n)} + \nu^{(n)}\varepsilon_{yy}^{(n)}]; \\ \sigma_{yy}^{(n)} = \frac{2G^{(n)}}{1-2\nu^{(n)}} [(1-\nu^{(n)})\varepsilon_{yy}^{(n)} + \nu^{(n)}\varepsilon_{xx}^{(n)}]; \\ \sigma_{xy}^{(n)} = 2G^{(n)}\varepsilon_{xy}^{(n)}; \\ \sigma_{zz}^{(n)} = \nu^{(n)}(\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{yy}^{(n)}). \end{cases} \quad (3)$$

В выражениях (2), (3)  $u_x^{(n)}, u_y^{(n)}$  – перемещения соответственно по осям  $x$  и  $y$  прямоугольной декартовой системы координат с базисом  $(\bar{e}_x, \bar{e}_y)$ ;  $G^{(n)}$  и  $\nu^{(n)}$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала  $n$ -й фазы. Постановка задачи завершается формулировкой граничных условий на внешней поверхности тела  $\partial\Omega$  и условий на поверхностях раздела  $\Sigma_{n,m}$ . Если смежные фазы работают совместно, то векторы перемещений и напряжений при переходе через поверхности раздела изменяются непрерывно и

$$\bar{U}^n = \bar{U}^m, \quad \bar{P}^n = \bar{P}^m \quad \text{на } \Sigma_{n,m}, \quad (4)$$

где  $\bar{U} = u_x \bar{e}_x + u_y \bar{e}_y$ ;  $\bar{P} = (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) \bar{e}_x + (\sigma_{yy} n_y + \sigma_{xy} n_x) \bar{e}_y$ ;  $\bar{n} = (n_x, n_y)$  – нормаль в точке поверхности  $\Sigma_{n,m}$ .

Благодаря фундаментальному аналитическому решению  $H_{ij;k}(Q, q_0)$ ,  $I_{ik}(Q, q_0)$  задачи (1)–(4) в случае однородной бесконечной плоскости [16] напряжения и смещения рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(n)}(Q) &= \int_{\partial\Omega^{(n)}} H_{ijk}^{(n)}(Q, q_0) f_k^{(n)}(q_0) dl; \\ u_i^{(n)}(Q) &= \int_{\partial\Omega^{(n)}} I_{ik}^{(n)}(Q, q_0) f_k^{(n)}(q_0) dl, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $H_{ijk}^{(n)}(Q, q_0)$ ,  $I_{ik}^{(n)}(Q, q_0)$  – функции влияния Грина ( $i, j, k = x, y$ ), которые описывают напряжения и смещения во внутренней точке  $Q$   $n$ -й фазы ( $Q \notin \partial\Omega^{(n)}$ ,  $Q \notin \Sigma_{n,m}$ ), вызванные действием единичной силы, приложенной в точке  $q_0$  граничного или контактного контура  $\partial\Omega^{(n)}$ ,  $q_0 \notin \partial\Omega^{(n)}$ ,

$\partial\Omega^{(n)} = \partial\Omega^{(n)} + \Sigma_{n,m}^{\pm}$ ,  $n, m = 1, 2, \dots, N$ . При этом граничные элементы, расположенные на сторонах  $\Sigma_{n,m}^+$  и  $\Sigma_{n,m}^-$ , обращенных соответственно к фазе  $\Omega^{(n)}$  и смежной фазе  $\Omega^{(m)}$  одного и того же контакта  $\Sigma_{n,m}$ , совпадают друг с другом. Функции  $f_k^{(n)}(q_0)$ , называемые фиктивными нагрузками, находятся из системы ( $n, m = 1, \dots, N$ ) уравнений [17, 18]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} f_k^{(n)}(q) + \int_{\partial\Omega^{(n)}} H_{ijk}^{(n)}(q, q_0) n_j(q) f_k^{(n)}(q_0) dl_{q_0} = P_k^{(n)}(q); \\ \int_{\partial\Omega^{(n)}} I_{ik}^{(n)}(q, q_0) f_k^{(n)}(q_0) dl_{q_0} = u_k^{(n)}(q); \\ \frac{1}{2} f_k^{(n)}(q) + \int_{\Sigma_{n,m}^+} H_{ijk}^{(n)}(q, q_0) n_j(q) f_k^{(n)}(q_0) dl_{q_0} - \frac{1}{2} f_k^{(m)}(q) + \\ + \int_{\Sigma_{n,m}^-} H_{ijk}^{(n)}(q, q_0) n_j(q) f_k^{(m)}(q_0) dl_{q_0} = 0; \\ \int_{\Sigma_{n,m}^+} I_{ik}^{(n)}(q, q_0) f_k^{(n)}(q_0) dl_{q_0} - \int_{\Sigma_{n,m}^-} I_{ik}^{(m)}(q, q_0) f_k^{(m)}(q_0) dl_{q_0} = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Первые два уравнения (6) отвечают корректно заданным граничным условиям  $P_x^{(n)}, P_y^{(n)}$  и  $u_x^{(n)}, u_y^{(n)}$  на внешней поверхности тела  $\Omega^{(n)}$ , два других являются равенствами (4), записанными покомпонентно.

**Метод решения интегральных уравнений для тел с тонкими слоями.**

В случае численного решения система интегральных уравнений (6) с использованием квадратурной формулы прямоугольников приводится к системе линейных алгебраических уравнений [13]

$$Ax = b. \quad (6')$$

При решении задач с покрытиями на внешней границе обычно задается только вектор усилия, и второе уравнение системы (6) не используется. Однако на внутренних контактах приходится иметь дело с последним уравнением системы (6), которое является интегральным уравнением 1-го рода. Это обстоятельство и достаточно высокий порядок системы (6') в случае тонкого покрытия может приводить к плохой обусловленности.

Предлагаемая схема решения (6') основана на методе регуляризации Тихонова [19]. Этот метод может быть сформулирован в виде вариационной задачи минимизации функционала:

$$f(x) = \|Ax - b\|^2 + \alpha \|x\|^2, \quad (7)$$

где  $\alpha > 0$  – параметр регуляризации [19].

Исходная задача (6') заменена близкой при малых  $\alpha$  к ней задачей (7). Решение последней относительно исходной является регуляризующим и устойчивым [19].

Алгоритм минимизации функционала (7) реализован в комплексе программ расчета напряженного состояния тел с покрытиями [14, 15]. Он содержит внешний и внутренний циклы, которые обеспечивают выполнение условия, свидетельствующего о получении регуляризованного решения системы (6').

Во внешнем цикле формируется сходящаяся к нулю последовательность  $\{\alpha_p\}$ ,  $\alpha_p = \mu\alpha_{p-1}$ ,  $p=1, 2, \dots$ ;  $\mu < 1$ , на элементах которой производится минимизация функционала (7). После выбора очередного  $\alpha = \alpha_p$  следует переход на внутренний цикл. В этом цикле обеспечивается поиск минимума функционала (7) при закреплённой величине  $\alpha = \alpha_p$ . Этот минимум является решением системы

$$(AA^* + \alpha_p E)x = A^* b + \alpha_p, \quad (8)$$

где  $A^*$  – сопряжённая матрица  $A$ ;  $E$  – единичная матрица.

Система (8) эффективно решается методом квадратного корня. Далее следует переход на внешний цикл, и процесс повторяется.

В качестве критериев выбора регуляризованного решения в комплексе используются критерий Тихонова–Гласко [20]:

$$\alpha_{\text{опт}} = \min_p \max_j \left| x_j^{\alpha_{p+1}} - x_j^{\alpha_p} \right| \quad (9)$$

и критерий невязки:

$$\|Ax^\alpha - b\| \leq \varepsilon, \quad (10)$$

где  $\varepsilon > 0$  – заданное число.

**Расчет распределения напряжений в композиции основа–тонкое покрытие.** В качестве примера использования разработанной схемы решена задача о распределении напряжений в режущем инструменте с монопокрытием. Результаты тестирования программы расчета приведены в Приложении. Контактные нагрузки на рабочей поверхности инструмента (рис. 1) задавали исходя из экспериментальных данных [21] в виде уравнений по задней грани инструмента:

$$\sigma_{yy}(x) = 0, \quad \sigma_{xy}(x) = 0 \quad \text{при } x > 0,5 \text{ мм};$$

$$\sigma_{yy}(x) = 686 - 1372x, \quad \sigma_{xy}(x) = 490 - 980x \quad \text{при } 0,5 \text{ мм} \geq x > 0$$

и аналогично по передней грани инструмента:

$$\sigma_{xx}(y) = 3528, \quad \sigma_{xy}(y) = 480,2 \quad \text{при } 0,1 \text{ мм} \geq y > 0;$$

$$\sigma_{xx}(y) = 397,782 \left( \frac{4,134}{y} - 1 \right)^{0,439}, \quad \sigma_{xy}(y) = 480,2 \quad \text{при } 1,3 \text{ мм} \geq y > 0,1 \text{ мм};$$

$$\sigma_{xx}(y) = 397,782 \left( \frac{4,134}{y} - 1 \right)^{0,439}, \quad \sigma_{xy}(y) = 480,2 \frac{4,134 - y}{2,744}$$

при  $4,13 \text{ мм} \geq y > 1,3 \text{ мм};$

$$\sigma_{xx}(y) = 0, \quad \sigma_{xy}(y) = 0 \quad \text{при } 4,13 \text{ мм} \geq y > 1,3 \text{ мм}.$$

Из этих результатов и рис. 1 видно, что характерные размеры исследуемой области вблизи режущей кромки можно взять меньше, чем 1 мм. Это подтверждается данными рис. 2, где приведены расчетные картины распределения напряжения  $\sigma_{xx}$  в областях размером  $1,0 \times 1,0$  мм и  $0,2 \times 0,2$  мм (зоны сингулярности у границ выделены, характеристики упругости  $E_0 = 627,2$  ГПа и  $\nu_0 = 0,21$  соответствуют твердому сплаву ВК6). Характерной особенностью распределения напряжений  $\sigma_{xx}$  является их концентрация на поверхности задней грани на расстоянии 0,1 мм от режущей кромки, что соответствует представленным в [21] экспериментальным данным. Картина распределения вертикальных  $\sigma_{yy}$  и касательных  $\sigma_{yx}$  напряжений (на рис. 2 не показаны) также согласуется с полученной экспериментально [21, 22].

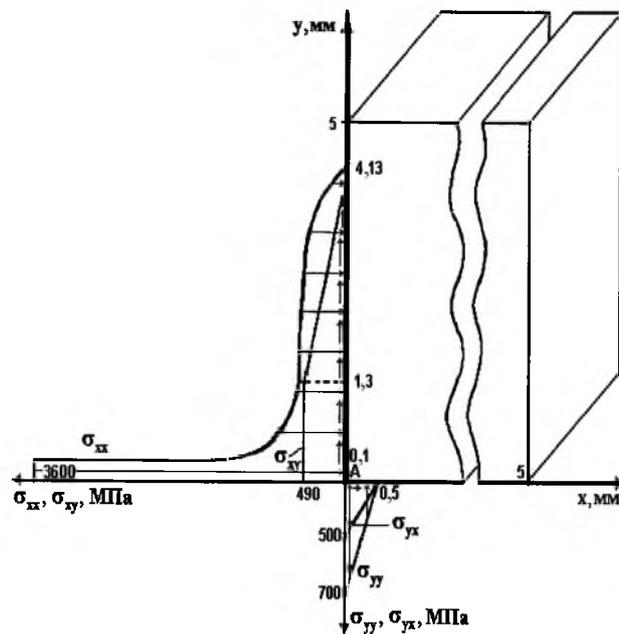
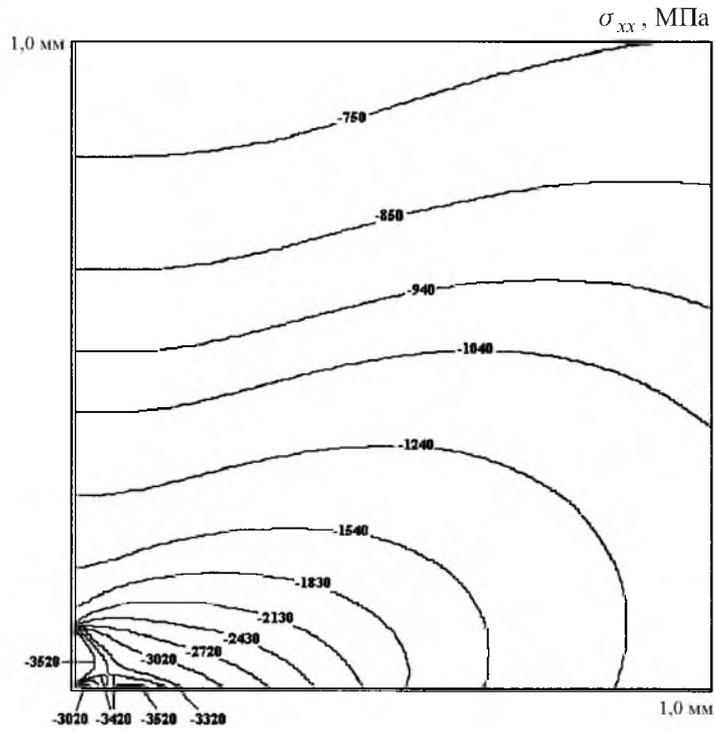
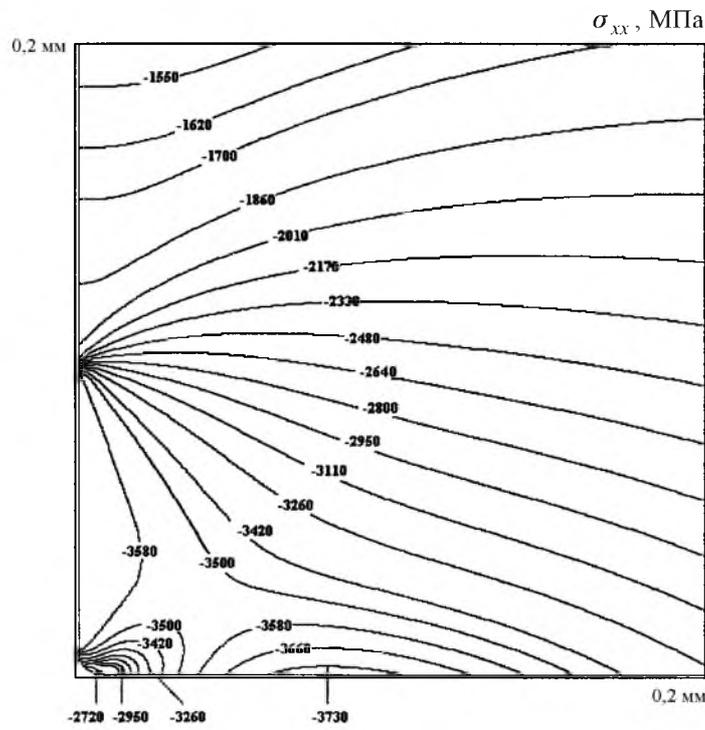


Рис. 1. Расчетная схема задачи о распределении напряжений в режущем инструменте.

Распределение осевых напряжений  $\sigma_{xx}$  в композиции ВК6–TiN приведено на рис. 3. Толщина покрытия из нитрида титана равна 6 мкм. Его упругие характеристики:  $E_{TiN} = 431,2$  ГПа,  $\nu_{TiN} = 0,25$  [23].



а



б

Рис. 2. Распределение напряжений  $\sigma_{xx}$  в области режущей кромки из сплава ВК6: а, б – области соответственно размером  $1,0 \times 1,0$  и  $0,2 \times 0,2$  мм.

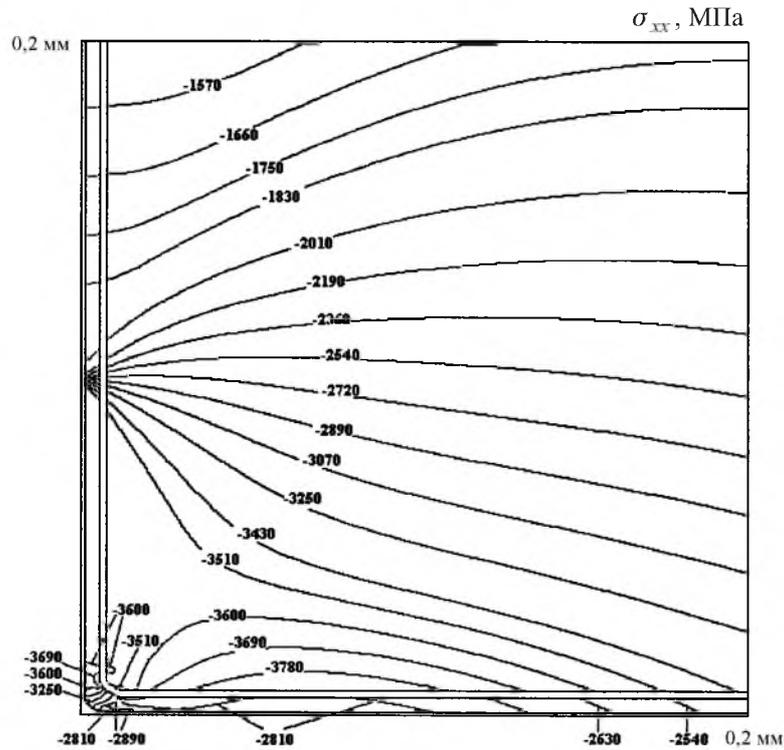


Рис. 3. Распределение напряжений  $\sigma_{xx}$  в области режущей кромки из композиции ВК6–TiN с покрытием из нитрида титана толщиной 6 мкм.

Из рис. 2,б и 3 видно, что такое покрытие снижает концентрацию осевых напряжений  $\sigma_{xx}$  на задней грани инструмента на 23% за счет их увеличения в основе на контакте с покрытием.

**Расчет распределения показателя прочности.** Задача расчета прочности основы из твердого сплава основывается на критерии Лебедева–Писаренко [24]. В работе [24] обнаружены критерии для сопоставления характеристик прочности материала при простейших нагружениях с его сопротивлением пластическому деформированию и разрушению в условиях действия сложной системы напряжений. Установлены также параметры напряженного состояния, от которых зависит интенсивность процессов, обуславливающих исчерпание прочности материала. Учтены статистические аспекты прочности и особенности поведения материалов в условиях повышенных температур. Например, для твердых сплавов WC–Co, которые представляют собой основу многих инструментов, критерий прочности до температуры 600°C получен в виде

$$\sigma_{\eta} \cong 0,24\tau + 0,76\sigma_1 0,8^{1-3\sigma/\tau} \leq \sigma_B, \quad (11)$$

где  $\sigma_1$  – максимальное главное напряжение;  $\tau$  – интенсивность касательных напряжений;  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  – среднее нормальное напряжение;  $\sigma_B$  – предел прочности при растяжении,  $\sigma_B = \sigma_B(T)$ ,  $\sigma_B(600^\circ\text{C}) \cong 735$  МПа.

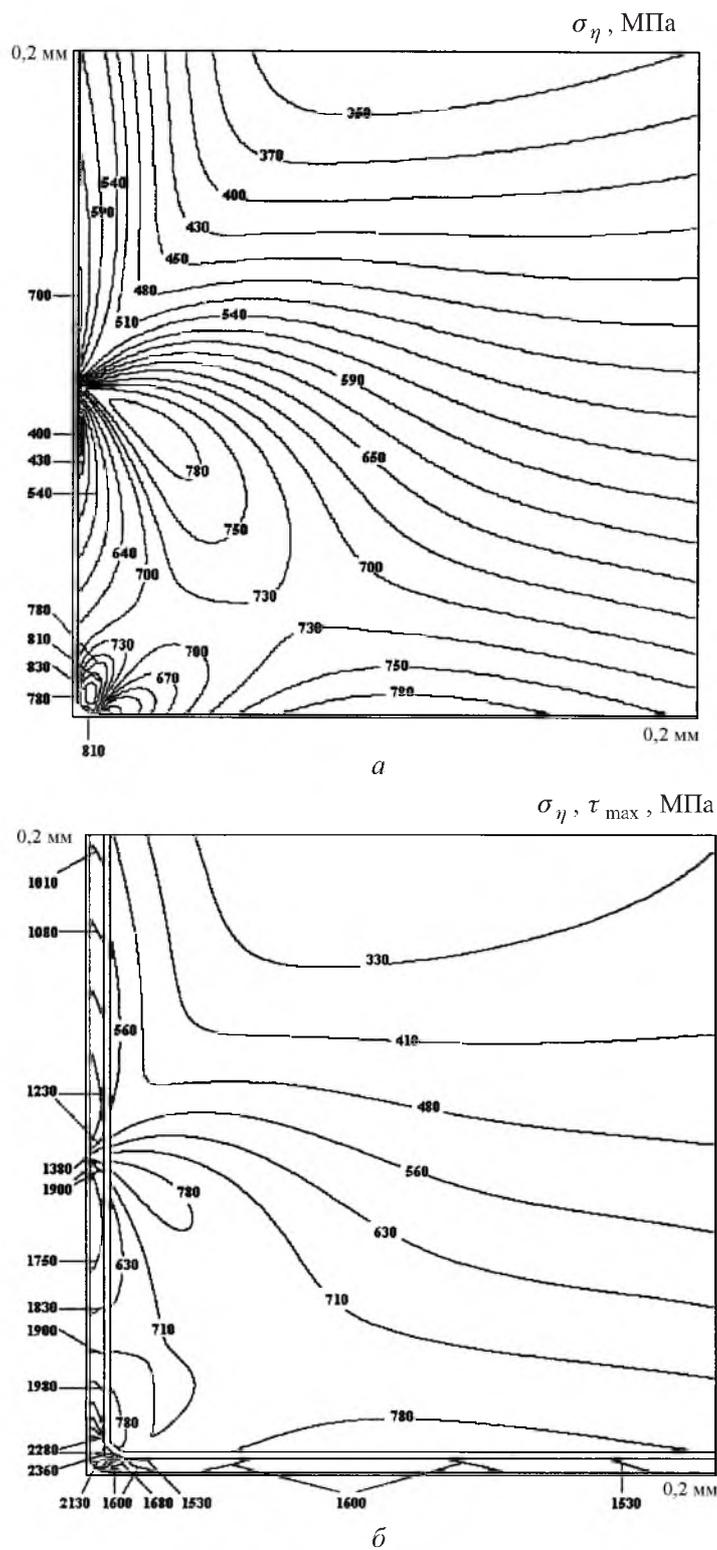


Рис. 4. Распределение напряжений  $\sigma_{\eta}$  и  $\tau_{\max}$  в области режущей кромки из сплава ВК6: а – без покрытия; б – с покрытием из нитрида титана толщиной 6 мкм.

Широкая экспериментальная проверка критерия Лебедева–Писаренко показала его 92–95%-ную достоверность для многих твердых сплавов и некоторых других материалов в условиях сложного напряженного состояния. Таким образом, критерий практически верно отражает условия предельного состояния этих сплавов при сложном однородном напряженном состоянии.

Роль покрытия в распределении в основе критериальной величины  $\sigma_\eta$  иллюстрирует рис. 4. В углу, напротив режущей кромки данное покрытие увеличивает запас прочности основы на 7%. На рис. 4,б в покрытии (в отличие от основы) показаны линии равных значений максимального касательного напряжения  $\tau_{\max}$ , которое по экспериментальным данным [25] играет роль критерия разрушения для TiN.

Из зон концентрации  $\sigma_\eta$  в основе и  $\tau_{\max}$  в покрытии может начаться разрушение. Развитие его обычно начинается из этих зон в направлении минимального градиента полей напряжений. Из рис. 4 следует, что покрытие способствует более равномерному распределению критериальной величины  $\sigma_\eta$ , снижая тем самым вероятность развития разрушения. Это согласуется с экспериментальными данными [26], где установлено уменьшение деформации до разрушения с увеличением толщины покрытия.

Таким образом, предложенная схема реализации метода граничного элемента позволяет эффективно исследовать напряженное состояние и запас прочности упругих тел с тонкими покрытиями.

#### Приложение.

**Контрольный пример и тестирование программы расчета.** Тестирование разработанного в Центре вычислительного моделирования и информатики Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета [13] программного комплекса проводилось при решении задачи о напряженном состоянии основы и покрытия внутренней поверхности цилиндрического отверстия, расположенного в бесконечном пространстве и находящегося под действием давления  $p$  (рис. 5). Радиус отверстия  $r_0 = 1$  мм, толщина покрытия 0,05 мм. Из рис. 6 следует, что совпадение численного (крестики) и точного аналитического решения [18] (сплошные линии) является вполне удовлетворительным (для материала покрытия: коэффициент Пуассона  $\nu_\Pi = 0,25$ , модуль упругости  $E_\Pi = 431,2$  ГПа, для материала основы:  $\nu_o = 0,21$ ,  $E_o = 627,2$  ГПа). Средняя длина граничного элемента в данной задаче составляет 0,01 мм. В пределах этого расстояния вблизи контура отверстия и границы между основой и покрытием численное решение ввиду наличия зоны сингулярности необходимо экстраполировать (зона сингулярности выделена полосой между прямыми, параллельными границе между основой и покрытием).

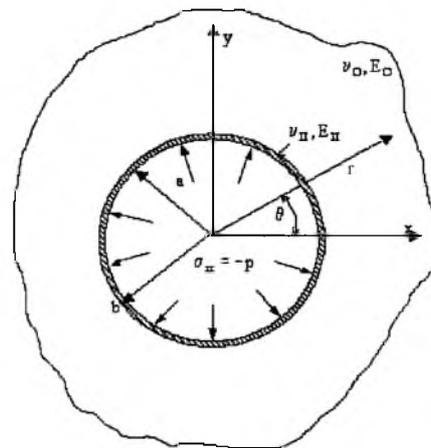


Рис. 5. Расчетная схема задачи о покрытии отверстия.

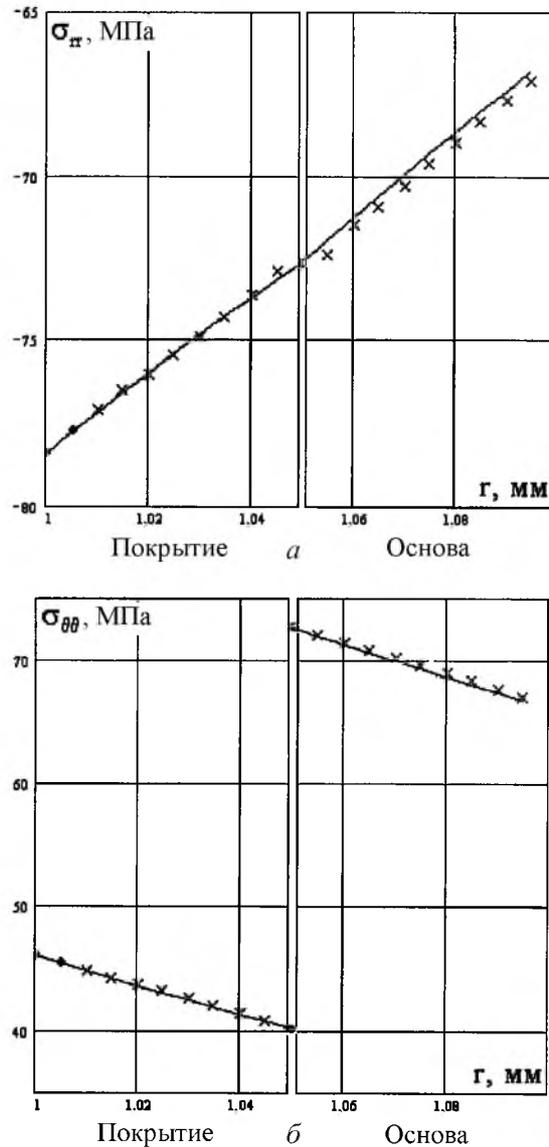


Рис. 6. Распределение радиальных (а) и окружных (б) напряжений у отверстия с покрытием.

## Резюме

Запропоновано регуляризацию розрахунку напружень та показника міцності методом граничних елементів, що дозволяє проводити числове дослідження тіл із тонкими, у тому числі багат шаровими композиційними покриттями. Наведено результати розрахунку і дослідження різального інструменту з твердого сплаву ВК6 з монопокриттям TiN товщиною 6 мкм.

1. Уманский Э. С., Ляшенко Б. А. Условия адгезионной и когезионной равнопрочности жаростойких покрытий // Косм. исследования на Украине. – 1975. – Вып. 6. – С. 58 – 64.

2. Долгов Н. А., Ляшенко Б. А., Руцицкий Я. Я. и др. Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно-деформированное состояние композиции. Сообщ. 1. К оценке напряжений растяжения в покрытии // Пробл. прочности. – 1995. – № 9. – С. 37 – 43.
3. Долгов Н. А., Ляшенко Б. А., Руцицкий Я. Я. и др. Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно-деформированное состояние композиции. Сообщ. 2. Распределение напряжений растяжения в покрытии // Там же. – 1996. – № 5. – С. 63 – 67.
4. Долгов Н. А., Ляшенко Б. А., Руцицкий Я. Я. и др. Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно-деформированное состояние композиции. Сообщ. 3. Распределение касательных и нормальных напряжений в покрытии // Там же. – 1997. – № 6. – С. 66 – 70.
5. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
6. Шевчук В. А. Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями // Пробл. прочности. – 2000. – № 1. – С. 136 – 150.
7. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
8. Кузовков Е. Г. Применение метода элементарных ячеек для численного решения задач теории упругости. Сообщ. 1. Общие положения метода элементарных ячеек // Пробл. прочности. – 1982. – № 12. – С. 104 – 107.
9. Кузовков Е. Г. Применение метода элементарных ячеек для численного решения задач теории упругости. Сообщ. 2. Сетевая модель упругого тела // Там же. – 1983. – № 2. – С. 37 – 43.
10. Кобельский С. В., Куриат Р. И., Кравченко В. И., Квитка А. Л. Методика и исследование пространственного термонапряженного состояния моделей лопаток турбин с покрытиями при термоциклическом нагружении // Там же. – 1999. – № 6. – С. 56 – 64.
11. Кобельский С. В., Куриат Р. И., Кравченко В. И., Квитка А. Л. Численное моделирование термонапряженного состояния моделей лопаток ГТД с теплозащитными покрытиями и оценка их ресурса: Тр. Междунар. конф. “Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций”. – Киев: ИПП НАН Украины. – 2000. – Т. 2. – С. 795 – 800.
12. Олейников А. И., Кислая В. В., Грибанова Л. П. Применение метода граничных интегральных уравнений для решения задач горной геомеханики // Аналитические методы и применение ЭВМ в механике горных пород. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1982. – С. 103 – 105.
13. Олейников А. И. и др. Расчет напряжений в породных массивах методом граничных интегральных уравнений. – Кривой Рог: НИГРИ, 1982. – 24 с.
14. Олейников А. И., Кузьмин А. О. Применение численного метода граничных элементов к решению кусочно-однородных задач линейной теории упругости // Синергетика. Самоорганизующиеся процессы в системах и технологиях: Материалы междунар. науч. конф. (Комсомольск-на-Амуре, 21–26 сент. 2000 г.). – Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре гос. техн. ун-т, 2000. – С. 122 – 125.

15. Олейников А. И., Кузьмин А. О. Регуляризация расчета напряженного состояния кусочно-однородных упругих материалов // Математические методы в технике и технологиях. – ММТТ-14: Тр. междунар. науч. конф. – Смоленск, 2001. – С. 123 – 124.
16. Love A. E. H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th edn. – New York: Dover, 1944. – 508 p.
17. Altiero N. J. and Sikarskie D. L. An integral equation method applied to penetration problems in rock mechanics // Boundary-Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics. – New York, 1975. – P. 152 – 182.
18. Crouch S. L. and Starfield A. M. Boundary Element Method in Solid Mechanics. – Boston: George Allen & Unwin, 1983. – 328 p.
19. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
20. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев: Наук. думка, 1978. – 228 с.
21. Остафьев В. А. Расчет динамической прочности режущего инструмента. – М.: Машиностроение, 1979. – 168 с.
22. Гнесин Г. Г., Ляшенко Б. А., Фоменко С. Н., Рутковский А. В. Износостойкость керамических режущих инструментов на основе нитрида кремния со сплошными и дискретными нитридотитановыми покрытиями // Порошк. металлургия. – 1997. – № 11/12. – С. 93 – 97.
23. Верещака А. С. Работоспособность режущего инструмента с износостойкими покрытиями. – М.: Машиностроение, 1993. – 336 с.
24. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1976. – 415 с.
25. Чигрин Ю. Л. Исследование, разработка и получение градиентных инструментальных материалов на основе тугоплавких металлов и их соединений: Автореф. ... дис. канд. техн. наук. – Благовещенск, 1999. – 22 с.
26. Ляшенко Б. А., Веремчук В. С., Долгов Н. А., Иванов В. М. Исследование прочностных и деформационных свойств с плазмонапыленными покрытиями // Пробл. прочности. – 1996. – № 6. – С. 57 – 60.

Поступила 23. 03. 2002