

## **Пределы применимости метода Уилкинса для исследования динамического напряженно-деформированного состояния анизотропных упругих осесимметричных оболочек**

**П. П. Лепихин, В. А. Ромащенко, С. А. Тарасовская, В. Г. Корбач**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Изучена точность и устойчивость метода Уилкинса при исследовании напряженно-деформированного состояния осесимметричных анизотропных упругих оболочек, в том числе и толстостенных, для различных значений искусственной вязкости, времени нарастания и спада импульса нагрузки и длительностей процесса деформирования. Выполнено сопоставление численных расчетов, полученных с помощью разработанного В. А. Ромащенко на основе метода Уилкинса пакета прикладных программ, с результатами экспериментов, известными численными данными, а также с расчетами, проведенными с использованием вычислительного ядра LS-DYNA 3D.*

**Ключевые слова:** ортотропия, цилиндрическая оболочка, метод Уилкинса, вычислительное ядро LS-DYNA 3D, искусственная вязкость.

В настоящее время в технике все более широко применяются оболочечные конструкции, выполненные из композитных материалов [1, 2]. В целом ряде случаев [3, 4] такие конструкции испытывают динамическое нагружение и работают в упругой области деформирования вплоть до разрушения. Управляя симметрией свойств композитных материалов, можно целенаправленно изменять напряженно-деформированное состояние (НДС) и прочность конструкций. Несмотря на возросший интерес к изучению поведения композитных материалов при динамическом нагружении и наличие многочисленных экспериментальных данных [1–4], теоретическому исследованию подобных задач для композитных оболочек вращения, в первую очередь толстостенных, даже учитывая известные достоинства численного эксперимента, уделялось мало внимания [5]. При теоретическом изучении таких задач используются преимущественно численные методы, а анизотропия моделируется упругим телом с тем или иным видом симметрии свойств [6]. Наибольшее распространение при численном моделировании получили методы конечных элементов, конечных разностей, характеристик и интегроинтерполяционные методы (например, алгоритм Уилкинса).

Метод Уилкинса был разработан для нестационарных расчетов упруго-пластических изотропных сред [7]. Для повышения устойчивости метода предусмотрена искусственная вязкость. В начале 80-х годов в работах [8, 9] указанный метод был модифицирован для решения осесимметричных двумерных упруго-пластических задач на случай вязких и анизотропных сред. В настоящее время алгоритм Уилкинса решения осесимметричных динамических задач для изотропных и анизотропных тел вращения используется в широко известном пакете прикладных программ (ППП) DYNA-3D. До недавнего времени метод применялся для расчета упруго-пластических течений при больших деформациях и малом времени протекания процесса деформи-

рования. Ранее [10] было показано, что алгоритм Уилкинса при решении упругих задач для изотропных тел устойчив и обладает высокой точностью при малых деформациях и большом ( $\sim 10^{-2}$  с) времени протекания процесса деформирования. Насколько известно, подобный анализ для анизотропных тел, по-видимому, не проводился. Отсутствуют также исследования по влиянию искусственной вязкости на точность получаемого решения при различных длительностях процесса деформирования и времени нарастания импульса нагружения. Необходимость анализа таких задач имеет место в целом ряде прикладных исследований.

Цель данной работы – изучение точности и устойчивости метода Уилкинса при исследовании НДС осесимметричных анизотропных упругих оболочек, в том числе и толстостенных, для различных значений искусственной вязкости, времени нарастания и спада импульса нагружения и длительностей процесса деформирования. Результаты численных расчетов, полученных с помощью разработанного одним из авторов на основе метода Уилкинса ППП, сопоставляются с результатами экспериментов [4, 11], известными численными данными [12], а также с расчетами, проведенными с использованием вычислительного ядра LS-DYNA 3D. Ядро LS-DYNA 3D входит в бесплатную учебно-тестовую версию многоцелевого программного комплекса ANSYS/ED 5.7, которая является полнофункциональной (содержит все модули, типы анализа, полную библиотеку конечных элементов и т.д.), не имеет ограничений по сроку действия, но ограничена по размерности решаемой задачи: 1000 узлов/500 элементов.

Следуя [8, 9], дадим математическую формулировку задачи исследования.

Уравнения движения в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  с учетом осевой симметрии имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \dot{r}; \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \dot{z}, \quad (1)$$

уравнение неразрывности –

$$\frac{\dot{V}}{V} = \dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} + \dot{\epsilon}_{zz}, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность материала;  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}$  – компоненты тензора напряжений;  $V$  – относительный объем; точка обозначает лагранжеву производную по времени. Геометрические соотношения, связывающие скорости деформаций и перемещений, записываются следующим образом:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial r}; \quad \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{\dot{r}}{r}; \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}; \quad \dot{\epsilon}_{rz} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial r}. \quad (3)$$

Уравнения состояния для девиатора напряжений имеют вид

$$\dot{S}_r = B_{rr}\dot{\varepsilon}_{rr} + B_{\varphi\varphi}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + B_{zz}\dot{\varepsilon}_{zz}; \quad (4)$$

$$\dot{t}_{rz} = G_{rz}\dot{\varepsilon}_{rz},$$

где

$$B_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} - C_{\beta};$$

$$C_{\beta} = (D_{r\beta} + D_{\varphi\beta} + D_{z\beta})/3, \quad \alpha, \beta = r, \varphi, z;$$

$$D_{r\varphi} = E_r \frac{\nu_{\varphi r} + \nu_{\varphi z}\nu_{zr}}{\Pi}; \quad D_{rr} = E_r \frac{1 - \nu_{\varphi z}\nu_{z\varphi}}{\Pi};$$

$$\Pi = 1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi z}\nu_{zr} - \nu_{\varphi r}\nu_{z\varphi}\nu_{rz} - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r} - \nu_{rz}\nu_{zr} - \nu_{\varphi z}\nu_{z\varphi};$$

$E_{\alpha}$  – модуль Юнга цилиндрически ортотропной среды в направлении  $\alpha$ ;  $G_{rz}$  – модуль сдвига в плоскости  $rz$ ;  $\nu_{\alpha\gamma}$  – коэффициент Пуассона, характеризующий сужение в направлении  $\gamma$  под действием силы, приложенной в направлении  $\alpha$ .

Выражения для  $S_{\varphi}$ ,  $S_z$ ,  $D_{rz}$ ,  $D_{\varphi r}$ ,  $D_{\varphi\varphi}$ ,  $D_{\varphi z}$ ,  $D_{zr}$ ,  $D_{z\varphi}$ ,  $D_{zz}$  получаются путем циклической перестановки индексов  $r, \varphi, z$ . Следует заметить, что коэффициенты Пуассона и соответствующие модули упругости Юнга должны удовлетворять известным соотношениям [13]:

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij}, \quad i \neq j. \quad (5)$$

Шаровая часть напряжений  $\sigma$  вычисляется следующим образом:

$$\sigma = C_r \varepsilon_{rr} + C_{\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + C_z \varepsilon_{zz}. \quad (6)$$

Система уравнений (1)–(6) замыкается начальными и граничными условиями. Начальные условия полагались нулевыми, граничные – силовыми или кинематическими.

На основе приведенных уравнений ранее [9] был разработан ППП для динамического расчета осесимметричных толстостенных оболочек.

В работах [4, 11] экспериментально исследованы деформация и разрушение цилиндрической оболочки из стеклопластика, которая нагружалась импульсом внутреннего давления, вызванным подрывом в центре оболочки сферического заряда массой  $m$  из сплава тротила с гексогеном – ТГ-50/50 (теплотворная способность взрывчатого вещества  $q = 4,877$  МДж/кг). Торцы оболочки были свободными. Радиус внутренней поверхности  $R = 0,1$  м, толщина  $h = 0,016$  м, длина  $L = 0,4$  м.

В [12] предложена численная методика решения задач нестационарного деформирования композитных анизотропных оболочек вращения при импульсных воздействиях. В основу методики положены уравнения геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко. Физические

соотношения реализуются в рамках теории эффективных модулей. Для вывода уравнений движения использовалось вариационное уравнение Лагранжа–Даламбера. Сформулированная начально-краевая задача решалась численно с помощью конечно-разностной дискретизации вариационного уравнения и явной схемы интегрирования по времени. Приведены результаты сопоставления численного расчета с экспериментальными данными работ [4, 11]. В [12] полагалось, что материал оболочки ортотропный:  $E_z = 1,9 \cdot 10^4$  МПа;  $E_\varphi = 3,3 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu_{z\varphi} = 0,12$ ;  $G_{zr} = 3,7 \cdot 10^3$  МПа. Начальные условия принимались нулевыми, граничные – силовыми. При этом закон нагружения определялся с помощью эмпирической зависимости [14]

$$P(t) = 0,35 mql^{-3} H(0,35 lq^{-0,5} - t), \quad (7)$$

где  $P(t)$  – давление на внутреннюю поверхность оболочки;  $l$  – расстояние от центра заряда до точки внутренней поверхности оболочки;  $H(t)$  – функция Хевисайда.

В данной работе с использованием разработанной программы численного расчета изучен процесс деформирования цилиндрической оболочки [4, 11, 12] с геометрическими характеристиками, параметрами нагружения и свойствами материала, принятыми в [12]. Необходимые для расчета оболочки как трехмерного тела дополнительные упругие характеристики, отсутствующие в [12], определялись из следующих соображений.

Исходя из технологии изготовления оболочки [4], осевое и окружное направления являются направлениями минимальной и максимальной жесткости материала соответственно. Поэтому принимали  $E_r = (E_\varphi + E_z)/2$ , а коэффициенты  $\nu_{zr}$  и  $\nu_{r\varphi}$  выбирали таким образом: поскольку  $E_z < E_r < E_\varphi$  и справедливы равенства (5), полагали, что коэффициенты Пуассона такого материала заключены в пределах интервала  $[\nu_{z\varphi}; \nu_{\varphi z}]$ . Приняв  $\nu_{z\varphi} = 0,12$  [12], для других коэффициентов считали  $\nu_{zr} = 0,14$ ,  $\nu_{r\varphi} = 0,17$ . Остальные три коэффициента Пуассона вычисляли согласно (5). При этом все выбранные  $\nu_{ij}$  попадали в интервал  $[0,12; 0,21]$ , причем  $\nu_{\varphi z} \approx 0,21$ . Эта процедура, естественно, не может быть строго обоснованной – теория упругости ортотропной среды не накладывает никаких ограничений, кроме (5), на выбор упругих констант. Число независимых упругих характеристик в ортотропном материале равно девяти (в случае осевой симметрии достаточно знать семь), и однозначно восстановить упругие характеристики трехмерного ортотропного тела по “оболочечным” данным невозможно. Тем не менее, как показал дальнейший анализ, расчетные данные, полученные по принятой модели ортотропного тела, хорошо согласовались с экспериментальными. Более того, изменения  $E_r$  в пределах интервала  $[2,6 \cdot 10^4$  МПа;  $5,2 \cdot 10^5$  МПа] и  $\nu_{zr}, \nu_{r\varphi}$  в пределах  $[0,14; 0,45]$  приводили к изменению результатов расчета окружных (оболочечных) деформаций  $\varepsilon_\varphi$  не более чем на 1%.

Принято разбиение области на одинаковые первоначально прямоугольные элементы: количество разбиений в радиальном направлении равно 10, в осевом – 40. Общее количество элементов 400. Для обеспечения устойчи-

ности численного метода и для сглаживания волновых фронтов в численный алгоритм, как и в LS-DYNA 3D, введена такая же искусственная вязкость с коэффициентами квадратичной вязкости  $Q_1$  и линейной  $Q_2$ . По умолчанию в LS-DYNA 3D этим коэффициентам присваиваются следующие значения:  $Q_1 = 1,5$ ,  $Q_2 = 0,06$ . Эта же задача решалась с использованием вычислительного ядра LS-DYNA 3D, входящего в многоцелевой программный комплекс ANSYS/ED 5.7. В данном расчете в обоих программных комплексах искусственная вязкость принималась такой же, как по умолчанию в LS-DYNA 3D.

В таблице для различных масс заряда  $m$  представлены максимальные значения окружной деформации в центральном сечении оболочки  $\varepsilon_\varphi$ , время достижения максимальной деформации  $t$ , а также период радиальных колебаний  $T_k$ .

Результаты сравнительного анализа

$m \cdot 10^3$ , кг	$\varepsilon_\varphi$ , %				$t \cdot 10^6$ , с				$T_k \cdot 10^6$ , с			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
33	0,7	0,7	0,69	0,69	50	50	49	49	175	170	165	165
62	1,2	1,3	1,30	1,30	55	55	49	49	165	160	165	165
109	2,1	2,2	2,28	2,28	52	55	50	50	170	165	165	165

**Примечание.** В колонках 1, 5, 9 приведены экспериментальные данные [4, 11], в колонках 2, 6, 10; 3, 7, 11 и 4, 8, 12 – расчетные значения, полученные по методикам работ соответственно [12]; [9] и с использованием ядра LS-DYNA 3D.

На рис. 1 показаны зависимости окружной деформации оболочки в центральном сечении от времени для массы заряда  $m = 33$  г.

Из таблицы и представленных графиков видно хорошее соответствие между полученными численными результатами и экспериментальными данными [4, 11], численными расчетами авторов [12], а также расчетами с использованием ППП LS-DYNA 3D.

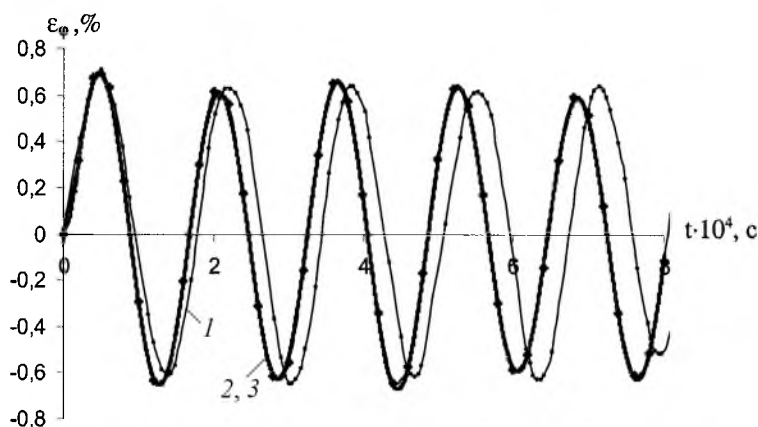


Рис. 1. Зависимости окружной деформации  $\varepsilon_\varphi$  в центральном сечении оболочки от времени: 1 – осциллограмма опыта [4]; 2 – численное решение по методике [9]; 3 – решение, полученное с помощью вычислительного ядра LS-DYNA 3D.

Проведен анализ влияния искусственной вязкости на колебания оболочки (полагали  $m = 109$  кг). При расчетах по методике [9] в случае принятия коэффициентов вязкости, таких же как и по умолчанию  $Q_1$  и  $Q_2$  в LS-DYNA 3D, наблюдается существенное затухание свободных колебаний окружных деформаций, а при  $Q_1 = Q_2 = 0$  (искусственная вязкость отсутствует) затухание не имеет места (рис. 2). Рис. 2 иллюстрирует незначительные изменения амплитуды  $\varepsilon_\varphi$  во времени с периодом около  $4,6 \cdot 10^{-3}$  с, которые объясняются тем, что задача двухмерная и наряду с радиальной формой оболочка имеет также другие формы колебаний. Установлено, что независимо от значений  $Q_1$  и  $Q_2$  метод Уилкинса устойчив на длительных временах счета, вплоть до  $10^{-2}$  с. Графики, полученные с использованием вычислительного ядра LS-DYNA 3D, практически не отличались от приведенных на рис. 2.

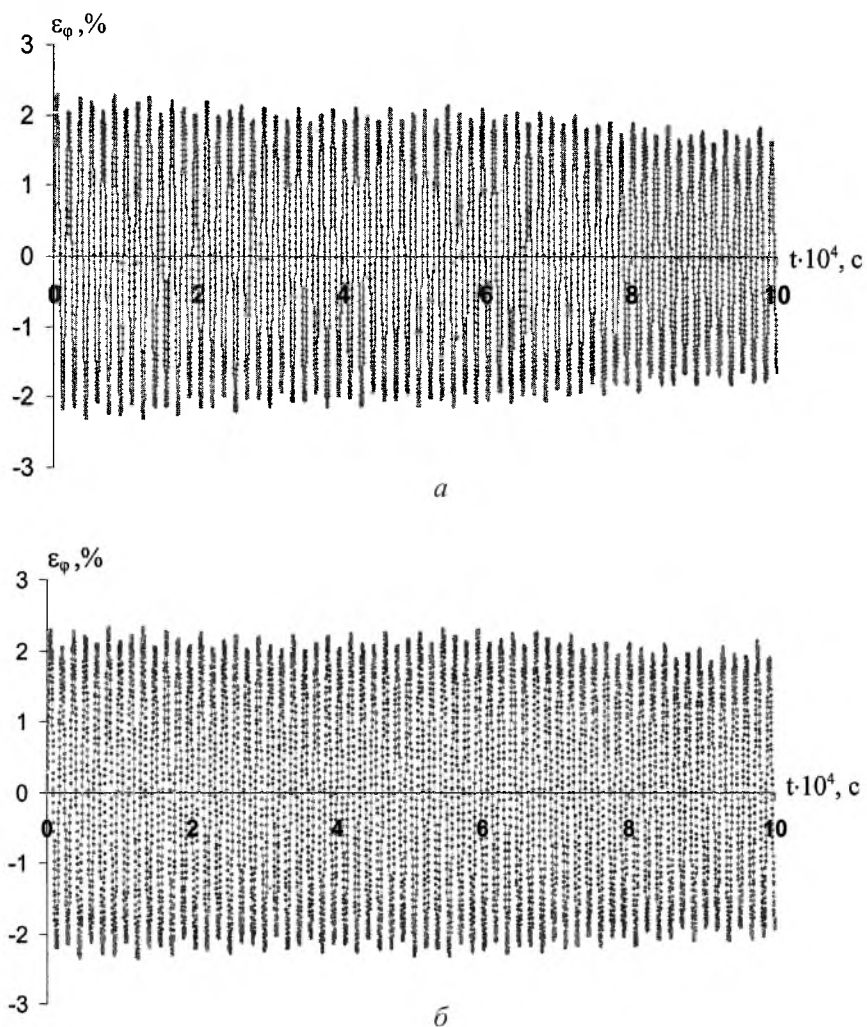


Рис. 2. Графики изменения  $\varepsilon_\varphi$  в центральном сечении оболочки во времени, рассчитанные с использованием искусственной вязкости (а) и без нее (б).

Для исключения нерадиальных форм колебаний (двухмерности) эта же задача рассматривалась в одномерной постановке – цилиндр полагали бесконечно длинным. На рис. 3 показано изменение  $\varepsilon_\varphi$  во времени при значениях  $Q_1$  и  $Q_2$ , равных принимаемым в LS-DYNA 3D по умолчанию, и при  $Q_1 = Q_2 = 0$ . Нагрузка вычислялась по формуле (7), в которой полагали  $l = R$ ,  $m = 109$  кг. Видно, что колебания амплитуды во времени, имевшие место в двухмерной постановке задачи, исчезли. В этом случае при ненулевых значениях  $Q_1$  и  $Q_2$  наблюдается линейное затухание колебаний  $\varepsilon_\varphi$ , а при нулевой искусственной вязкости оно исчезает и колебания становятся незатухающими, как и должно быть в упругой волновой задаче без диссипации.

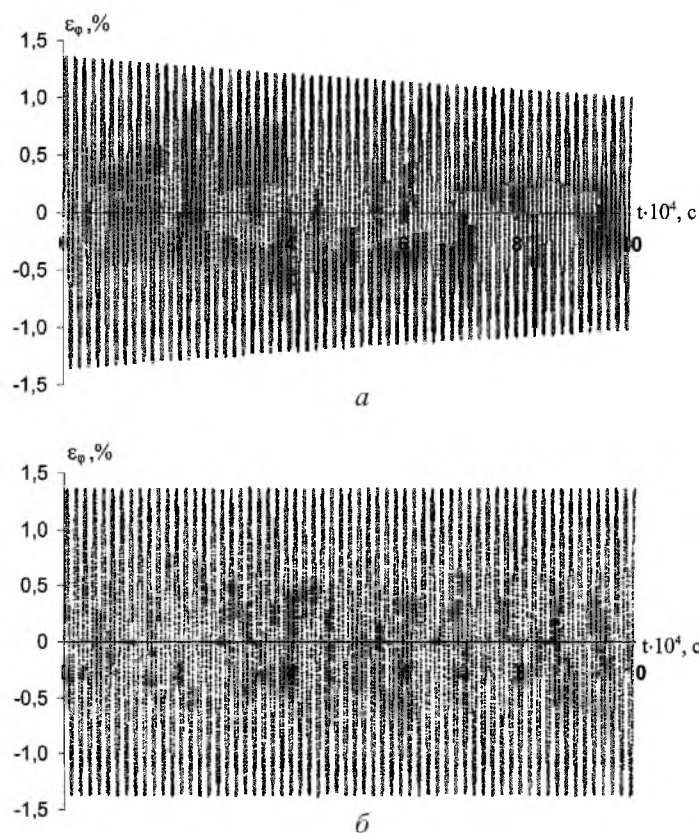


Рис. 3. Зависимости  $\varepsilon_\varphi(t)$  в одномерной постановке для ненулевой (а) и нулевой (б) искусственной вязкости.

Проведен анализ влияния искусственной вязкости на распределение радиальных напряжений по толщине стенки толстостенного анизотропного цилиндра, нагруженного по внутренней поверхности равномерно распределенными по его длине импульсами давления треугольной и прямоугольной формы амплитудой 188 МПа и длительностью  $10^{-5}$  с. Время нарастания фронта треугольного импульса  $t_n$  изменялось в пределах  $1 \cdot 10^{-6} \dots 5 \cdot 10^{-6}$  с, время спада  $t_c$  – в пределах  $5 \cdot 10^{-6} \dots 9 \cdot 10^{-6}$  с. Упругие постоянные материала такие же, как и в предыдущих расчетах.

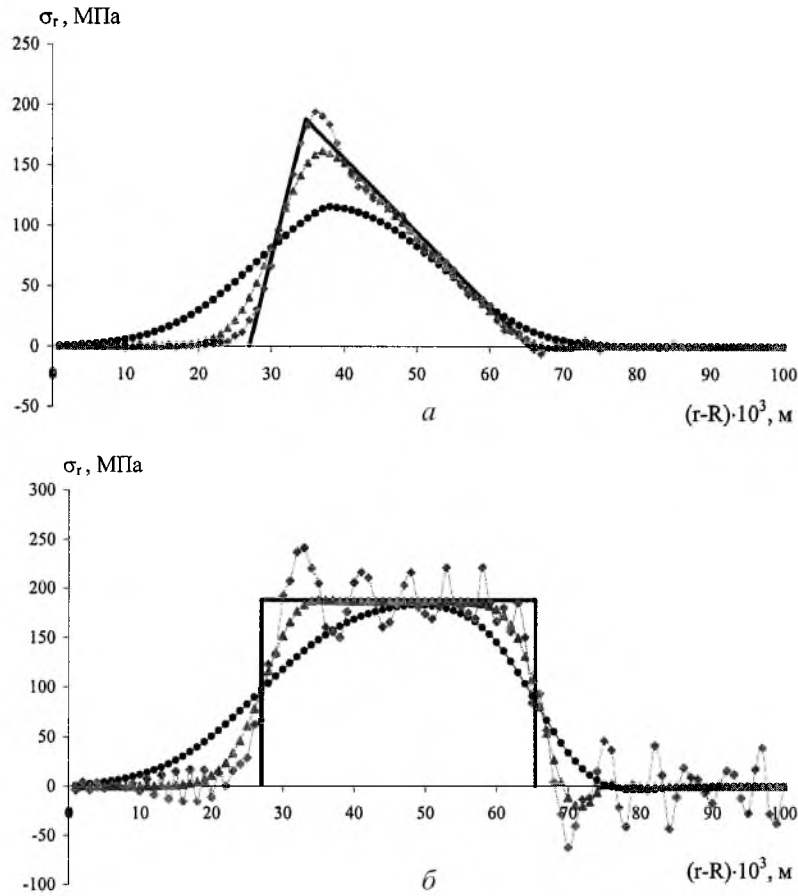


Рис. 4. Распределение  $\sigma_r(r)$  для треугольного ( $t_n = 2 \cdot 10^{-6}$  с,  $t_c = 8 \cdot 10^{-6}$  с) – а и прямоугольного – б импульсов в зависимости от различных значений искусственной вязкости: (–●–)  $Q_1 = 4, Q_2 = 0,5$ ; (–▲–)  $Q_1 = 1,5, Q_2 = 0,06$ ; (–◆–)  $Q_1 = Q_2 = 0$ .

Задача рассматривалась в одномерной постановке ( $L = \infty$ ). Для исключения влияния цилиндричности волн внутренний радиус оболочки задавался  $R = 10$  м при толщине стенки  $h = 0,1$  м. Толщина оболочки разбивалась на 100 конечно-разностных ячеек. Как показали расчеты, уменьшение радиуса в два раза ( $R = 5$  м) изменяло волновую картину менее чем на 1%, т.е. волновые поля  $\sigma_r$  практически не отличались от плоских волновых картин ( $R = \infty$ ). На рис. 4 показано распределение радиальных напряжений по толщине цилиндра в момент времени  $4,5 \cdot 10^{-5}$  с при различных значениях  $Q_1$  и  $Q_2$ . Сплошным линиям соответствует форма импульса, полученная на основе теории распространения одномерных плоских упругих волн [15]. Видно, что искусственная вязкость “гасит” паразитные колебания напряжений. Особенно это заметно для прямоугольного импульса – при нулевой вязкости он вообще теряет форму (рис. 4,б). При треугольном импульсе искусственная вязкость существенно влияет на амплитудное значение импульса. Как следует из рис. 4,а, при  $Q_1$  и  $Q_2$ , равных принятым по умолчанию в LS-DYNA 3D, амплитуда меньше теоретической величины, а



при отсутствии искусственной вязкости – больше и наиболее близка к теоретическому значению. С увеличением коэффициентов вязкости передний фронт неравнобедренного треугольника сглаживается и растягивается по времени, принимая вид равнобедренного треугольника.

Чтобы проанализировать влияние времени нарастания и спада нагрузки на расчетные волновые картины радиальных напряжений, эта же задача рассматривалась для случая трапецеидального импульса: при  $0 \leq t \leq t_1$  нагрузка линейно возрастает от нуля до амплитудного значения (188 МПа), при  $t_1 \leq t \leq T - t_1$  она постоянна, при  $T - t_1 \leq t \leq T$  – линейно убывает до нуля. Коэффициенты вязкости принимались такими же, как по умолчанию в LS-DYNA 3D, общее время действия импульса  $T = 2 \cdot 10^{-5}$  с. На рис. 5 показано распределение  $\sigma_r$  по толщине цилиндра в момент времени  $5 \cdot 10^{-5}$  с для различных времен нарастания и спада  $t_1$  импульса. Видно, что волновые картины получаются довольно близкими к теоретическим. Только при достаточно малом времени нарастания и спада  $t_1$  импульса передний и задний фронты волны несколько “размазываются”. При этом благодаря искусственной вязкости они остаются достаточно гладкими даже в случае мгновенного нарастания и спада нагрузки ( $t_1 = 0$ ).

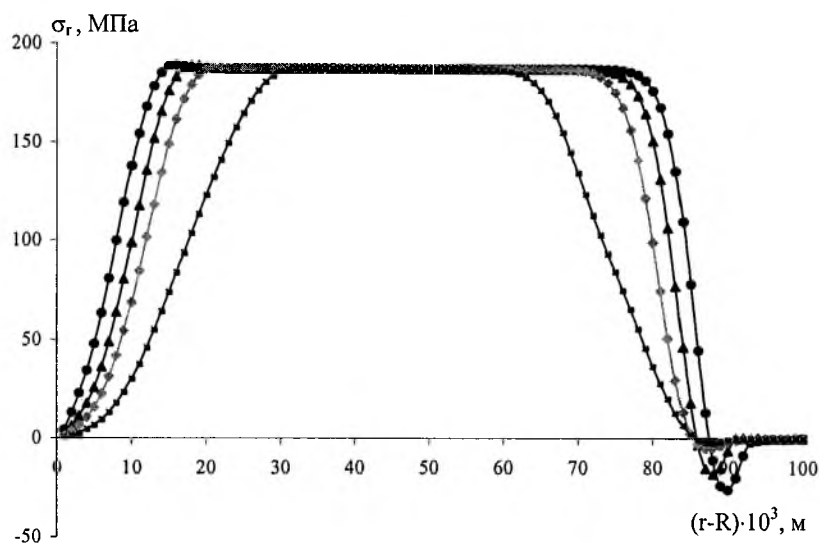


Рис. 5. Зависимости  $\sigma_r(r)$  для трапецеидального импульса: (—●—)  $t_1 = 0$ ; (—▲—)  $t_1 = 10^{-6}$  с; (—◆—)  $t_1 = 2 \cdot 10^{-6}$  с; (—■—)  $t_1 = 5 \cdot 10^{-6}$  с.

Анализ данных показал, что применяемый программный комплекс [9], основанный на алгоритме Уилкинса, позволяет получить решения динамических осесимметричных задач для анизотропных упругих оболочек в широком диапазоне изменения длительностей импульсов нагружения и геометрии оболочки.

Сопоставление численных результатов с расчетными, полученными с использованием ППП LS-DYNA 3D, авторами [12], а также с данными экспериментов показали хорошее соответствие.

В случае необходимости рассмотрения длительных процессов деформирования при использовании алгоритма Уилкинса следует принимать во внимание влияние искусственной вязкости на амплитуду колебаний окружающих напряжений. На начальных этапах нагружения изменение искусственной вязкости слабо влияет на амплитуду  $\sigma_{\varphi}$ , а ее полное исключение может приводить к хорошо согласующимся с физикой процесса решениям и при больших временах деформирования.

Применение рекомендуемых по умолчанию в LS-DYNA 3D параметров искусственной вязкости не всегда позволяет получить с заданной точностью количественные результаты по распределению радиальных напряжений по толщине оболочки.

## Резюме

Вивчено точність та стійкість методу Уїлкінса при дослідженні напружено-деформованого стану осесиметричних анізотропних пружних оболонок, у тому числі і товстостінних, для різних значень штучної в'язкості, часу збільшення і спаду імпульсу навантаження та тривалості процесу деформування. Числові розрахунки зіставляються з отриманими за допомогою розробленого В. А. Ромащенко на основі методу Уїлкінса пакета прикладних програм, результатами експериментів, відомими числовими даними, а також із розрахунками, проведеними з використанням обчислювального ядра LS-DYNA 3D.

1. Федоренко А. Г., Сырунин М. А., Иванов А. Г. Динамическая прочность оболочек из ориентированных волокнистых композитов при взрывном нагружении (обзор) // Прикл. механика и техн. физика. – 1993. – № 1. – С. 126 – 133.
2. Рыжанский В. А., Русак В. Н., Иванов А. Г. Оценка взрывостойкости цилиндрических композитных оболочек // Физика горения и взрыва. – 1999. – 35, № 1. – С. 115 – 121.
3. Рыжанский В. А., Минеев В. Н., Иванов А. Г. и др. Разрушение цилиндрических стеклоэпоксидных оболочек, заполненных водой, при внутреннем импульсном нагружении // Механика полимеров. – 1978. – № 2. – С. 283 – 289.
4. Цыпкин В. И., Русак В. Н., Шитов А. Т., Иванов А. Г. Деформация и разрушение цилиндрических оболочек из стеклоэпоксида при внутреннем импульсном нагружении // Механика композитных материалов. – 1981. – № 2. – С. 249 – 255.
5. Богданович А. Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
6. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища шк., 1986. – 510 с.
7. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидромеханике. – М.: Мир, 1967. – С. 212 – 263.

8. Галиев Ш. У., Алпаидзе З. Г., Ромащенко В. А. и др. Методики численного расчета анизотропных полых тел вращения на импульсные нагрузки // АН УССР. Ин-т пробл. прочности. – Препр. – Киев, 1984. – 54 с.
9. Ромащенко В. А. Вязкоупругопластические волны в окрестности угловых точек анизотропных оболочек // Пробл. прочности. – 1984. – № 10. – С. 89 – 92.
10. Lepikhin P. P., Romashchenko V. A., Beiner O. S., et al. On the applicability of one-dimensional models for the evaluation of the dynamic strength of axisymmetric solids // 4th Int. Symp. “Strength and Fracture of Materials and Structural Members under Impulse Loading” (IMPULSE-2001). – Kiev, 2001. – P. 108 – 109.
11. Федоренко А. Г., Цыпкин В. И., Иванов А. Г. и др. Особенности динамического деформирования и разрушения цилиндрических стеклопластиковых оболочек при внутреннем импульсном нагружении // Механика композитных материалов. – 1983. – № 1. – С. 90 – 94.
12. Абросимов Н. А. Численное исследование осесимметричного деформирования композитных оболочек вращения при импульсных воздействиях // Там же. – 1987. – № 4. – С. 647 – 653.
13. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
14. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва. 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
15. Жарий О. Ю., Улитко А. Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. – Киев: Вища шк., 1988. – 184 с.

Поступила 19. 03. 2002