УДК 519.62

О.С. БИЧКОВ, Є.В. ІВАНОВ

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЧІТКОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Abstract: *In the article a new method for solution of fuzzy differential equations is obtained. The method is based on finding of an estimation of domain in which trajectories of solution with prescribed possibility level are contained. On the basis of the given method the numerical algorithm of solution of fuzzy differential equation is obtained.*
Key words: *possibility theory, fuzzy differential equations.*

Анотація: *В статті запропоновано новий метод розв'язання нечітких диференціальних рівнянь, що ґрунтується на знаходженні оцінки області, в якій із заданим рівнем можливості містяться траєкторії процесу розв'язку рівняння. На основі даного методу отримано чисельний алгоритм розв'язання нечіткого диференціального рівняння.*
Ключові слова: *теорія можливостей, нечіткі диференціальні рівняння.*

Аннотация: *В статье предложен новый метод решения нечётких дифференциальных уравнений, основанный на нахождении оценки области, в которой с заданным уровнем возможности содержатся траектории процесса решения уравнения. На основе данного метода получен численный алгоритм решения нечёткого дифференциального уравнения.*
Ключевые слова: *теория возможностей, нечёткие дифференциальные уравнения.*

1. Вступ

Є загальноприйнятим для опису випадкових динамічних систем використовувати стохастичні диференціальні рівняння Іто. Чисельний розв'язок цих рівнянь отримується як усереднення (математичне сподівання) деякого пучка траєкторій [1, 2]. При теоретико-можливісному моделюванні невизначеностей усереднення типу математичних сподівань відсутні.

У даній статті запропоновано метод розв'язання нечіткого диференціального рівняння, що ґрунтується на знаходженні оцінки області, в якій із заданим рівнем можливості містяться траєкторії процесу розв'язку рівняння.

Наведемо деякі означення [2–6].

Означення 1. Можливісною шкалою називається півкільце $L = \{[0,1], \le, \oplus, \otimes\}$, тобто відрізок [0,1] із звичайним порядком $\le$ і двома операціями:

1) $a \oplus b = \max\{a, b\}$;

2) $a \otimes b = \min\{a, b\}$.

Нехай задана множина X та σ-алгебра $\mathbf{A} \subseteq \beta(X)$. Надалі будемо розглядати A-вимірні функції $f : X \to L$. Позначимо через $L(X)$ клас таких функцій, для яких виконуються такі властивості:

1) $f \in L(X), a \in L \Rightarrow a \otimes f = \min(a, f(x)) \in L(X)$;

2) $f, g \in L(X) \Rightarrow f \oplus g = \max(f(x), g(x)) \in L(X)$;

3) $f, g \in L(X) \Rightarrow f \otimes g = \min(f(x), g(x)) \in L(X)$;

4) $f \in L(X) \Rightarrow \neg f \equiv 1 - f(x) \in L(X)$;

5) $\bigoplus_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in L(X)$; $\bigotimes_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in L(X)$, якщо $f_1, ..., f_n, ... \in L(X)$.

Для визначення можливісного простору необхідно ввести означення можливісної міри.

Означення 2. Функція $p: L(X) \to L$ із властивостями:

1) $p((a \otimes f)(\cdot) \oplus (b \otimes g)(\cdot)) = (a \otimes p(f(\cdot))) \oplus (b \otimes p(g(\cdot)))$;

2) $p\left(\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} f_n\right)(\cdot)\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} p(f_n(\cdot))$;

3) якщо $f(\cdot) \equiv 1$, то $p(f(\cdot)) = 1$, називається можливісною мірою.

Означення 3. Визначимо функцію $P: \mathbf{A} \to L$ таким чином: $P(A) \equiv p(\chi_A(\cdot))$. Назвемо цю функцію можливістю чіткої події А. Тоді можливісним простором назвемо трійку $(X, \mathbf{A}, P)$.

Означення 4. Нехай задано можливісний простір $(X, \mathbf{A}, P)$ та вимірний простір $(Y, \mathbf{B})$. Нечіткою величиною назвемо ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$)-вимірну функцію $\xi: X \to Y$.

Означення 5. Нечітку величину ξ (скалярну або векторну) назвемо нормальною, якщо її розподіл має вигляд $\mu_\xi(u) = \varphi\left\{\left\|\Xi^{-1/2}(u-u_0)\right\|^2\right\}$, де $\varphi(x)$ – монотонно спадна функція, що задана при $x \geq 0$, і така, що $\varphi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, $\varphi(0)=1$, а Ξ – додатно визначена матриця.

Означення 6. Нечітким процесом називається функція $\xi(x,t): X \times R \to Y$.

Означення 7. Нечіткий нормальний процес $w(t)$ називається процесом нечіткого блукання, якщо він:

1. З незалежними приростами, тобто для будь-яких моментів часу $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ нечіткі величини $w(t_2) - w(t_1)$ і $w(t_4) - w(t_3)$ незалежні.

2. При фіксованому t його перехідна можливість має вигляд

$$P\{w(t) = y \mid w(t_0) = y_0\} = \varphi\left(\frac{\left\|\Xi^{-1/2}(y-y_0)\right\|^2}{(t-t_0)^2}\right).$$

3. $w(0) = 0$.

В роботі [6] показано, що міру можливості продовжити на булеан і тому розглядати можливісний простір $(X, \beta(X), P, N)$. Нехай на $(X, \beta(X), P, N)$ задано процес нечіткого блукання $w(t,x)$.

Розглянемо рівняння

$$y(t,x) = y_0 + \int_0^t f(y(\tau),\tau)d\tau + \int_0^t g(y(\tau),\tau)dw(\tau,x). \tag{1}$$

Будемо вважати [5], що його коефіцієнти задовольняють умовам теореми існування і єдиності розв'язку на проміжку [0,*T*], тобто

$$|f(y,t) - f(z,t)| \leq L|y-z|, \quad |g(y,t) - g(z,t)| \leq L|y-z|. \tag{2}$$

Введемо таке позначення: $X_\varepsilon = \{x \in X : P\{x\} > \varepsilon\}$, $\varepsilon \in [0,1)$.

Означення 8. ε-зрізом розв'язку рівняння (1) називається множина $\{(t, y(t,x)) \mid t \in [0,T], x \in X_\varepsilon\}$.

Означення 9. Оцінкою ε-зрізу розв'язку рівняння (1) будемо називати множину $S(\varepsilon) \subseteq [0,T] \times R^n$, що задовольняє умовам:

1) якщо $x^* \in X_\varepsilon$ і $y(t, x^*) \in C^1[0,T]$ – траєкторія розв'язку (1), то

$$\{(t, y(t, x^*)) \mid t \in [0,T]\} \subseteq S(\varepsilon);$$

2) існує ПНБ $\tilde{w}$ з тим же розподілом, що w (можливо, на іншому можливісному просторі, який позначатимемо $(\widetilde{X}, \widetilde{P})$), для якого виконується $S(\varepsilon) \subseteq \{(t, y(t,x)) \mid t \in [0,T], x \in \widetilde{X}_\varepsilon\}$.

Зауваження. Оцінка ε-зрізу може бути не єдина.

Далі будуть використані два різні означення нечіткого процесу, які, однак, легко переходять одне в інше (тут $\mathbf{T} = [0,T]$ – часовий інтервал).

Означення 10. Дійсний нечіткий процес p – це функція типу $\mathbf{T} \times X \to \mathbf{R}$, для якої $\mathbf{T} \times X_0 \subseteq \mathrm{Dom}\, p$.

Означення 11. Дійсний нечіткий процес p – це функція типу $X \to (\mathbf{T} \to \mathbf{R})$, для якої $X_0 \subseteq \mathrm{Dom}\, p$.

Чисельним розв'язком рівняння (1) вважатимемо певне конструктивне представлення оцінки ε-зрізу розв'язку цього рівняння для заданих $\varepsilon_1, ..\varepsilon_n$.

Отже, метою роботи є знаходження чисельних методів побудови $S(\varepsilon)$ або $\partial S(\varepsilon)$ для заданих значень $\varepsilon_1, ..\varepsilon_n$ при відомих коефіцієнтах рівняння та відомій функції φ, яку будемо вважати строго спадною і неперервною.

2. Основний результат

Розглянемо спочатку одновимірний випадок, тобто розглядається рівняння (1) у припущенні, що y, f, g, w – скалярні функції.

Лема 1. Нехай функція u задовольняє умові $\forall t \in [0,T] : |u(t)| < C$, функції

$$y_1, y_2, y \in C^1[0,T]$$

задовольняють таким умовам:

1) $y_1' = f(t, y_1) - C|g(t, y_1)|$, $y_1(0) = y_0$;

2) $y_2' = f(t, y_2) + C|g(t, y_2)|$, $y_2(0) = y_0$;

3) $y' = f(t, y) + g(t, y)u(t)$, $y(0) = y_0$.

Тоді $\forall t \in [0,T] : y_1(t) \le y(t) \le y_2(t)$.

Доведення. Доведемо першу нерівність, друга буде доводитись аналогічно.

Розглянемо різницю $h(t) = y(t) - y_1(t) \in C^1[0,T]$. Якщо $h(t^*) = 0, t^* \in [0,T]$, то

$$h'(t^*) = f(t^*, y(t^*)) - f(t^*, y_1(t^*)) + g(t^*, y(t^*))u(t^*) + C\left|g(t^*, y_1(t^*))\right| =$$

$$= \left|g(t^*, y(t^*))\right|(C \pm u(t^*)) > 0 .$$

Враховуючи $h(0) = 0$, отримуємо $\forall t \in [0,T] : h(t) \geq 0$. Лему доведено.

Наслідок. Нехай $y(t,x)$ – розв'язок рівняння (1), функції $y_1(t), y_2(t)$ визначені, як у лемі при значенні $C = \sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}$. Тоді $\forall x \in X_\varepsilon : y(\cdot, x) \in C^1[0,T] \Rightarrow y_1(t) \leq y(t,x) \leq y_2(t)$.

Лема 2. Існує можливісний простір $(\widetilde{X}, \widetilde{P})$ та нечіткий процес $p(t,x)$ на цьому просторі такий, що

1) $p(t_i, x), i = 1..n$ – незалежні при $t_i \neq t_j (i \neq j)$ і однаково розподілені з розподілом $\varphi(\cdot^2)$;

2) множина траєкторій $p(t,x)$ є множиною обмежених вимірних функцій на $[0,T]$;

3) $\widetilde{w}(t,x) = \int\limits_0^t p(\tau, x) d\tau$ є процесом нечіткого блукання.

Доведення. Візьмемо за $\widetilde{X}$ - множину всіх обмежених вимірних функцій типу $[0,T] \mapsto \mathbf{R}$, а за міру можливості на цій множині – $\widetilde{P}\{x(t)\} = \varphi(\sup\limits_{t \in [0,T]} \left|x(t)\right|^2)$ – (продовжується на $\widetilde{X}$ по повній адитивності).

Доведемо, що на цьому просторі нечітка величина $Id(x) \equiv x$ буде шуканим процесом (у розумінні означення 10), тобто $p(t,x) = x(t)$.

Обчислимо розподіл нечіткої величини. Маємо

$$\widetilde{P}\{p(t_0, x) = y\} = P\{x(t_0) = y\} = \varphi(y^2) .$$

Доведемо незалежність $p(t_i, x), i = 1..n$ - незалежні при $t_i \neq t_j (i \neq j)$.

$$\widetilde{P}\{Id(x)(t_i) = a_i, i = 1..n\} = \widetilde{P}\{x(t_i) = a_i, i = 1..n\} = \varphi(\max_{i=1..n}(a_i^2)) = \min_{i=1..n} \varphi(a_i^2) =$$

$$= \min_{i=1..n} \widetilde{P}\{x(t_i) = a_i\} = \min_{i=1..n} \widetilde{P}\{Id(x)(t_i) = a_i\} .$$

Бачимо, що умову 1 задовільнено.

Виконання умови 2 – очевидно.

Покажемо, що процес $\widetilde{w}(t,x)$ задовольняє умовам процесу нечіткого блукання. Перевіримо незалежність приростів. Маємо

$$\widetilde{P}\{\widetilde{w}(t_{i+1}, x) - \widetilde{w}(t_i, x) = a_i, i = 1..n\} = \widetilde{P}\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt = a_i\} = \varphi(k^2) ,$$

де k є максимальним значенням цільового функціонала для оптимізаційної задачі:

$$\max\left|x(t)\right| \to \min \text{ при умовах } \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t)dt = a_i, i = 1..n .$$

Оскільки проміжки (t_i, t_{i+1}) не перетинаються, то розв'язок цієї задачі отримується склеюванням розв'язків задач

$$\max\left|x_i(t)\right| \to \min$$

при умовах

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} x_i(t)dt = a_i . \tag{3}$$

Таким чином:

$$x^{opt}(t) = \begin{cases} x_i^{opt}(t), t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, \text{інакше} \end{cases},$$

а отже

$$\varphi(k^2) = \min_{i=1..n} \tilde{P}\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t)dt = a_i\} = \min_{i=1..n} \tilde{P}\{\tilde{w}(t_{i+1}, x) - \tilde{w}(t_i, x) = a_i\} .$$

З нерівності

$$\left|a_i\right| = \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} x_i(t)dt\right| \le \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|x_i(t)\right| dt \le \max\left|x_i(t)\right| \Delta t_i$$

випливає, що розв'язком i-ї задачі (3) є функція майже скрізь рівна константі $a_i / \Delta t_i$.

Таким чином, виконується умова на розподіл процесу нечіткого блукання:

$$\tilde{P}\{\tilde{w}(t, x) - \tilde{w}(t_0, x) = a\} = \varphi(a^2 /(t - t_0)^2) .$$

І, нарешті, умова $\tilde{w}(0, x) = 0$ теж очевидно виконується. Тобто $p(t, x)$ є процесом нечіткого блукання.

Лему доведено.

Теорема 1. Множина $\{(t, y) \,|\, t \in [0,T], y_1(t) \le y \le y_2(t)\}$ є оцінкою ε-зрізу розв'язку рівняння (1), де покладено $C = \sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}$.

Доведення. Перша умова щодо визначення $S(\varepsilon)$ задовольняється згідно з наслідком з леми 1. Перевіримо другу умову. Як $(\tilde{X}, \tilde{P})$ та $\tilde{w}$ візьмемо простір і процес з леми 2.

Далі виберемо точку $(t^*, y^*) : y_1(t^*) \le y^* \le y_2(t^*), t \in [0,T]$.

Розглянемо рівняння з параметром

$$z' = f(t, z) + \alpha\left|g(t, z)\right|, \ z(0) = y_0 , \ \left|\alpha\right| \le C = \sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)} .$$

З умов (2) випливає, що

$$\left| f(t, y) + \alpha\left|g(t, y)\right| - f(t, z) - \alpha\left|g(t, z)\right|\right| \le L(1 + \left|\alpha\right|) \le L(1 + C) .$$

Таким чином, за теоремою про неперервну залежність від параметра для звичайних диференціальних рівнянь, $\forall t \in [0,T]$ функція $z(t,\alpha)$ є неперервною по α. Крім того, маємо, що

$$y_1(t^*) = z(t^*, -C) \le y^* \le z(t^*, C) = y_2(t^*) .$$

Звідси випливає, що $\exists \alpha^* \in [-C, C] : z(t^*, \alpha^*) = y^*$.

Це означає, що існує керування $v(t,y) = \alpha^* \mathrm{sign}(g(t,y))$ замкненого типу, яке переводить розв'язок рівняння

$$y' = f(t,y) + g(t,y)v(t,y) ,\ y(0) = y_0$$

в точку (t^*, y^*) і задовольняє умові $v \in [-\alpha^*, \alpha^*]$, а тому, з теорії керування, випливає, що ця точка є досяжною і за допомогою керування відкритого типу $u^*(t)$, яке задовольняє тій же умові $u \in [-\alpha^*, \alpha^*]$.

Враховуючи другу умову, накладену на процес p, $u^*(t)$ є його траєкторією з можливістю

$$\varphi(\sup_{t\in[0,T]} \left|u^*(t)\right|^2) \ge \varphi(\alpha^{*2}) \ge \varepsilon \ ,$$

і таким чином

$$(t^*, y^*) = (t^*, y_{\underset{[w]}{\sim}}(t^*, u^*)) ,$$

що завершує доведення.

Чисельний метод побудови оцінки ε-зрізу розв'язку рівняння (1) в одновимірному випадку складається з таких кроків:

1) чисельно розв'язати пару рівнянь $y'(t,x) = f(t,y) \pm \sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}\left|g(t,y)\right|, y(0,x) = y_0$;

2) вважати частину площини між отриманими графіками оцінкою ε-зрізу розв'язку і оголосити область $\{(t,y) \mid y < y_1(t) \vee y > y_2(t)\}$ як таку, в яку можливість потрапляння траєкторії розв'язку нечіткого рівняння не перевищує ε.

Розглянемо такий приклад. Нехай задано нечітке рівняння вигляду

$$y' = \exp(-ty) + \sin(y)w'(t,x), y(0) = 1$$

при умові $\varphi(a) = \exp(-a)$ на проміжку часу $[0,10]$.

Наведемо фрагмент сесії MATLAB для виведення у графічній формі (рис. 1) меж оцінок ε-зрізу при ε = 0,5; ε = 0,7; ε = 0,9 для нього.

```
[t,y] = ode45( inline( …
    '[ exp(-t*y(1)) — sin(y(1))*sqrt(-log(0.5)) ; exp(-t*y(2)) + sin(y(2))*sqrt(-log(0.5)) ]',
    't','y'), 0: 0.1: 10 , [1 1]' );
plot(t,y,'-');
hold on
[t,y] = ode45( inline( …
```

```
        '[ exp(-t*y(1)) — sin(y(1))*sqrt(-log(0.7)) ; exp(-t*y(2)) + sin(y(2))*sqrt(-log(0.7)) ]',
        't','y'), 0: 0.1: 10 , [1 1]' );
plot(t,y,':');
[t,y] = ode45( inline( …
        '[ exp(-t*y(1)) — sin(y(1))*sqrt(-log(0.9)) ; exp(-t*y(2)) + sin(y(2))*sqrt(-log(0.9)) ]',
        't','y'), 0: 0.1: 10 , [1 1]' );
plot(t,y,'—');
```

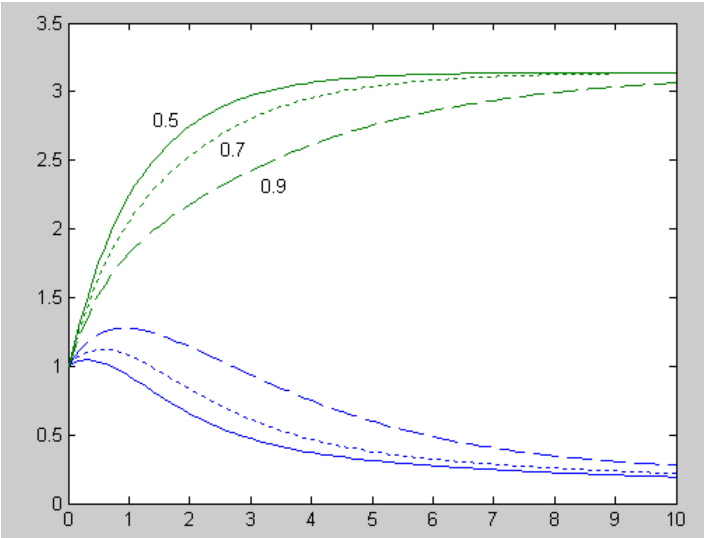

Рис. 1. Оцінка ε-зрізу розв'язку рівняння

Перейдемо до розгляду багатовимірного випадку.

Розглянемо рівняння

$$\mathbf{y}(t,x)=\mathbf{y}_0(x)+\int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{y}(\tau),\tau)d\tau+\int_0^t \mathbf{G}(\mathbf{y}(\tau),\tau)d\mathbf{w}(\tau,x), \quad (4)$$

де $\mathbf{G}\in \mathbf{R}^{n\times n}, \mathbf{f},\mathbf{y},\mathbf{w}\in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{w}(t,x)$ – процес нечіткого блукання із заданим розподілом φ, $\mathbf{f}(.), \mathbf{G}(.)$ – задовольняють умову існування та єдиності розв'язку [5].

Лема 3. $\forall x\in X_0$ траєкторія процесу $\mathbf{w}(t,x)$ – майже скрізь диференційовна.

Доведення.

$$P\{\|\mathbf{w}(t_1,x)-\mathbf{w}(t_2,x)\|\geq C|t_1-t_2|\}=\sup\left\{P\{\mathbf{w}(t_1,x)-\mathbf{w}(t_2,x)=\mathbf{a}\}:\|\mathbf{a}\|\geq C|t_1-t_2|\right\}=$$

$$=\sup\left\{\varphi\left(\frac{\left\|\Xi^{-1/2}\mathbf{a}\right\|^2}{(t_1-t_2)^2}\right):\|\mathbf{a}\|\geq C|t_1-t_2|\right\}\leq\varphi\left(\frac{\lambda_m^2C^2(t_1-t_2)^2}{(t_1-t_2)^2}\right)=\varphi(\lambda_m^2C^2),$$

де λ_m – найменше власне число матриці $\Xi^{-1/2}$.

Звідки випливає, що

$$P\{\exists t_1\neq t_2:\|\mathbf{w}(t_1,x)-\mathbf{w}(t_2,x)\|\geq C|t_1-t_2|\}\leq\varphi(\lambda_m^2C^2).$$

Тому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon > 0 : \forall x \in X_\varepsilon, t_1, t_2 : \left\| \mathbf{w}(t_1, x) - \mathbf{w}(t_2, x) \right\| < C_\varepsilon \left| t_1 - t_2 \right| .$$

Тоді, оскільки $\forall x \in X_0$ функція $\mathbf{w}(t,x)$ Ліпшицева, то вона майже скрізь диференційовна. Лему доведено.

Наслідок. $\mathbf{w}'(t,x)$ можна продовжити до нечіткого процесу (в сенсі означення 9), рівномірно обмеженого на кожній із множин $R \times X_\varepsilon, \varepsilon > 0$.

Теорема 2. Нехай $M_\varepsilon(t)$ – множина досяжності для системи

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), t) + \mathbf{G}(\mathbf{z}(t), t)\mathbf{u}(t), \; \mathbf{z}(0) = \mathbf{y}_0$$

з керуванням $\mathbf{u}(t)$, що задовольняє умові $\left\| \mathbf{u}(t) \right\| \le \sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)} / \lambda_m$. Тоді $M_\varepsilon(t)$ є оцінкою ε-зрізу розв'язку рівняння (3).

Доведення. Виконання першої умови щодо означення $S(\varepsilon)$ є наслідком леми про диференційовність процесу нечіткого блукання, тому перевіримо другу умову.

Побудуємо можливісний простір $(\widetilde{X}, \widetilde{P})$ та ПНБ $\widetilde{\mathbf{w}}'$ аналогічно тому, як було зроблено в теоремі 1:

$$\widetilde{P}\{\mathbf{x}\} = \varphi(\sup_{t \in [0,T]} \left\| \Xi^{-1/2} \mathbf{x}(t) \right\|^2), \; \mathbf{p}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(t), \; \widetilde{\mathbf{w}}(t, x) = \int_0^t \mathbf{p}(\tau, x) d\tau .$$

Виберемо точку $(t^*, \mathbf{z}(t^*, \mathbf{u}^*)), t^* \in [0, T]$, де $\left\| \mathbf{u}^*(t) \right\| \le \sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)} / \lambda_m$ на [0,*T*] і доведемо, що через неї проходить певна траєкторія $\mathbf{y}_{[\tilde{w}]}(t, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \widetilde{X}_\varepsilon$. Для цього достатньо покласти $\mathbf{x} \equiv \mathbf{u}^*$, оскільки $\widetilde{P}\{\mathbf{u}^*(t)\} = \varphi(\sup_{t \in [0,T]} \left\| \Xi^{-1/2} \mathbf{u}^*(t) \right\|^2) \ge \varepsilon$.

Теорему доведено.

Таким чином, знаходження оцінки зрізу розв'язку нечіткого рівняння в багатовимірному випадку зводиться до знаходження множини досяжності системи з керуванням.

Запишемо рівняння Беллмана для системи

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + \max_{\|\mathbf{u}\| \le C} \left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{y})\mathbf{u} \right) = 0$$

з умовою $V(0, \mathbf{y}) = \left\| \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \right\|^2$.

Тоді, знаючи функцію V, можна знайти множини досяжності $M_\varepsilon(t)$ з рівності

$$M_\varepsilon(t) = \{\mathbf{y} : V_\varepsilon(t, \mathbf{y}) \le 0\},$$

і таким чином

$$P\{x\} > \varepsilon \Rightarrow V_{\varepsilon}(t, \mathbf{y}(t, x)) \le 0 .$$

Смуги для стану системи заданого рівня можливості $P\{x\} \in (\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon)$ можна знаходити у вигляді

$$\{\mathbf{y} : V_{\varepsilon}(t, \mathbf{y}) \le 0\} \setminus \{\mathbf{y} : V_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}(t, \mathbf{y}) \le 0\} .$$

Зауважимо, що розв'язок рівняння Беллмана у випадку лінійної системи з правою частиною

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} \text{ і } \mathbf{G}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{B}(t)$$

має достатньо простий вигляд:

$$V(t, \mathbf{y}) = \max_{l} \left(\mathbf{s}(t, l)\mathbf{y} - \frac{\sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}}{\lambda_m} \int_0^t \left\| \mathbf{s}(\tau, l)\mathbf{B}(t) \right\| d\tau - \left\| l / 2 \right\|^2 - (l, \mathbf{y}_0) \right),$$

де $\mathbf{s}(t, t_0, l)$ – розв'язок спряженої системи $\mathbf{s}'(t) = -\mathbf{s}\mathbf{A}(t), \mathbf{s}(0) = l^T$.

3. Висновки

У роботі запропоновано метод знаходження оцінок ε-зрізу розв'язку одновимірного нечіткого диференціального рівняння, а також зведено задачу знаходження їх у багатовимірному випадку до задачі знаходження множин досяжності. Отримані результати дозволяють ефективно розв'язувати нечіткі диференціальні рівняння з нечітким процесом у правій частині за допомогою існуючих чисельних методів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. – СПб.: Наука, 1999. – 458 с.
2. Higham D.J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations // SIAM Review. – 2001. – Vol. 43. – P. 525 – 546.
2. Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применение. – М., 2000. – 190 с.
3. Про один підхід до моделювання нечіткої динаміки / Ю.А. Бєлов, О.С. Бичков, М.Г. Меркур'єв та ін. // Доповіді НАН України. – 2006. – № 10. – С. 14 – 19.
4. Бичков О.С. Побудова інтегралу за процесом нечіткого блукання // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2005. – № 4. – С. 125 – 133.
5. Бичков О.С., Меркур'єв М.Г. Існування та єдиність розв'язків нечіткого диференціального рівняння // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2006. – № 1. – С. 131 – 135.
6. Бичков О.С. До теорії можливостей та її застосування // Доповіді НАН України. – 2007. – № 5. – С. 7 – 12.

Стаття надійшла до редакції 20.06.2008