

УДК 301.17.15;301.07.13

ОБ АВТОМОДЕЛЬНО–АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ МОЛЕКУЛЯРНОЙ И ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ВИХРЯ

П. В. ЛУКЪЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 11.03.2007 ◊ Пересмотрено 22.07.2008

Показано, что реализуемые в эксперименте автомодельные зависимости для азимутальной компоненты скорости и вертикальной компоненты завихренности имеют качественно схожую структуру с двумя автомодельно-аналитическими решениями для задачи турбулентной диффузии вихря. Турбулентность аппроксимируется инерционным интервалом, для которого характерен квадратичный рост во времени коэффициента турбулентной диффузии. Сравняются решения для турбулентной и молекулярной диффузии, соответствующие ненулевым первому и третьему моментам завихренности. Получено автомодельно-аналитическое решение задачи турбулентной диффузии вихря, соответствующее первому моменту, мгновенное распределение в котором имеет вид вихря Лэмба. Основное различие состоит только в том, что скорость вырождения такого вихря, согласно решению, пропорциональна t^{-3} , в то время как вихря Озеена (молекулярная диффузия) – t^{-1} . Сравнение второго решения для турбулентной диффузии с решением "диффузионной модели" компактного вихря (молекулярная диффузия) указывает на то, что и в этом случае имеет место качественное сходство (изолированный гауссиан), а скорости вырождения во времени, при достаточно больших его значениях, пропорциональны t^{-6} и t^{-2} соответственно для турбулентной и молекулярной диффузии вихря.

Показано, що автомодельні залежності для азимутальної компоненти швидкості та вертикальної компоненти завихреності, які реалізуються в експерименті, мають якісно подібну структуру до двох автомодельно-аналітичних розв'язків задачі про турбулентну дифузію вихора. Турбулентність апроксимується інерційним інтервалом, для якого характерне квадратичне зростання у часі коефіцієнта турбулентної дифузії. Порівнюються розв'язки для турбулентної та молекулярної дифузії, що відповідають ненульовим першому та третьому моментам завихреності. Отриманий автомодельно-аналітичний розв'язок турбулентної дифузії вихора, що відповідає першому моменту і має миттєвий розподіл у вигляді вихора Лемба. Різниця лише полягає у тому, що швидкість виродження його у часі, у відповідності до розв'язку, пропорційна t^{-3} , в той час як вихора Озеена (молекулярна дифузія) – t^{-1} . Порівняння другого розв'язку для турбулентної дифузії з розв'язком "дифузійної моделі" компактного вихора (молекулярна дифузія) вказує на те, що і в даному разі має місце якісна схожість (ізолюваний гауссіан), проте швидкості виродження у часі при достатньо великих його значеннях пропорційні t^{-6} та t^{-2} відповідно для турбулентної та молекулярної дифузії.

It has been shown that observed in laboratory experiments self-similar solutions for azimuthal velocity and vertical vorticity have structures that are similar with two self-similar-analytical solutions for turbulent diffusion of vortex. The turbulence is approximated by its inertial interval characterised by quadratic growth in time for turbulent coefficients. The solutions for turbulent and molecular diffusions that correspond to first and third vorticity momenta are compared. Obtained for the first time, a snap-shot for the turbulent diffusion solution that corresponds to first momentum looks like Lamb vortex. The difference is the decay rates: t^{-3} for turbulent diffusion and t^{-1} for molecular one (Oseen vortex). A comparison of second solution for turbulent diffusion with the solution of "diffusive model" (molecular diffusion) points out the similarity of the solutions again. For rather large values of time their rates of decay are t^{-6} and t^{-2} correspondently for turbulent and molecular diffusion.

ВВЕДЕНИЕ

Многие вихри в морях и океанах имеют вертикальную ось вращения и простираются от дна до свободной поверхности. Реже встречаются (из-за сложности обнаружения) вихри внутри водной толщи вдали от дна и от свободной поверхности. Их природа связана с вертикальной стратификацией. Когда сила Архимеда способна сдерживать стремительный рост вихря в вертикальном направлении под действием инерционной силы, то есть когда числа (вертикальные) Фруда меньше единицы, то могут существовать компактные как в горизонтальном, так и в вертикальном измерении области завихренности. Примерами таких ви-

хрей могут служить изолированные антициклонические бароклинные вихри, получившие название "Meddy–Mediterranean eddy" – компактные средиземноморские вихри в виде вращающихся соленых линз. Такие вихри были обнаружены в нескольких местах мировых океанов. Мак Довел и Россби [1] наблюдали Meddy возле Багамов. Арми и Зенк [2] обнаружили три таких вихря в Канарском бассейне. Их размеры составляли по вертикали 500–800 м и по горизонтали 30–50 км. В работе [3] указано, что, попадая из Средиземного моря в Северную Атлантику, указанные вихри вовлекаются в более крупное мезомасштабное вихревое поле, которое может их закручивать, а также благодаря которому происходит адвекция Медди. Россби [4] объясняет почему Медди довольно не-

большие и имеют достаточно большую скорость: горизонтальный сдвиг внешнего течения довольно сильный, так что большие линзы вытягиваются на части в каскад вихрей все более и более меньших масштабов, для которых внешнее поле уже становится по сути однородным. Этим объясняется то, что не было обнаружено очень больших средиземноморских вихрей: они претерпевают "насильственную смерть".

Из вышеизложенного следует, что в природе могут существовать долгоживущие вихри компактной формы. Они, как правило, переносятся внешним течением. Если масштаб компактного вихря во много раз меньше масштаба течения, то можно считать скорость течения постоянной.

Что же касается самих компактных вихрей, то наличие гравитационного механизма подавления вертикальных движений обуславливает их пространственную анизотропию: вертикальный масштаб намного меньше горизонтального. Поэтому не случайно понятие вихря у нас ассоциируется, прежде всего, с вихрем, в котором основным движением частичек среды (воды, воздуха) оказывается вращение вокруг вертикальной оси. В недавно опубликованной работе [5] затронут вопрос о важности вторичных течений в таких вихрях. В частности, на основании численного решения нелинейной задачи диффузии вихря в слое жидкости было указано, что нелинейные эффекты существенны лишь для вихрей вблизи дна и только при условии, что числа Фруда больше 0.25. Если же начальный линейный вихрь находился, скажем, на расстоянии 0.5 своей толщины от дна, то во время диффузии такого вихря, даже если его начальная толщина равна половине глубины слоя жидкости, вторичные течения, а заодно нелинейные эффекты, пренебрежимо малы. Здесь же речь пойдет только о тех вихрях, кинетическая энергия вращения которых относительно вертикальной оси во много раз превосходит другие энергетические составляющие. Как следует из только что сказанного, примеров таких вихрей может быть достаточное количество.

Цель данной работы можно определить как сравнение автомодельно-аналитических решений задач турбулентной и молекулярной диффузий одиночного вихря. Предметом сравнения являются два частных решения задачи турбулентной диффузии вихря. Актуальность данного вопроса состоит в том, что создаваемые в лабораторных условиях вихри имеют масштабы нескольких сантиметров и вырождаются под действием молекулярной диффузии, в то время как основным диссипативным механизмом, при условии отсутствия

указанных выше других факторов, в морях и океанах является турбулентная диффузия. Молекулярная диффузия, хотя и имеет место, но пренебрежимо мала по сравнению с турбулентной диффузией.

Идея написать данную статью пришла после того, как было найдено второе частное автомодельно-аналитическое решение задачи турбулентной диффузии вихря, и оказалось, что вместе с первым решением [5] их автомодельные части качественно описываются теми же функциями, что и соответствующие им решения задач молекулярной диффузии [6]. Различия лишь количественные. Это послужило ответом на то, почему многие из результатов лабораторных экспериментов можно сравнивать с наблюдаемыми в природе явлениями. Иными словами - данная работа посвящена связи моделей турбулентной диффузии вихря с моделью молекулярной диффузии.

1. ВТОРОЕ АВТОМОДЕЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ВИХРЯ.

Все дальнейшие рассуждения основаны на ограничениях правомощности пренебрежения вторичными течениями (радиальной и вертикальной составляющими), о которых сказано во введении. Если рассматривать движение в цилиндрической системе координат, то из трех компонент вектора скорости существенной является лишь окружная [5]:

$$V_r(r, z, t) = 0, \quad V_\theta(r, z, t) \neq 0, \quad V_z(r, z, t) = 0, \quad (1)$$

или в прямоугольной декартовой системе координат:

$$V_x = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} V_\theta, \quad V_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} V_\theta. \quad (2)$$

Уравнения движения, описывающие такой тип вихрей в условиях окружающей фоновой турбулентности, постоянно присутствующей в морях и океанах, получаются из общей системы уравнений Рейнольдса в приложении Буссинеска [5]. Для тех задач, где влияние сил Кориолиса традиционно не учитывается, уравнения движения для двух горизонтальных компонент скорости имеют вид:

$$\frac{d\overline{V}_x}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + K_x(t) \frac{\partial^2 \overline{V}_x}{\partial x^2} + K_y(t) \frac{\partial^2 \overline{V}_x}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \overline{V}_x}{\partial z^2},$$

$$\frac{d\overline{V}_y}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + K_x(t) \frac{\partial^2 \overline{V}_y}{\partial x^2} + K_y(t) \frac{\partial^2 \overline{V}_y}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \overline{V}_y}{\partial z^2},$$

где $(\overline{V}_x, \overline{V}_y), \overline{p}$ – осредненные по достаточно большому промежутку времени значения горизонтальных компонент вектора скорости, а также отклонения поля давления от состояния устойчивой вертикальной стратификации. При этом для коэффициентов турбулентной диффузии справедливо [5]:

$$\frac{K_x(t)}{K_x(0)} = \frac{K_y(t)}{K_y(0)} = \frac{\chi_x(t)}{\chi_x(0)} = \frac{\chi_y(t)}{\chi_y(0)} = (1+t^2).$$

Используя уравнения (2) и производя операцию ротора, легко показать, что два уравнения движения эквивалентны одному:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = K_x(t) \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + K_y(t) \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}, \quad (3)$$

где

$$\omega_z = \left(\frac{\partial \overline{V}_y}{\partial x} - \frac{\partial \overline{V}_x}{\partial y} \right).$$

Как было показано в работе [5], процессы горизонтальной и вертикальной турбулентных диффузий расщепляются, и справедливо соотношение

$$\omega_z = \omega_z^h \cdot Z(z, t), \quad (4)$$

где $\omega_z^h, Z(z, t)$ – решения, описывающие соответственно процессы горизонтальной и вертикальной турбулентных диффузий.

Уравнение, описывающее турбулентную диффузию вихря в горизонтальной плоскости, в полярной системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial \omega_z^h}{\partial t} = \frac{K_L(t)}{Re_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \omega_z^h}{\partial r}. \quad (5)$$

Решение этого уравнения ω_z^h представляется как

$$\omega_z^h = t^a \Omega,$$

где a – некая константа, определяемая из условия получения соответствующего автомодельного уравнения:

$$\frac{d^2 \Omega}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{3}{2}\eta \right) \frac{d\Omega}{d\eta} + \frac{3(n+1)}{2} \Omega = 0, \quad (6)$$

где $\eta = t^{-1.5} r$ – автомодельная переменная. Для простоты в дальнейшем вместо ω_z^h будет использоваться привычное обозначение ω_z .

Общее решение уравнения (6) есть ряд:

$$\Omega = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \eta^{k-1}, \quad (7)$$

где

$$A_{k+2} = -\frac{3(k+n)}{2(k+1)^2} A_k, \quad k = 1, 3, \dots$$

Как оказалось, одно из частных решений напоминает колонообразный вихрь [7]:

$$\omega_z = \frac{\omega_o}{r_o} \exp\left(-\frac{r^2}{r_o^2}\right). \quad (8)$$

Здесь r_o – некая константа, которая имеет для автомодельного решения конкретное значение. В отличие от колонообразного вихря, который соответствует двумерному течению с винтовой симметрией, характеристики исследуемых вихрей, согласно (4), есть также функции вертикальной координаты.

Азимутальная скорость находится по формуле:

$$V_\theta = \frac{1}{r} \int_0^r r \omega_z dr \quad (9)$$

и описывается в случае колонообразного вихря (8) следующим выражением:

$$V_\theta = \frac{\omega_o}{2r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{r_o^2}\right) \right]. \quad (10)$$

Первый момент от завихренности (8) – циркуляция – не равен нулю. Действительно,

$$I_1 = \int_0^r r \omega_z dr = \frac{\omega_o}{2} \neq 0. \quad (11)$$

Поэтому существует автомодельное решение, соответствующее $n = 1$ в решении (7):

$$\Omega^I = \omega_o \exp\left[-\left(\frac{3\eta}{4}\right)^2\right]. \quad (12)$$

Вертикальная компонента завихренности в физических переменных описывается выражением

$$\omega_z^I = \omega_o t^{-3} \exp\left(-\frac{3^2 r^2}{4^2 t^3}\right). \quad (13)$$

Азимутальная компонента скорости, соответствующая соотношению (13), представляется в виде

$$V_{\theta}^I = \frac{8\omega_o}{9r} \left[1 - \exp\left(-\frac{3^2 r^2}{4^2 t^3}\right) \right], \quad (14)$$

получающемся согласно формулы (9).

Напомним, что объект исследования – трехмерный вихрь. Поэтому все его характеристики также зависят и от вертикальной координаты, хотя и процесс вертикальной диффузии происходит в линейных задачах независимо от горизонтального. Радиальная компонента завихренности ω_r^{3d} в рамках данной работы выражается формулой:

$$\omega_r^{3d} = -\frac{\partial V_{\theta}^{3d}}{\partial z},$$

где $V_{\theta}^{3d} = V_{\theta}Z(z, t)$ – полное решение, учитывающее вертикальную диффузию вихря.

Поэтому решения для радиальной компоненты завихренности $\omega_r = \omega_r^{3d}/Z(z, t)$, описывающие процесс горизонтальной турбулентной диффузии вихря, будут теми же, что и для V_{θ} .

2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

Для определения скорости вырождения V_{θ} разложим соответствующее выражение в ряд:

$$V_{\theta}^I = \frac{8\omega_o}{9r} \left(\frac{9}{16} \frac{r^2}{t^3} - \frac{9^2}{16^2} \frac{r^4}{2t^6} + \dots \right) = \frac{\omega_o r}{2t^3} + \dots \quad (15)$$

Видно, что вырождение всех кинематических характеристик в вихре асимптотически пропорционально закону t^{-3} . На рис. 1 можно найти подтверждение этой зависимости. Эти результаты получены согласно решению задачи Коши в декартовых координатах (подробно в [5]) для размеров области, в 40 раз превышающей начальный масштаб вихря и являющейся по сути приближением бесконечного пространства.

В разделе обзорной статьи [6], посвященном лабораторному исследованию структуры вихрей, отмечено, что структура вихря может быть двух типов: *suction vortex* и *stirring vortex*. Вихрь, у которого часть жидкости локально уносится через сток, *suction vortex*, хорошо аппроксимируется вихрем Лэмба:

$$v(r)^I = \frac{\Gamma}{2\pi r} [1 - \exp(-r^2/\lambda^2)], \quad (16)$$

$$\omega(r)^I = \frac{\Gamma}{\pi\lambda^2} \exp(-r^2/\lambda^2), \quad (17)$$

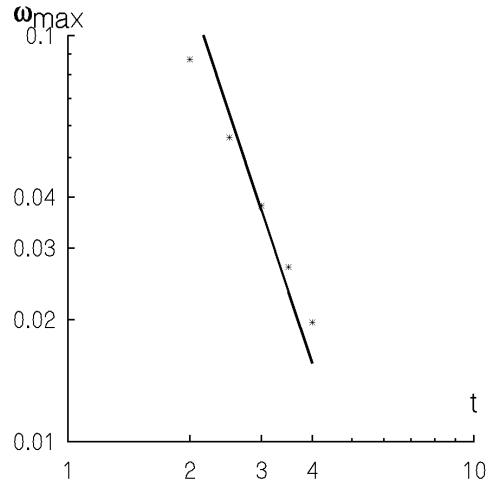


Рис. 1. Зависимость амплитуды завихренности от времени: сплошная линия соответствует закону t^{-3} , * – численной модели

где $\lambda = 2\sqrt{\nu t}$, $V(r), \omega(r)$ – азимутальная скорость и вертикальная компонента завихренности.

Вихрь, получающийся путем размешивания, *stirring vortex*, аппроксимируется изолированным гауссианом:

$$v(r)^{II} = \frac{1}{2} r \exp\left(-\frac{1}{2} r^2\right), \quad (18)$$

$$\omega(r)^{II} = \left(1 - \frac{1}{2} r^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2} r^2\right). \quad (19)$$

Сравним теперь функциональные зависимости (18), (19) с соответствующими решениями для турбулентной диффузии вихря (10), (13). Распределение завихренности (17) качественно схоже с выражением (13), которое представлено на рис. 2 для безразмерного момента времени, равного 1. Различие обуславливается лишь заданием временных зависимостей, что дает для турбулентной диффузии вихря, вместо закона t^{-1} для молекулярной диффузии, закон t^{-3} . Это подтверждает более быстрый характер вырождения возмущений во времени и в пространстве. Те же слова справедливы и для сравнения функциональных зависимостей скорости (14), (16). Если разложить выражение (16) в ряд, подобный (15), то получим:

$$v(r)^I = \frac{\Gamma r}{2\pi\lambda^2} + \dots = \frac{\Gamma r}{8\pi\nu t} + \dots, \quad (20)$$

то есть линейная скорость, так же как и завихренность, убывает при больших t пропорционально t^{-1} .

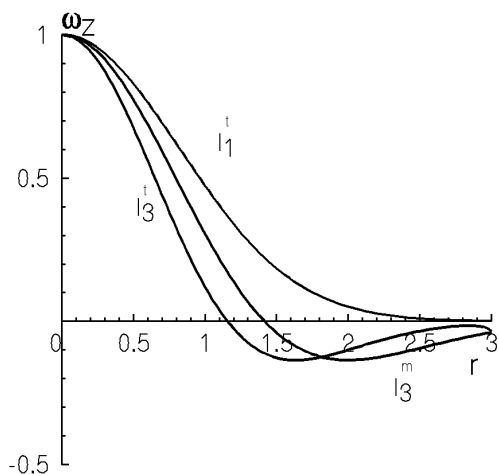


Рис. 2. Автомоделные составляющие вертикальной компоненты завихренности в момент безразмерного времени $t = 1$. I_1^t – соответствует первому моменту для турбулентной диффузии, I_3^t, I_3^m – третьему моменту для турбулентной и молекулярной диффузии соответственно

Сравним теперь автомоделные части решений, соответствующие ненулевому третьему моменту от завихренности. Они описываются гауссианом [6], называемым также изолированным гауссианом [8]. Автомоделная часть решения задачи турбулентной диффузии имеет вид [5]:

$$\Omega^{II} = \left(1 - \frac{3}{4}\eta^2\right) \exp\left(-\frac{3}{4}\eta^2\right), \quad (21)$$

$$V_\theta^{II} = \frac{3}{4} \exp\left(-\frac{3}{4}\eta^2\right). \quad (22)$$

Решение задачи молекулярной диффузии описывается соответственно формулами (16)–(17), в которых вместо r нужно использовать автомоделную переменную ξ .

Сравнение зависимостей (16)–(17) с (21)–(22) показывает, что автомоделные составляющие решений задач турбулентной и молекулярной диффузий практически идентичны, за исключением множителя при автомоделной переменной. В автомоделных переменных вихрь, находящийся в условиях фоновой турбулентности, имеет ядро, приблизительно на 25% меньшее, чем в лабораторных условиях, где указанная турбулентность отсутствует (см. рис. 2). Общим оказывается то, что отношение полного радиуса вихря к радиусу его ядра, в случае компактного вихря, – величина универсальная и не зависит от процесса будь то молекулярной или турбулентной диффузии. Это

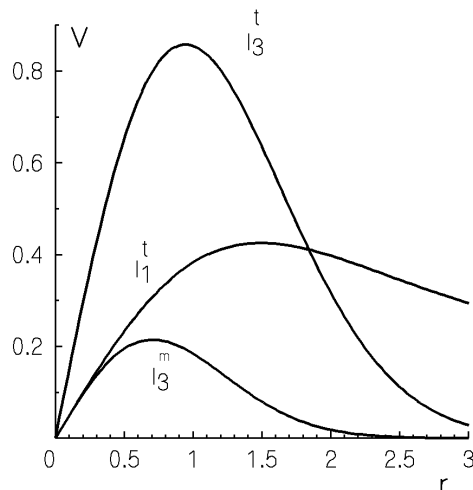


Рис. 3. Автомоделные составляющие радиальных распределений азимутальных скоростей в момент безразмерного времени $t = 1$ (обозначения – см. рис. 2)

свойство, как теперь стало очевидным, позволяло сравнивать результаты лабораторных экспериментов с природными данными.

Распределение азимутальной скорости и радиальной компоненты завихренности, приведенные на рис. 3, свидетельствуют о некомпактности полей указанных характеристик для решения, соответствующего первому ненулевому моменту завихренности.

В работе [5] показано, что при турбулентной диффузии изолированного гауссиана скорость его вырождения пропорциональна t^{-6} . Для сравнения с аналогичным решением диффузионной модели приведем решение для задачи Коши, соответствующее начальному распределению *suction vortex* и *stirring vortex* (18)–(19) согласно [8]:

$$\omega_z^m(z, t) = \frac{1}{\pi^{1/2} (2\Lambda^2 + (4/Re)t)^{1/2} (1 + (4/Re)t)^2} \times \exp\left(-\frac{z^2}{2\Lambda^2 + (4/Re)t}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{1 + (4/Re)t}\right).$$

В последнем выражении Λ – отношение вертикального масштаба вихря к горизонтальному. Приведенное решение соответствует также начальному распределению завихренности по координате z в виде $\exp(-z^2/2\Lambda^2)$.

Как видно из приведенного выражения для ω_z^m , в случае молекулярной диффузии компактного вихря (изолированный гауссиан) для достаточно больших значений времени t поля кинема-

тических характеристик вырождаются со скоростью пропорциональной $t^{-5/2}$. При этом $t^{-0.5}$ соответствует части решения, описывающего диффузию в вертикальном направлении. А скорость диффузии в горизонтальной плоскости, пропорциональна t^{-2} . Это также гораздо медленнее, чем для турбулентной диффузии (t^{-6}). При этом "кубическое" ($t^{-6} = (t^{-2})^3$) соотношение одинаково как и в случае другого автомодельного решения ($t^{-3} = (t^{-1})^3$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Возникает вопрос о том, существует ли исследованное подобие для других режимов турбулентности в морях и океанах. Ведь известны [9, 10] еще два других режима турбулентности – линейный (происходящий вначале) и режим развитой турбулентности или броуновского движения (последний). Для линейного режима коэффициент турбулентной диффузии K пропорционален времени $K \sim t$, а для броуновского – $K = \text{const}$. Очевидно, что для режима броуновского движения получится решение, аналогичное молекулярной диффузии. Отличие будет лишь в том, что вертикальный и горизонтальный коэффициенты турбулентной диффузии будут иметь разные по величине значения [11]. Что касается линейного режима, то найти автомодельное решение для него несложно. Однако [10] этот режим очень быстро заканчивается, да и пространственная анизотропия там еще четко не выражена, а, следовательно, все три компоненты скорости (и завихренности) в вихре будут присутствовать. На этом этапе турбулентная область состоит из множества вихрей. В данной же работе проведено по сути сравнение образовавшейся когерентной (долгоживущей) структуры в виде одиночного вихря, окруженного фоновой турбулентностью. Такие вихри и наблюдаются в реальных условиях морей и океанов. В целом по данной работе можно сделать следующие выводы:

1. Приведено полученное впервые автомодельно-аналитическое решение задачи турбулентной диффузии вихря, соответствующее ненулевому первому моменту завихренности. Это решение согласуется с инерционным масштабом турбулентности, типичном для горизонтальной диффузии вихрей в морях и океанах.

2. Оказалось, что полученные в данной работе и ранее автомодельно-аналитические решения турбулентной диффузии качественно очень схожи с наблюдающимися в лабораторных экспериментах и описываемыми с помощью модели молекулярной

диффузии двумя типами вихрей – вихрем со стоком на оси вращения и вихрем, полученным путем размешивания жидкости. В автомодельных координатах эти решения описываются одинаковыми функциональными зависимостями, у которых лишь различные коэффициенты при независимых переменных. В автомодельных переменных ядро вихря, вырождающегося под действием фоновой турбулентности, приблизительно на 25% меньше, чем у соответствующего ему вихря в лабораторных экспериментах, динамика которого описывается моделью молекулярной диффузии. Основным отличием указанных решений являются временные зависимости: в условиях фоновой турбулентности вихри вырождаются со скоростями t^{-3} и t^{-6} соответственно у вихря типа стока и вихря, полученного размешиванием. Это гораздо быстрее, чем у их аналогов, t^{-1} и t^{-2} , в случае молекулярной диффузии.

3. Приведенное сравнение решений молекулярной и турбулентной диффузии вихря дает утвердительный ответ на вопрос о возможности качественного описания лабораторными моделями ряда процессов, происходящие в морях и океанах.

1. McDowell S., Rossby T. Mediterranean Water: An intense mesoscale eddy off the Bahamas. // Science.– 1978.– 202.– P. 1085-1087.
2. Armi L., Zenk W. Large lenses of highly saline Mediterranean Water // J.Phys. Oceanogr.– 1985.– 14.– P. 1560-1576.
3. Ruddick Barry R. Anticyclonic Lenses in Large-Scale Strain and Shear // J.Phys. Oceanogr.– 1987.– 17.– P. 741-749.
4. Rossby T. Eddies in Marine Science.– Ed. by A.R. Robinson: , 1982.– p.
5. Лукьянов П.В. Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // Прикл. гидромех.– 2006.– т. 8 (80) N3.– С. 63-77.
6. Hopfinger E.J., Heijst G.J.F. van. Vortices in rotating fluids // Annu. Rev. Fluid Mech.– 1993.– V. 25.– P. 241-89.
7. Окулов В.Л., Наумов И.В., Соренсен Д.Н. Вихревой триплет. // Докл. Российской Академии наук.– 2006.– Т.409, N 3.– С. 333-337.
8. Beckers M., Verzicco R., Clercx H.J.H. and Heijst G.J.F. van. Dynamics of pancake-like vortices in a stratified fluid: experiments, model and numerical simulations // J.Fluid Mech.– 2001.– V. 433.– P. 1-27.
9. Окубо А., Озмидов Р.В. Эмпирическая зависимость коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии в океане от масштаба явления // ФАО.– 1970.– Т. VI N5.– С. 534-536.
10. Монин А.С. О взаимодействии между вертикальной и горизонтальной диффузией примесей в море // Океанология.– 1969.– т.9, N1.– С. 76-81.
11. Озмидов Р.В. Диффузия примесей в океане.– М.: Гидрометеиздат, 1986.– 280 с.