УДК 539.411

Концепция предельной скорости фронтов разрушения при расширении цилиндрической полости в хрупком материале

В. В. Картузов, Б. А. Галанов, С. М. Иванов

Институт проблем материаловедения НАН Украины, Киев, Украина

На основе концепции предельных скоростей фронтов разрушения рассмотрено расширение цилиндрической полости в хрупком материале. Получены решения краевых задач для областей с различным состоянием материала. Приведена зависимость давления расширения цилиндрической полости от скорости расширения в керамическом материале по сравнению со сферической полостью.

Ключевые слова: фронт разрушения, керамика, краевая задача, давление расширения, скорость расширения.

Обозначения

h	–	радиус плотности
ν	–	коэффициент Пуассона
E	–	модуль Юнга
K	–	модуль объемного сжатия
C	–	скорость продольных упругих волн
D	–	скорость фронта ударной волны
C_{F1}, C_{F2}	–	скорость соответственно первого и второго фронта разрушения относительно начала координат
V_c	–	скорость расширения полости
V_c^N	–	скорость расширения полости, выше которой возникает динамическая перегрузка
$\sigma_{\theta i} = \sigma_{\varphi i}$	–	окружные напряжения в материале i-й зоны
σ_{ri}	–	радиальные напряжения в материале i-й зоны
$\rho_{i\eta}, V_{i\eta}, \sigma_{ri\eta}, \sigma_{\theta i\eta}$	–	значения $\rho_i, V_i, \sigma_{ri}, \sigma_{\theta i}$ при $r=\eta$
ρ_i	–	плотность материала i-й зоны ($i = 0, 1, 2, 3$)
τ	–	прочность при сдвиге измельченного материала
σ_f	–	статическая прочность материала при растяжении
Y	–	статическая прочность материала при сжатии

При решении динамических задач деформирования хрупких материалов в рамках феноменологического подхода, как правило, применяют модели, основанные на решении задачи о расширении сферической и цилиндрической полости в неограниченной среде различной реологии [1–4]. В настоящей работе расширение цилиндрической полости рассматривается на основе концепции предельной скорости фронта разрушения, впервые высказанной В. Н. Николаевским [5].

Предполагается, что материал находится в состоянии плоского деформированного состояния и скорость расширения полости V_c постоянна. Начало цилиндрической системы координат (r, θ, z) находится в центре полости. Как и в случае сферической симметрии [3], принимаем, что вне полости существуют четыре области с различным состоянием материала (рис. 1): невозмущенный материал – зона *0*; упругий предвестник – зона *1*; материал, разрушенный радиальными трещинами, – зона *2*; материал, разрушенный как сдвиговыми, так и радиальными трещинами нормального раскрытия, – зона *3*. Материал в каждой области рассматривается как непрерывная среда постоянной плотности, $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3 \neq \rho_0$.

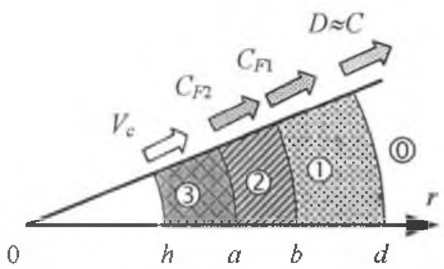

Рис. 1. Области с различным состоянием материала.

Цилиндрические поверхности $r = a$ и $r = b$ представляют собой фронты разрушения, движущиеся с разными скоростями C_{F2} и C_{F1} соответственно относительно начала координат. Цилиндрическая поверхность $r = d$ соответствует фронту ударной волны (или фронту упругого предвестника), движущемуся со скоростью D, близкой к скорости продольных упругих волн C [5, 6]. В отличие от подхода, основанного на концепции предельных разрушающих напряжений (см., например, [1–3]), настоящее исследование базируется на концепции существования предельной скорости N фронта разрушения относительно движущегося перед ним материала. Величина N рассматривается как физическая характеристика (постоянная) материала, своя для каждого типа разрушения [4], при этом $N \leq C_R$ (C_R – скорость волны Рэлея). Величина скорости $N = N_1$ связана с фронтом $r = b$, а $N = N_2$ – с фронтом $r = a$, $N_1 \geq N_2$. Так же, как и в [3], N_1 и N_2 предполагаются зависящими от скорости распространения трещин нормального раскрытия и сдвига соответственно.

Упругая область ($b \leq r \leq d$). Для зоны упругого предвестника *1* в эйлеровой цилиндрической системе координат имеем следующие уравнения непрерывности и движения:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho_1 V_1) + \frac{\rho_1 V_1}{r} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r1}}{\partial r} + \frac{\sigma_{r1} - \sigma_{\theta 1}}{r} = \rho_1 \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} \right). \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) дополняются граничными условиями: динамической совместности при $r = d = Ct$:

баланс масс

$$\rho_1(V_{1d} - C) = -\rho_0 C, \tag{3}$$

баланс импульсов

$$V_{1d}\rho_1(V_{1d} - C) = \sigma_{r1d}; \tag{4}$$

динамической совместности при $r = b$:

баланс масс

$$\rho_{2b}(V_{2b} - C_{F1}) = \rho_1(V_{1b} - C_{F1}), \tag{5}$$

баланс импульсов

$$\rho_{2b}V_{2b}(V_{2b} - C_{F1}) - \sigma_{r2b} = \rho_1 V_{1b}(V_{1b} - C_{F1}) - \sigma_{r1b}; \tag{6}$$

предельной скорости разрушения:

$$C_{F1} - V_{1b} = N_1. \tag{7}$$

Из принятых предположений и уравнений (1), (3) и (4) получим

$$V_{1d} = (1 - \rho_0/\rho_1)C = \text{const}; \quad \sigma_{r1d} = -\rho_0(1 - \rho_0/\rho_1)C^2 = \text{const}; \tag{8}$$

$$V_1 = V_{1d}(Ct/r). \tag{9}$$

С использованием (7) и (9) получаем следующее уравнение для скорости фронта разрушения:

$$C_{F1} - V_{1d}Ct\left(\int_0^t C_{F1}(\tau)d\tau\right)^{-1} = N_1. \tag{10}$$

Это уравнение имеет только одно решение – $C_{F1}(t) = C_{F1}(0) = C_{F1} = \text{const}$, которое не зависит от времени и является корнем квадратного уравнения $C_{F1}^2 - N_1 C_{F1} - V_{1d}C = 0$.

Принятые гипотезы позволяют проинтегрировать (2) и получить автомодельное решение, так как $V_1(r,t)$ имеет форму (9) и $\sigma_{z1} = \nu(\sigma_{r1} + \sigma_{\theta 1})$, $(\sigma_{r1} + \sigma_{\theta 1} + \sigma_{z1})/3 = -K(1 - (\rho_0/\rho_1))$:

$$\sigma_r = \frac{A}{2} - \left(\rho_1 V_{1d}^2 C^2 \ln\frac{r}{t} + \hat{C}_1\right)\left(\frac{t}{r}\right)^2,$$

$$A = \rho_1 V_{1d} C - \frac{3K}{1+\nu}\frac{V_{1d}}{C}, \qquad \hat{C}_1 = C^2\left(\sigma_{r1d} - \frac{A}{2}\right) + \rho_1 V_{1d}^2 C^2 \ln C.$$

Зона растресканного материала ($a \le r \le b = C_{F1}t$). В зоне *2* уравнения непрерывности и движения имеют вид (1) и (2). Как и в [1], предполагаем $\sigma_{\theta 2} = 0$, поэтому $\sigma_{z2} = \nu \sigma_{r2}$. Массовая скорость имеет вид, аналогичный (9):

$$V_2 = V_{2b}(C_{F1}t/r). \tag{11}$$

Учитывая, что $\sigma = (\sigma_{r2} + \sigma_{\theta 2} + \sigma_{z2})/3 = -K(1-(\rho_0/\rho_{2b}))$ и $\sigma_{r2b} = -3K(1-(\rho_0/\rho_{2b}))/(1+\nu)$, граничные условия (5), (6) преобразуются в систему уравнений

$$\begin{cases} \rho_{2b}(C_{F1} - V_{2b}) = \rho_1 N_1; \\ \rho_{2b}V_{2b}(V_{2b} - C_{F1}) + 3K(1-(\rho_0/\rho_{2b}))/(1+\nu) = -\rho_1 V_{1b} N_1 - \sigma_{r1b}, \end{cases}$$

откуда можно найти V_{2b} и ρ_{2b} как функции ρ_1. Решение уравнения движения (2) таково:

$$\begin{aligned} &\sigma_r = \rho_2 V_{2b} C_{F1} + \rho_2 V_{2b}^2 C_{F1}^2 (t/r)^2 + \hat{C}_2 (t/r), \\ &\hat{C}_2 = C_{F1}(\sigma_{r2b} - \rho_2 V_{2b}(C_{F1} + V_{2b})). \end{aligned} \tag{12}$$

Зона измельченного материала ($h = V_c t \le r \le a$). Уравнения непрерывности и движения в этой зоне имеют такой же вид, что и (1), (2). Аналогично [1] измельченный материал рассматривается как среда, подчиняющаяся закону Кулона–Мора, без когезии, т.е. напряжения σ_{r3} и $\sigma_{\theta 3}$ связаны формулой [7]

$$\sigma_{r3} - \sigma_{\theta 3} = \mu(\sigma_{r3} + \sigma_{\theta 3}),$$

откуда

$$\sigma_{\theta 3} = \sigma_{r3}(1-\mu)/(1+\mu). \tag{13}$$

Тогда уравнение (2) может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial r} + 2\alpha \frac{\sigma_{r3}}{r} = \rho_3 \left(\frac{\partial V_3}{\partial t} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial r} \right), \qquad \alpha = \mu/(1+\mu). \tag{14}$$

Из уравнения непрерывности (1) получаем $V_3 = V_c^2 (t/r)$, и решение уравнения (14) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{r3} = \frac{\rho_3 V_c^2}{2\alpha} - \frac{\rho_3 V_c^4}{(2\alpha - 2)} \left(\frac{t}{r} \right)^2 + \hat{C}_3 \left(\frac{t}{r} \right)^{2\alpha}; \\ &\hat{C}_3 = C_{F2}^{2\alpha} \left(\sigma_{r3a} - \frac{\rho_3 V_c^2}{2\alpha} + \frac{\rho_3}{2\alpha - 2} \left(\frac{V_c}{C_{F2}} \right)^2 \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Запишем граничные условия динамической совместности на фронте разрушения $r = a$:

баланс масс

$$\rho_{3a}(V_{3a} - C_{F2}) = \rho_{2a}(V_{2a} - C_{F2}); \tag{16}$$

баланс импульса

$$\rho_{3a}V_{3a}(V_{3a} - C_{F2}) - \sigma_{r3a} = \rho_{2a}V_{2a}(V_{2a} - C_{F2}) - \sigma_{r2a}; \tag{17}$$

условие предельной скорости разрушения

$$C_{F2} - V_{2a} = N_2. \tag{18}$$

Из (11) и (18) следует уравнение для определения C_{F2}:

$$C_{F2}^2 - N_2 C_{F2} - V_{2b} C_{F1} = 0.$$

Видно, что модель имеет физический смысл, когда $V_c \le C_{F2} \le C_{F1} \le C$. Неравенство $C_{F2} \le C_{F1}$ можно записать как

$$N_1 - N_2 \ge V_{1b} - V_{2a}. \tag{19}$$

Если $C_{F1} = C_{F2}$, то область растресканного материала не возникает. Поскольку в модели $V_{2a} \ge V_{1b}$, $N_1 \ge N_2$, неравенство (19) означает, что условие $N_1 = N_2$ является необходимым, но не достаточным для отсутствия зоны растресканного материала. Необходимым и достаточным условием будет одновременное выполнение равенств $N_1 = N_2$ и $V_{2a} = V_{1b}$.

Рассмотрим систему уравнений (16), (17) после упрощений с помощью соотношения (18):

$$\begin{aligned} &\rho_3(C_{F2} - V_{3a}) = \rho_2 N_2; \\ &\rho_2 N_2 V_{3a} + \sigma_{r3a} = \rho_2 N_2 V_{2a} + \sigma_{r2a}. \end{aligned} \tag{20}$$

В этой системе неизвестными есть величины ρ_3, σ_{r3a}, ρ_1, так как C_{F2} зависит от ρ_1 (см. квадратное уравнение), а $V_{3a} = V_c^2 / C_{F2}$. Таким образом, необходимо замкнуть систему уравнений (20), дополнив ее еще одним независимым уравнением. Это замыкание можно сделать, добавив уравнение состояния для линейно-сжимаемой среды:

$$\sigma \equiv (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)/3 = -K(1 - \rho_0/\rho). \tag{21}$$

Из экспериментов по удару пластин следует, что (21) применимо, по крайней мере, при $-\sigma \le \dfrac{\text{HEL}}{3} \dfrac{(1+\nu)}{(1-\nu)}$. Для связи σ_r, σ_θ и σ_z аналогично [7] используем формулу

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2\sigma_z + 2G(1 - \rho_0/\rho). \tag{22}$$

Уравнение (21) с использованием (13) и (22) преобразуется к виду

$$\sigma_{r3a} = -0{,}5K(1 - (\rho_0/\rho_3))(1+\mu)(1+4\nu)/(1+\nu). \tag{23}$$

Следовательно, уравнения (20) и (23) образуют замкнутую систему уравнений для определения величин ρ_3, ρ_1 и σ_{r3a}. Из этой системы получается следующее уравнение для ρ_1:

$$\frac{2(1+\nu)}{K(1+\mu)(1+4\nu)}\left(\rho_2 N_2 \frac{V_c^2}{C_{F2}} - \rho_2 N_2 V_{2a} - \sigma_{r2a}\right) + \frac{\rho_0 (C_{F2}^2 - V_c^2)}{\rho_2 N_2 C_{F2}} - 1 = 0, \tag{24}$$

где $\rho_2, C_{F2}, V_{2a}, \sigma_{r2a}$ зависят от ρ_1. Из (24) очевидно, что ρ_1 зависит от скорости V_c.

После решения уравнения (24) ρ_3 определяется по формулам для V_3 и (20), затем по (23) – σ_{r3a}. Из формулы (15) теперь можно найти напряжение σ_c на границе полости:

$$\sigma_c = \sigma_{r3a}\left(\frac{C_{F2}}{V_c}\right)^{2\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{C_{F2}}{V_c}\right)^{2\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{C_{F2}}{V_c}\right)^{2\alpha - 2}\right)\frac{1}{2}\rho_3 V_c^2. \tag{25}$$

Учет сдвигового насыщения в разрушенном материале. Если имеет место сдвиговое насыщение разрушенного материала, т.е. $|\sigma_{r3} - \sigma_{\theta 3}| = 2\tau =$ $=\mathrm{const}$, то вместо уравнения движения (2) получим уравнение

$$\frac{d\sigma_{r3}}{d\xi} - \frac{2\tau}{\xi} = \rho_3 V_c^2 \xi^{-1} - \rho_3 V_c^4 \xi^{-3}, \qquad \xi = \frac{r}{t}. \tag{26}$$

Область разрушенного материала разделяется на две зоны: зона насыщения ($h \le r \le l$) с уравнением движения (26) и зона без сдвигового насыщения ($l \le r \le a$) с уравнением движения (2). Принимается, что распределение скоростей в обеих зонах задается формулой для V_3.

Скорость ξ_* границы подобласти $l = \xi_* t$ определяется из уравнения

$$-\tau = \alpha\sigma_{r3}(\xi_*), \qquad V_c \le \xi_* \le C_{F2}. \tag{27}$$

Для напряжения $\sigma_{r3}(\xi)$ в области сдвигового насыщения получаем следующее выражение:

$$\begin{gathered}\sigma_{r3}(\xi) = -\tau/\alpha + 2\tau\ln(\xi/\xi_*) + \rho_3 V_c^2 \ln(\xi/\xi_*) + 0{,}5\rho_3 V_c^4(\xi^{-2} - \xi_*^{-2}),\\ V_c \le \xi = r/t \le \xi_*,\end{gathered} \tag{28}$$

откуда при $\xi = V_c$ находим напряжение σ_c на границе полости:

$$\sigma_c = -\tau/\alpha + 2\tau \ln(V_c/\xi_*) + (0{,}5 + \ln(V_c/\xi_*) - 0{,}5(V_c/\xi_*)^2)\rho_3 V_c^2. \quad (29)$$

Таким образом, если формула (25) дает значения $\sigma_c < -(\tau/\alpha)$, это означает, что существует область насыщения, и вычисления следует проводить по (29).

Расчет давления на поверхности полости. На рис. 2 показана зависимость давления на поверхности полости от скорости движения поверхности. Там же для сравнения приведены кривые для модели расширения сферической полости [3]. Расчеты выполнены для керамики AD995 со следующими механическими характеристиками [1–3]: $E = 373{,}14$ ГПа; $K = 231{,}8$ ГПа; $Y = 2{,}62$ ГПа; $\sigma_f = 0{,}462$ ГПа; $\mu = 0{,}2$; $\rho = 3{,}89$ г/см^3; $\tau = 1{,}5$ ГПа. Поскольку для величин N_1 и N_2 экспериментальные результаты отсутствуют, для расчетов используются оценки, основанные на имеющихся данных [1, 2, 5, 6]: $N_1 = C_R = 5600$ м/с; $N_2 = 0{,}71 C_R = 3980$ м/с. Выбор коэффициента 0,71 обусловлен тем, что сдвиговые трещины растут под углом 45° к направлению движения фронта. Величина V_c^N на рис. 2 соответствует минимальной скорости расширения полости, при которой возникает динамическая перегрузка материала как в зоне *1*, так и в зоне *2*, связанная с ограниченностью скоростей фронтов разрушения: для керамики AD995 это соответственно 1095 и 633 м/с. Различие между цилиндрической и сферической полостями может быть вызвано бóльшей степенью стеснения в случае цилиндрической полости.

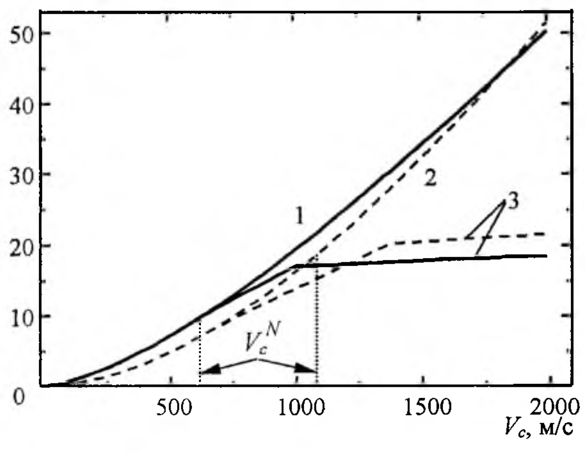

Рис. 2. Зависимость давления на поверхности полости P_c от скорости расширения: *1*, *2* – соответственно цилиндрическая и сферическая полости; *3* – то же с учетом сдвигового насыщения.

Авторы выражают благодарность Army Research Laboratory (США) за финансовую поддержку работы в рамках контракта DAAL001-98-M0075, а также д-ру Гучу и д-ру Блессу за плодотворные обсуждения результатов.

Р е з ю м е

На основі концепції граничних швидкостей фронтів руйнування розглянуто розширення циліндричної порожнини в крихкому матеріалі. Отримано розв'язки крайових задач для областей з різним станом матеріалу. Наведено залежність тиску розширення циліндричної порожнини від швидкості розширення в кераміці в порівнянні зі сферичною порожниною.

1. *Satapathy S. and Bless S. J.* Calculation of penetration resistance of brittle materials using spherical cavity expansion analysis // Mech. Mater. – 1996. – **23**. – P. 323 – 330.
2. *Satapathy S.* Application of Cavity Expansion Analysis to Penetration Problems. IAT.R0136. – Institute for Advanced Technology, University of Texas at Austin, 1997.
3. *Kartuzov V. V., Galanov B. A., and Ivanov S. M.* Concept of ultimate fracture velocity in the analysis of spherical cavity expansion in brittle materials: application to penetration problems // Int. J. Impact Eng. – 1999. – **23**. – P. 431 – 442.
4. *Иванов С. М., Картузов В. В., Галанов Б. А., Трефилов В. И.* Особенности динамического разрушения хрупких материалов в режиме предельных скоростей фронтов разрушения // Пробл. прочности. – 2000. – № 2. – С. 19 – 26.
5. *Николаевский В. Н.* О динамике фронтов разрушения в хрупких телах // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 5. – С. 106 – 115.
6. *Галанов Б. А., Григорьев О. Н., Картузов В. В. и др.* Ударное разрушение керамических пластин // Порошк. металлургия. – 1989. – № 4. – С. 63 – 71.
7. *Сагомонян А. Я.* Проникание. – М.: Изд. МГУ, 1974. – С. 173.

Поступила 14. 11. 2001