

УДК 532.525.2

ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ ЖИДКОСТИ В КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВЕРХНЕЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ КРЫШКИ

Е. В. БРУЯЦКИЙ, А. Г. КОСТИН, Е. И. НИКИФОРОВИЧ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 16.04.2008

На основе полных нестационарных уравнений Навье–Стокса, записанных в физических переменных скорость–давление, решается задача о вынужденном движении несжимаемой жидкости внутри квадратной полости под воздействием движущейся верхней крышки. Численно исследованы особенности возникающих возвратных и рециркуляционных вихревых течений в полости в зависимости от числа Рейнольдса. Полученные предлагаемым методом результаты расчетов полей скоростей и давления сравниваются с известными экспериментами и результатами расчетов, полученными другими методами и другими авторами.

На основі повних нестационарних рівнянь Нав'є–Стокса, записаних у фізичних змінних швидкість–тиск, вирішена задача про змушений рух нестислої рідини всередині квадратної порожнини під дією верхньої кришки, яка рухається. Чисельно досліджені особливості виникаючих зворотних та рециркуляційних вихрових течій в порожнині в залежності від числа Рейнольдса. Одержані запропонованим методом результати розрахунків полів швидкостей та тиску порівнюються з відомими експериментами і результатами розрахунків, які одержані іншими методами і іншими авторами.

Based on full non-stationary Navier-Stokes equations in velocity-pressure variables, a problem is solved on a forced motion of incompressible fluid initiated by a moving upper wall in a square. Peculiarities are investigated numerically of arising reciprocal and recirculating vortical flows in the cavity depending on the Reynolds number. Calculated velocity and pressure fields using the developed method are compared with known experimental and numerical results obtained by different authors and methods.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости на основе решения полных уравнений Навье–Стокса проводились разными исследователями. При этом из-за трудностей определения поля давления исходная система уравнений использовалась в трех вариантах: когда исходные уравнения движения записываются в переменных вихрь–функция тока, в физических переменных скорость–давление и в переменных скорость–завихренность. Преимущества и недостатки каждого из этих подходов хорошо известны [1–4]. В большинстве случаев использовалась система уравнений функция тока–вихрь. Основное преимущество такого подхода состоит в возможности исключения давления из системы исходных уравнений. Основным недостатком является трудность постановки граничных условий для вихря скорости и отсутствие возможности обобщения этого подхода на трехмерные задачи и турбулентные режимы течения.

В настоящее время для численного решения уравнений Навье–Стокса существуют и используются несколько десятков разновидностей разностных схем. Поиски наилучших разностных схем интенсивно продолжаются. Недавно в на-

шей работе [5] предложен эффективный метод численного решения полных нестационарных уравнений Навье–Стокса в физических переменных скорость–давление для несжимаемой жидкости. Общий принцип решения основывается на синтезе идей MAC метода Ф. Х. Харлоу [6, 7] и модифицированного варианта SIMPLE метода С. В. Патанкара, П. В. Сполдинга [8, 9]. Особенность метода состоит в использовании разнесенных сеток и построении универсального дискретного аналога ламинарных течений. В указанной работе метод тестировался на примере расчета течения на начальном участке стабилизации внутри плоского прямолинейного канала [5].

Данная статья посвящена дальнейшей апробации полученного универсального дискретного аналога ламинарных течений для расчетов более сложных течений, содержащих возвратные рециркуляционные области течения. Чтобы успешно решить поставленную задачу, необходимо сравнить результаты расчетов, полученные данным методом с известными решениями, полученными другими авторами другими методами. Для этого важно выбрать подходящую модельную задачу, которая бы уже решалась как в переменных функция тока–вихрь, так и в переменных скорость–давление. В качестве такой модельной задачи удо-

бно рассмотреть течение в квадратной полости под воздействием движущейся верхней крышки. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что это течение обладает набором структурных особенностей возвратных и рециркуляционных вихревых течений. Кроме того, локализация течения в квадратной расчетной области практически снимает вопрос о постановке граничных условий для скорости в силу очевидных условий прилипания и непротекания жидкости на границах расчетной области.

Первоначально для решения этой задачи применялись явные схемы решения уравнений Навье-Стокса в переменных функция тока-вихрь ($\Psi - \Omega$), а аппроксимация производных осуществлялась с помощью центральных разностей. При этом аппроксимация граничных условий на твердой стенке для завихренности удовлетворяла условию Тома [2], то есть имела первый порядок точности. Установившиеся решения задачи были получены лишь при низких числах Рейнольдса ($Re < 100$), поскольку с ростом числа Re развивалась вычислительная неустойчивость, свойственная центрально-разностным схемам.

Kawaguti M. [10], используя простейший компьютер (1961), получил численное решение этой задачи в переменных ($\Psi - \Omega$) для числа Рейнольдса, равного $Re=64$. Для числа $Re=128$ его решение уже "разваливалось". O. R. Burggraf [11] подробно исследовал эту задачу также в переменных ($\Psi - \Omega$) и получил результаты при числах $Re \leq 400$.

В дальнейшем улучшить сходимость расчетной процедуры удалось благодаря использованию аппроксимации конвективных слагаемых односторонними разностями "против потока" [12]. Однако, из-за появления при этом значительной величины численной вязкости, удовлетворительные результаты получились лишь до чисел $Re < 300$. Другие исследователи J. D. Vozeman [12], Атиас, Вольфштейн, Израэль [13], S. Abdalah [14, 15], D. V. Davis, G. D. Mallison [16], И. А. Белов, С. А. Исаев [17], А. А. Приходько [4] также использовали эту задачу в качестве модельной для проверки новых численных схем. Это вполне понятно, так как по этой задаче имеются результаты подробных численных расчетов [11] и качественные экспериментальные данные R. D. Mills [18], Pan F. Acrivos A. [19]. Позднее более успешным оказалось использование нестационарных уравнений Навье-Стокса и их решение на установление методом "переменных направлений" [3, 20–22]. Такой подход позволил получить установившиеся решения задачи уже до чисел $Re \leq 1000$.

В работе К. Н. Гхиа, В. Л. Хэнки, Дж. К. Ходж [23] эта задача решалась в переменных

скорость-давление ($V - P$). Авторы отмечают сложность расчета давления. Для его определения они использовали уравнение Пуассона в форме, которая получается применением операции дивергенции к уравнениям количества движения. В качестве граничных условий для давления использовались однородные условия Неймана $\partial P / \partial n = 0$. Возникающие при этом сложности существования сходящегося решения обсуждались в работах [14, 15, 23, 24], где была показана необходимость удовлетворить в этом случае некоторому интегральному условию. В целом, анализ рассмотренных и других решений показывает, что в угловых зонах полости имеются вихревые особенности, имеющие тонкую структуру, расчет которой связан с определенными вычислительными трудностями. Качество моделирования и расчета этих вихревых структур зависит от особенностей используемой разностной схемы и числа Рейнольдса.

Дальнейший прогресс в этом направлении в основном шел по пути использования неравномерных сеток с увеличением и сгущением узлов в зонах с большим градиентом искомых переменных. В работе И. А. Белова, С. А. Исаева, В. А. Коробкова [25] дано обобщение результатов исследований циркуляционного движения жидкости в квадратной полости с подвижной крышкой и представлен один из алгоритмов решения уравнений Навье-Стокса, записанных в естественных физических переменных скорость-давление. Там же приведены оригинальные результаты расчетов течения на равномерной сетке с количеством ячеек 40×40 .

Рассмотренные работы не исчерпывают полный перечень численных исследований этой задачи. К ним можно добавить более поздние работы [4, 26] и другие. Таким образом численное решение задачи о вынужденной конвекции в квадратной полости с движущейся верхней крышкой на протяжении многих лет служит объектом верификации новых и модифицированных разностных схем.

Цель данной работы заключается в том, чтобы на примере расчета структуры вихревого циркуляционного течения в двухмерной полости тестировать эффективность предложенного численного метода решения полных нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим двумерную задачу о движении вязкой жидкости в замкнутой квадратной полости с движущейся верхней крышкой. Такое течение относи-

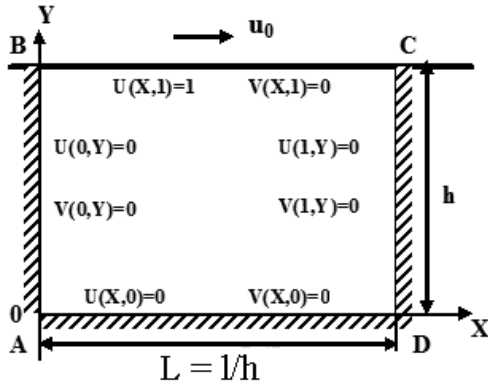


Рис. 1. Область интегрирования и граничные условия

тся к классу вынужденных конвективных движений жидкости. В общем случае горизонтальный размер расчетной области D обозначим через l , а вертикальный через h . Принципиальная схема рассматриваемого течения и принятые обозначения представлены на рис. 1. Начало декартовой прямоугольной системы координат O расположено в левом нижнем углу. При $l = h$ имеем квадратную область ($L = l/h = 1$).

Специфика задачи состоит в том, что три граничные стенки AB, AD, DC расчетной области $ABCD$ неподвижны, а четвертая верхняя стенка BC движется с постоянной скоростью u_0 слева направо, как показано на рис. 1. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ жидкость всюду покоится, а при $t > 0$ верхняя крышка BC приходит в движение со скоростью u_0 . Движение жидкости будем описывать нестационарными двумерными уравнениями Навье-Стокса в переменных скорость–давление. В качестве масштаба длины выберем вертикальный размер полости h , скорость движения верхней крышки u_0 примем за масштаб скорости, за масштаб времени примем величину $t_0 = h/u_0$, а за масштаб давления примем скоростной напор $\rho_0 u_0^2$. Тогда в безразмерных переменных систему нестационарных уравнений движения Навье-Стокса в прямоугольной декартовой системе координат можно записать в следующей консервативной тензорной форме [27]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_i}{\partial \tau} &= -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \\
 + \frac{\partial}{\partial X_k} &\left[-V_i V_k + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial V_i}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k}{\partial X_i} \right) \right], \quad (1) \\
 \frac{\partial V_k}{\partial X_k} &= 0.
 \end{aligned}$$

Здесь по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование. Такая компактная запись исходных уравнений позволяет рассматривать и трехмерные течения. Для рассматриваемой двумерной задачи $i, k = 1, 2$; $X_1 = X$; $X_2 = Y$; $V_1 = U$; $V_2 = V$. При этом $U = u/u_0$; $V = v/u_0$; $X = x/h$; $Y = y/h$; $\tau = t u_0/h$; $P = p/\rho_0 u_0^2$.

Основным параметром задачи служит число Рейнольдса $Re = u_0 h/\nu$. Заметим, что давление P в рассматриваемой системе уравнений не является основной переменной. Для завершения постановки задачи должны быть заданы граничные условия. В данной задаче они состоят в том, что на твердых поверхностях должны выполняться очевидные условия прилипания и непротекания жидкости. Следовательно, на границах области имеем:

$$U|_{AB} = 0; \quad U|_{BC} = 1; \quad U|_{CD} = 0; \quad U|_{AD} = 0; \quad (2)$$

$$V|_{AB} = 0; \quad V|_{BC} = 0; \quad V|_{CD} = 0; \quad V|_{AD} = 0. \quad (3)$$

В процессе решения задачи необходимо рассчитать установившуюся картину полей скорости и давления в зависимости от числа Рейнольдса.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Общий принцип используемого метода решения уравнений Навье-Стокса рассмотрен в нашей работе [5]. Решение системы исходных нестационарных уравнений (1) выполняется методом конечных разностей на установление. Конечно-разностные аналоги рассматриваемых уравнений строятся на пятиточечном шаблоне в соответствии с известной схемой "крест" [28, 29]. Из-за сложностей согласования полей скорости и давления конечно-разностные аппроксимации реализуются на сетке с разнесенной структурой расположения сеточных узлов для зависимых переменных. Это означает, что компоненты скоростей и давления определяются в разных узлах. Такой подход аналогичен методу MAC [7] и дает определенные преимущества при расчете поля давления.

Для дискретизации исходных уравнений в пространстве (X, Y, τ) вводится основная прямоугольная сетка $S_0(X_j, Y_i, \tau^n)$, состоящая из точек

$$X_j = X_0 + j \cdot \Delta x, \quad Y_i = Y_0 + i \cdot \Delta y, \quad \tau^n = n \cdot \Delta \tau,$$

и две вспомогательные полуцелые сетки S_1 и S_2 :

$$S_1(X_{j+1/2}, Y_i, \tau^n), \quad X_{j+1/2} = X_0 + (j + 1/2) \cdot \Delta x, \\ Y_i = i \cdot \Delta y, \\ S_2(X_j, Y_{i+1/2}, \tau^n), \quad X_j = j \cdot \Delta x, \\ Y_{i+1/2} = Y_0 + (i + 1/2) \cdot \Delta y.$$

В соответствии с выбранным сеточным шаблоном вводятся следующие обозначения:

$$P(X_j, Y_i, \tau^n) = P_{j,i}^n \\ U((j + 1/2) \cdot \Delta x, i \cdot \Delta y, n \cdot \Delta \tau) = U_{j+1/2,i}^n \\ V(j \cdot \Delta x, (i + 1/2) \cdot \Delta y, n \cdot \Delta \tau) = V_{j,i+1/2}^n.$$

Вся расчетная область разбивается на прямоугольные ячейки. Схема расположения ячеек и узлов приведена на рис. 2 в работе [5]. В узлах основной сетки расположены сеточные функции давления $P_{j,i}$. Сеточные функции компонент скорости находятся на серединах граней контрольных объемов, то есть в узлах вспомогательных полупелых сеток $S_1(j + 1/2, i)$ и $S_2(j, i + 1/2)$ соответственно. Шаги сеток hx_j и hy_i могут быть как равномерными, так и переменными в обоих направлениях сетки: $\Delta x = 0,5(hx_j + hx_{j+1})$, $\Delta y = 0,5(hy_i + hy_{i+1})$, $hx_1 = (hx_j + hx_{j+1})$, $hy_1 = (hy_i + hy_{i+1})$.

Внешние границы расчетной области выбираются с учетом совпадения граней внутренних приграничных ячеек с физическими границами области, где задаются граничные условия для компонент скорости. При таком подходе сеточные функции давления находятся внутри расчетной области и не попадают на физическую границу D_h , что позволяет согласовать поля скорости и давления.

Для конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений движения и неразрывности используются обычные схемы первого порядка точности для производных по времени и второго порядка точности для производных по пространству. При этом диффузионные слагаемые аппроксимируются по схеме с центральными разностями, а для конвективных слагаемых используются схемы с односторонними разностями "против потока". Особенностью дискретизации является то, что конечно-разностные аппроксимации центрируются в соответствии с выбранным шаблоном. При этом сеточные индексы для зависимых переменных оказываются сдвинутыми.

Подстановка конечно-разностных формул в исходную систему уравнений движения после простых преобразований позволяет записать их дискретные аналоги для X и Y направлений соответственно. Полученные разностные алгебраические

уравнения, разрешенные относительно соответствующих компонент скорости $U_{j+1/2,i}^{n+1}$ и $V_{j,i+1/2}^{n+1}$ и дополненные уравнением неразрывности, преобразуются к следующему конечно-разностному виду:

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = \frac{[\Delta y \cdot (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U]}{d_{j+1/2,i}^U}, \quad (4)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = \frac{[\Delta x \cdot (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V]}{d_{j,i+1/2}^V}, \quad (5)$$

$$\frac{U_{j+1/2,i}^{n+1} - U_{j-1/2,i}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{V_{j,i+1/2}^{n+1} - V_{j,i-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \quad (6)$$

где выражения G и d с соответствующими нижними и верхними индексами являются известными величинами по данным с предыдущего шага.

Полученная система уравнений связывает между собой искомые компоненты скорости и давления. Однако эта система пока содержит неизвестные слагаемые с градиентом давления. Поэтому для получения недостающего уравнения для определения давления используется уравнение неразрывности (6). Учитывая его структуру, понизим предварительно в выражениях для скоростей $U_{j+1/2,i}^{n+1}$ и $V_{j,i+1/2}^{n+1}$ соответственно индексы j и i на единицу. Тогда получим необходимые выражения для $U_{j-1/2,i}^{n+1}$ и $V_{j,i-1/2}^{n+1}$. Подставляя соответствующие выражения для компонент скорости в уравнения неразрывности (6), получаем выражение, в котором неизвестными величинами являются лишь сеточные функции давления. Выполнив простые алгебраические преобразования для функции давления в узле с номером (j, i) и окружающих его узлах, найдем следующий конечно-разностный аналог для определения давления в виде замаскированного разностного уравнения Пуассона:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P(j, i), \quad (7)$$

где соответствующие коэффициенты дискретизации и свободный член $f^P(j, i)$ – известные величины по результатам предыдущего шага. В итоге полученное уравнение Пуассона (7) для давления заменяет уравнение неразрывности и решается на текущем временном слое.

Приведенная система конечно-разностных алгебраических уравнений (4), (5) и (7) носит фундаментальный характер и является универсальным

дискретным аналогом системы полных нестационарных уравнений Навье-Стокса. Важной особенностью полученного разностного уравнения Пуассона (7) оказывается то, что благодаря использованию разнесенных сеток, граничные условия для его решения не требуются, так как значение давления в приграничных узлах может быть определено из уравнений движения в комбинации с граничными условиями для компонентов скоростей [31]. Решение полученной системы разностных алгебраических уравнений осуществляется известными итерационными методами. В настоящем методе компоненты скорости и давления расщеплены так, что на любом этапе расчета решаются уравнения относительно одной зависимой переменной. Это упрощает применение стандартных методов решения интересующих нас систем линейных алгебраических уравнений. Эффективным способом решения рассматриваемого двумерного разностного уравнения второго порядка для давления является его редукция к двум одномерным системам уравнений второго порядка с трехдиагональными матрицами, которые решаются методом “прогонки” [29]. В зарубежной литературе его часто называют алгоритмом Томаса [1, 30].

В данном методе расчеты проводятся для двух основных физических переменных – скорости и давления. Итерационный вычислительный процесс состоит из шагов по времени. В начале каждого временного цикла предполагаются известные поля скорости и давления. Вычислительная процедура выполняется в следующей последовательности. При заданных на предыдущем временном шаге значениях $U_{j+1/2,i}^n$ и $V_{j,i+1/2}^n$ по соответствующим алгебраическим формулам рассчитываются коэффициенты дискретизации $G_{j+1/2,i}^U(U^n, V^n)$, $G_{j+1/2,i}^V(U^n, V^n)$, $d_{j+1/2,i}^U(U^n, V^n)$, $d_{j,i+1/2}^V(U^n, V^n)$, $d_{j,i}^P$, c_1^P , c_0^P , b_1^P , b_0^P , включая свободный член $f^p(j, i)$. Определив таким образом коэффициенты уравнения Пуассона, путем его решения находится поле давления $P_{j,i}^{n+1}$. Далее, зная коэффициенты дискретизации и поле давления $P_{j,i}^{n+1}$, по уравнениям (4), (5), рассчитываются поля скорости $U_{j+1/2,i}^{n+1}$, $V_{j,i+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ шаге. На этом первый временной цикл заканчивается и далее он повторяется. Задача решается на установление. Критерием окончания решения служит условие, когда максимальная разность между значениями искоемых переменных на предыдущем и следующем временном шаге не превышает заданную величину ошибки ε .

Важным моментом расчетов является контроль за выполнением уравнения неразрывности. Опи-

санный алгоритм решения системы двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса реализован в виде компьютерной программы.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Некоторые результаты численного расчета структуры вынужденного течения однородной жидкости в квадратной полости с движущейся верхней крышкой представлены ниже на соответствующих рисунках. Основные численные расчеты были выполнены на равномерной сетке 50×50 , хотя исследовались и другие варианты, включая переменность шага в обоих направлениях. Шаг по времени варьировался в зависимости от числа Рейнольдса.

В качестве примера на рис. 2 приведены результаты расчетов векторного поля скоростей течения жидкости в квадратной полости при четырех различных числах Рейнольдса ($Re=100, 400, 1000, 2000$). Эти рисунки наглядно демонстрируют влияние числа Рейнольдса на кинематическую структуру течения в квадратной полости с движущейся верхней крышкой.

Из рисунков видно, что в полости образуется большая вихревая область при всех четырех значениях числа Рейнольдса. Зона с наибольшей интенсивностью течения расположена в верхней части расчетной области, прилегающей к границе BC . Здесь жидкость увлекается крышкой в силу условий вязкого прилипания. Далее расчеты показывают, что, в силу условия неразрывности, внутри самой полости образуется течение, направленное вниз у правой стенки D и восходящее вверх у левой стенки AB . Из-за движения верхней крышки слева-направо общая картина вихревого поля скоростей несимметрична. На приведенных рисунках видно, что центр вихря (точка стогнации) смещается вправо и находится выше геометрического центра полости. С увеличением числа Рейнольдса происходит смещение центра вихря вниз до чисел $Re=1000$, а при $Re=2000$ визуально картина течения почти такая же, как и при $Re=1000$.

На рис. 3 при тех же четырех числах Рейнольдса ($Re=100, 400, 1000, 2000$) представлены расчетные изолинии равных скоростей, которые подобно функциям тока иллюстрируют интенсивность структуры течения в полости. Полученная расчетом детальная кинематическая структура течения согласуется с ранее полученными результатами в работах [11, 18, 31]. Интересно отметить, что согласно многим численным решениям в нижних углах полости даже при числах $Re=1$ должны по-

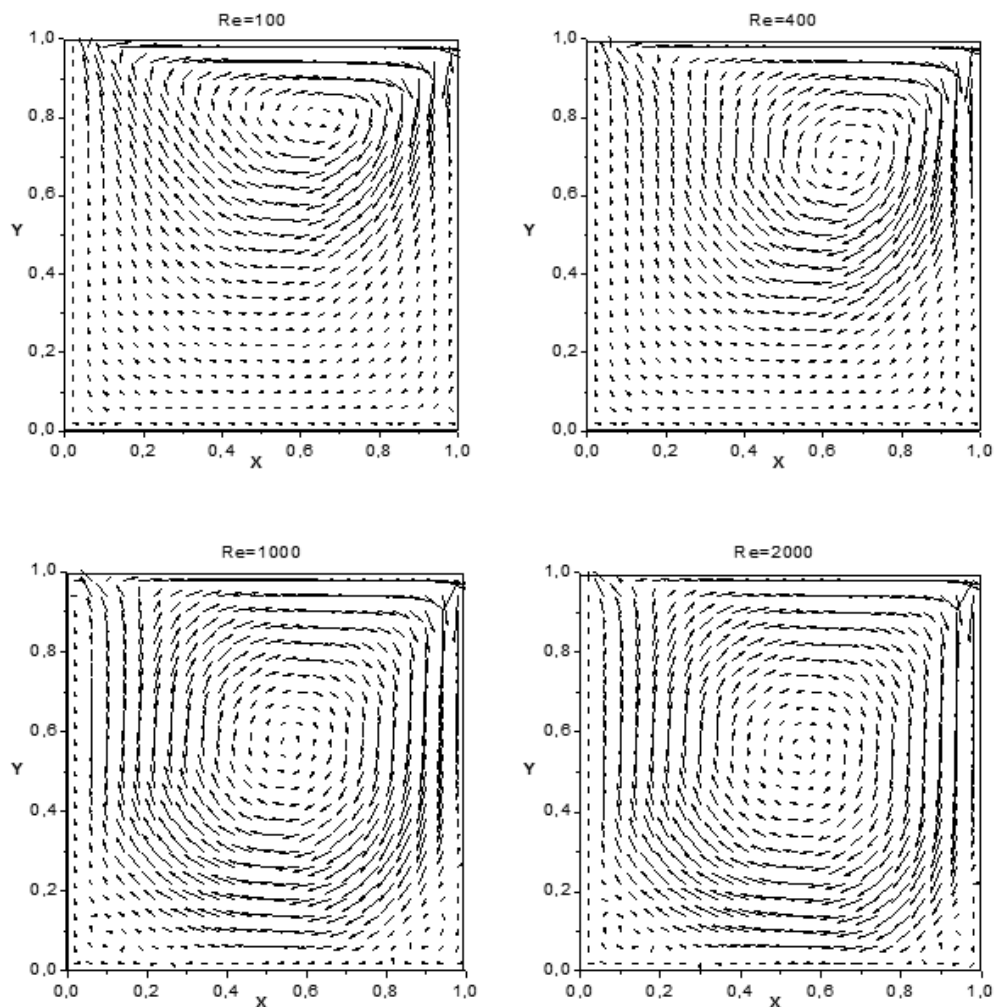


Рис. 2. Расчетное векторное поле скоростей в квадратной полости при четырех различных числах Рейнольдса ($Re=100, 400, 1000, 2000$)

являться вторичные вихревые течения. В связи с этим отметим, что в наших численных исследованиях эти вторичные вихри обнаруживаются лишь при числе $Re=2000$. Очевидно, что если эти скорости существуют, то они очень малы.

Поскольку исходные уравнения движения записаны и решаются в переменных скорость–давление, то это позволяет в процессе решения сразу рассчитывать поле давления в полости.

На рис. 4 изображены расчетные изобары поля давления. Расчетная картина приведенных изолиний давления представляет особый интерес, так как она получена в результате решения точных двумерных уравнений Навье–Стокса и может слу-

жить основой для верификации приближенных решений.

Для оценки достоверности получаемых результатов был проведен сравнительный анализ рассчитанных полей давления с аналогичными данными, приведенными в работе [23]. В целом наблюдается их хорошее согласие, однако наши изобары имеют более детальную структуру и рассчитаны до чисел $Re=2000$.

На рис. 5 разными линиями представлены расчетные профили горизонтальной компоненты скорости U в сечении $X=0,5$ и вертикальной компоненты скорости V в сечении $Y=0,5$, проходящих через геометрический центр квадратной полости

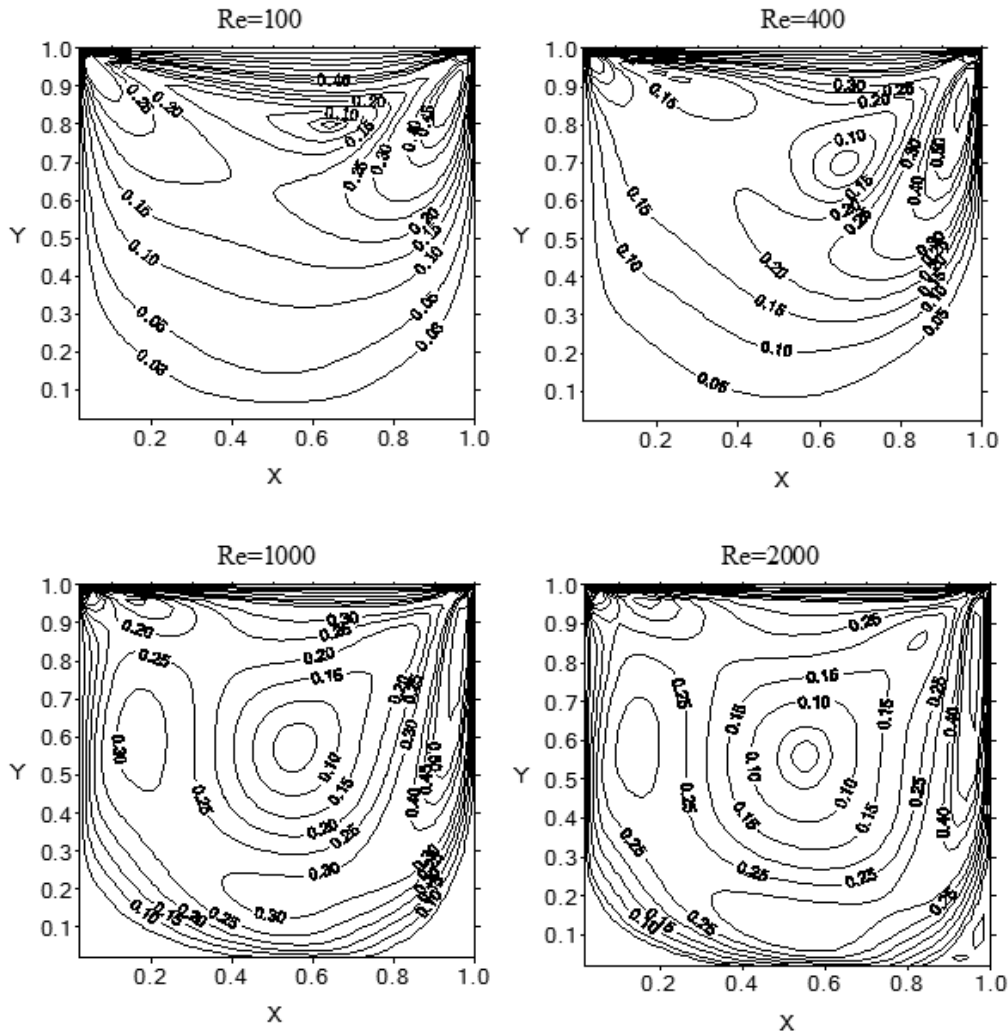


Рис. 3. Расчетные изолинии равных скоростей в квадратной полости при четырех различных числах Рейнольдса ($Re=100, 400, 1000, 2000$)

(слева) и через центры соответствующих вихрей (справа) при трех различных числах Рейнольдса ($Re=100, 400, 1000$). Проведенное сравнение этих расчетных кривых с данными работ [18, 23] показывает их хорошее соответствие. В частности, из рис. 5 можно легко определить координаты X_c и Y_c центров основных вихрей для различных чисел Рейнольдса. Аналогичные данные были получены в результате анализа расчетов, приведенных в работе [23]. Для сравнения они выписаны ниже в виде таблицы, в которой во втором и четвертом столбцах приведены наши данные, а в третьем и пятом – данные работы [23]. Сопоставление значений этих координат показывает их хорошее совпадение при числах $Re=100$ и $Re=1000$,

а при $Re=400$ наблюдается значительное отклонение. Обратим внимание, что центры координат вихрей с ростом числа Рейнольдса в нашем случае меняются монотонно, в отличие от работы [23].

Табл. 1.

Re	X_c	X_c [23]	Y_c	Y_c [23]
100	0.66	0.6	0.8	0.75
400	0.64	0.59	0.7	0.81
1000	0.54	0.56	0.58	0.52

В целом приведенные результаты расчета, их анализ и сопоставление с результатами других работ свидетельствуют об эффективности используемого метода для решения сложных задач с цир-

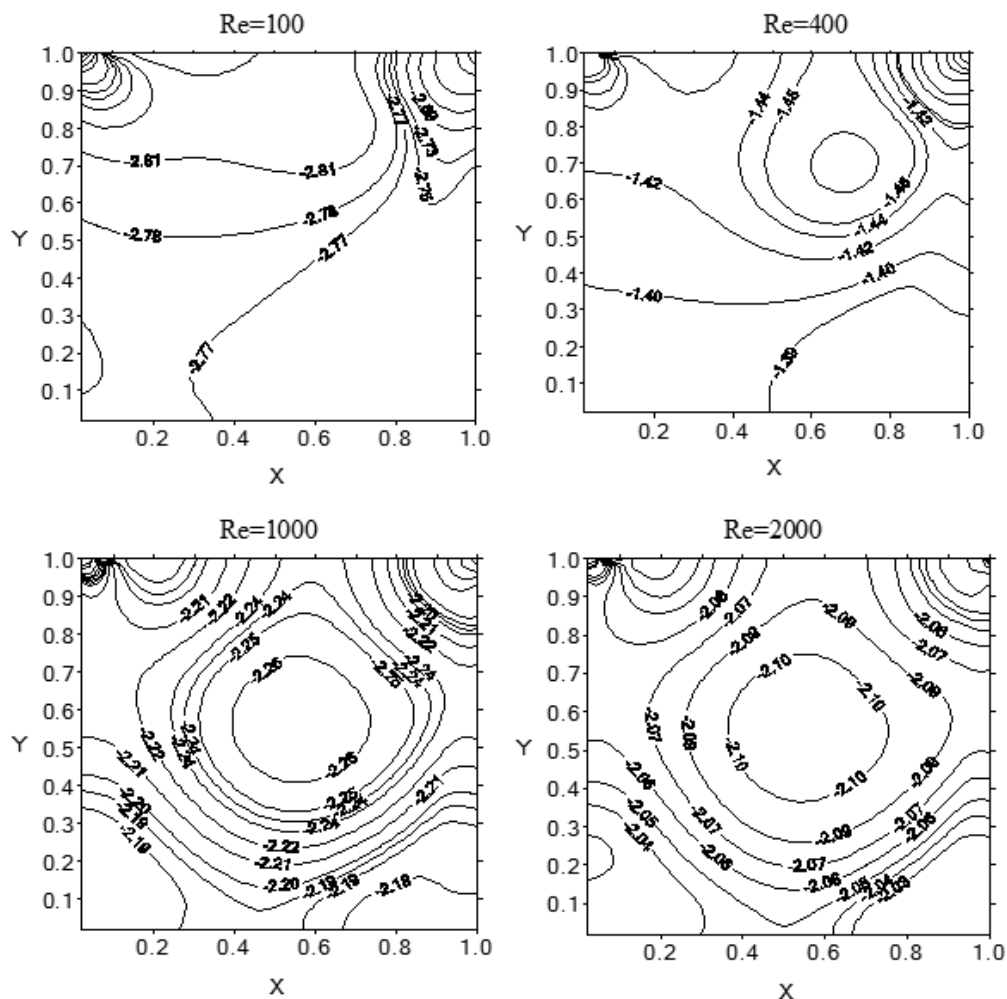


Рис. 4. Расчетные изолинии равных давлений (изобары) в квадратной полости при четырех различных числах Рейнольдса ($Re=100, 400, 1000, 2000$)

куляционными областями течения.

В заключение отметим, что в данной работе не ставилась цель проанализировать преимущества предлагаемого метода решения системы уравнений Навье-Стокса в физических переменных скорость-давление по сравнению с аналогичными методами или методами, использующими переменные функция тока-вихрь. Однако заметим, что используемый алгоритм интегрирования рассматриваемой системы уравнений осуществляется всего за три этапа, которые выполняются в одном временном цикле. При этом метод расчета свободен от вычислительных трудностей, связанных с определением давления и введением поправок для выполнения условий солейдальности поля скоростей.

ВЫВОДЫ

Предложенный ранее метод решения системы нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление [5] апробирован на примере решения стандартной тестовой задачи о вынужденной конвекции жидкости в квадратной полости с движущейся верхней крышкой. Метод обеспечивает согласование полей скоростей и давления как для малых, так и для умеренных чисел Рейнольдса. Выполненные расчетные исследования показывают, что предложенная численная схема и алгоритм решения дают возможность решать сложные задачи, где встречаются области с возвратными вихревыми течениями. Используемый универсальный дискретный аналог ламинар-

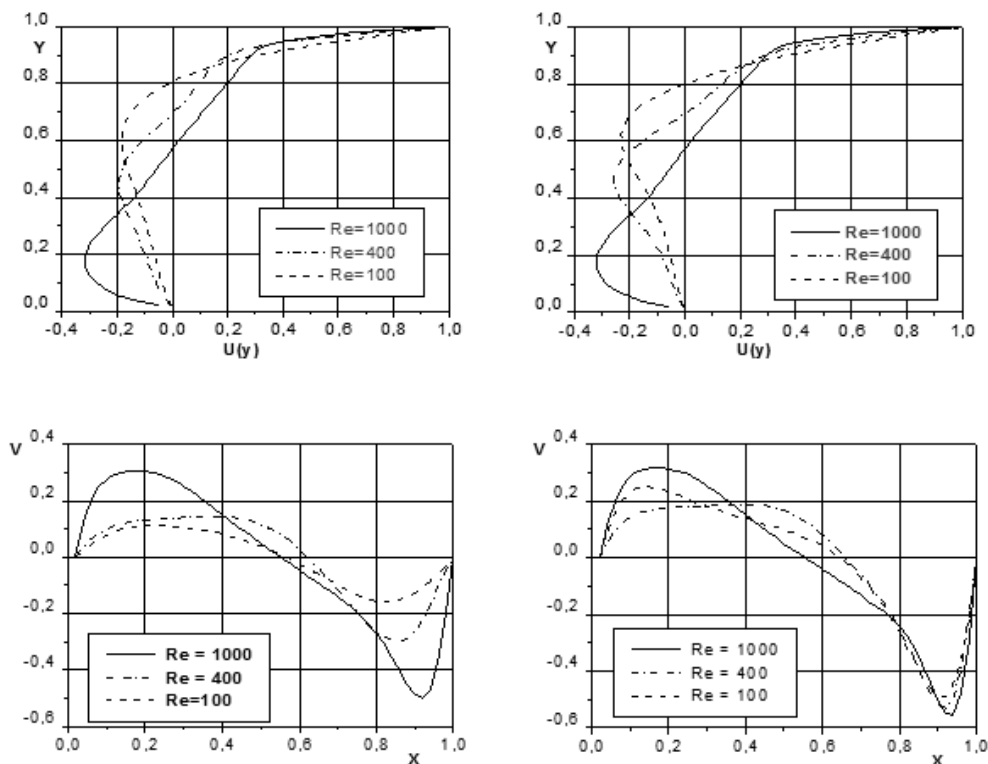


Рис. 5. Расчетные профили горизонтальной U и вертикальной V скоростей, проходящих через геометрический центр квадратной полости (слева) и через центры вихрей (справа) при трех различных числах Рейнольдса ($Re=100,400,1000$)

ных течений позволяет точно выполнить граничные условия прилипания и непротекания жидкости на твердых стенках и обеспечивает быструю сходимость решения. При этом достигается высокое качество моделирования физических процессов до чисел Рейнольдса $Re \leq 2000$.

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. – Т. 1, 384 с. Т. 2, 392 с.
2. Роч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
3. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
4. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и теплообмене. – Киев: Наук.думка, 2003. – 382 с.
5. Бруязцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И., Розумнюк Н.В. Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скоростях // Прикладна гідромеханіка. – 2008. – 10(82). – С. N2.13-23

6. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. – 1965. – 8–12. – P. 2182–2189.
7. Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики; Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – 316–342 с.
8. Patankar S.V., Spalding P.V. Calculation Procedure for Heat, Mass, and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows // Int.j.Heat and Mass Transfer. – 1972. – 15. – P. 1787–1806.
9. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: 1984, Энергоатомиздат. – 152 с.
10. Kawaguti M. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for the Flow in a Two-Dimensional Cavity // J. Physical Soc. of Japan. – 1961. – v. 16. – P. 2307–2315.
11. Burggraf O.R. Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows // J. Fluid. Mech. – 1966. – v.24.-№1. – P. 113–151.
12. Bozeman J.D., Dalton C. Numerical Study of Viscous Flow in a Cavity J. Comput. Physics // 1973. – v. 12, № 3. – 348–363. – P.

13. Атиас, Вольфштейн, Израэль Эффективность численных методов решения уравнений Навье-Стокса // Ракетн. Техн. и космонавтика.– 1977.– т. 15, № 2.– С. 161–164.
14. Abdallah S. Numerical solution for the pressure Poisson equation with Neumann boundary conditions using a non-staggered grid // I, J. Comput. Phys.– 70.– 1 (1987).– P. 182–192.
15. Abdallah S. Numerical solution for the incompressible Navier-Stokes equations using a non-staggered grid // II, J. Comput. Phys.– 70, 1.– 1987.– P. 193–202.
16. De Vahl Davis G., Mallison G.D. An Evaluation of Upwind and Central Difference Approximations by a Study of Recirculating Flow // Computers of Fluids.– 1976.– v. 4.– P. 29–43.
17. Белов И.А., Исаев С. А. Циркуляционное движение жидкости в прямоугольной каверне при средних и высоких числах Рейнольдса // Журн. прикл. техн. физ.– 1981.– № 1.– С. 41–45.
18. Mills R.D. Numerical Solutions of the Viscous flow Equations in a Class of Closed flows // J. of Royal Aeronaut. Society.– 1965.– v.69.– P. 714–718.
19. Pan F. Acrivos A. A study flow in Rectanqular Cavities // J. Of Fluid Mech.– 1967.– v. 28.– P. 4.643–655
20. Численные методы в механике жидкости Под ред. О.М. Белоцерковского// М.: Мир.– 1973.– 304 с.
21. Peaceman D.W., Rachford H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. Soc. Indust. Appl. Math.– 1955.– V. 3, №1.– P. 28–41.
22. Douglas J., Gunn J.E. A general formulation of alternating direction implicit methods. Pt. 1. Parabolic and hyperbolic problems // Numer. Math.– 1964.– V.6,№5.– P. 428–453.
23. Гхиа К.Н, Хэнки В.Л., Ходж Дж.К. Решение уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в обычных переменных // Ракетная техника и космонавтика.– 1979.– №3.– С. 89–92.
24. Easton C.R. Homogeneous boundary conditions for pressure in MAC method // J. Comput. Phys.– 1972.– v.9,№ 2.– P. 375–379.
25. Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости.– М.: Судостроение, 1989.– 256 с.
26. Быстров Ю.А., Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Леонтьев А.И. Численное моделирование интенсификации теплообмена в пакетах труб.– СПб: Судостроение, 2005.– 392 с.
27. Бруязцкий Е.В. Турбулентные стратифицированные струйные течения.– Киев: Наукова думка, 1986.– 296 с.
28. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред.– 2-е изд., перераб. и доп.: М., Физматлит.– 1994 с.448
29. Самарский А.А. Теория разностных схем.– М.: Наука, 1977.– 656 с.
30. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей.– М.: Мир, 1991.– 1 с.5012552
31. Госмен А.М., Пан В.М., Ранчел А.К. и др. Численные методы исследования течений вязкой жидкости.– М.: Мир, 1972.– 323 с.