УДК 517.977

И.И. МАТИЧИН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассматриваются неоднородные линейные системы дифференциальных уравнений с классическими дробными производными Римана–Лиувилля и регуляризованными дробными производными Капуто. При помощи преобразования Лапласа получены представления решений таких систем в виде аналогов формулы Коши при произвольных измеримых ограниченных функциях времени в правой части.

Введение. При решении задач математической теории управления и теории динамических игр для систем дифференциальных уравнений как целого, так и дробного порядка, важную роль играют аналитические представления решений таких систем. В настоящей работе методом интегральных преобразований получены аналитические формулы, описывающие решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля и Капуто [1, 2]. Показана эквивалентность полученных решений представлениям, выведенным в работах других авторов различными методами [3].

Обозначим $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Пусть f – абсолютно непрерывная функция, действующая из $\mathbb{R}_+$ в n-мерное эвклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Правосторонний интеграл Римана–Лиувилля порядка α, $0 < \alpha \le 1$, от функции f определяется как

$$J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau,$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Здесь и далее будем полагать, что J^0 представляет собой оператор тождественного преобразования. Для существования требуемого правостороннего интеграла Римана–Лиувилля достаточно предположить локальную интегрируемость функции $f(t)$.

Пусть теперь $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}$, а функция f имеет абсолютно непрерывные производные до порядка m.

Производная Римана–Лиувилля дробного порядка α определяется следующим образом [4]:

$$D^{\alpha}f(t)=\frac{d^m}{dt^m}J^{m-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}d\tau .$$

Интегрируя по частям, можно записать

$$D^{\alpha}f(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0)+\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t\frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}d\tau ,$$

откуда видно, что дробные производные Римана–Лиувилля имеют особенность в нуле и в задаче Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля (при описании динамических систем) необходимо задавать начальные условия специального вида, не имеющие четкой физической интерпретации.

Этих недостатков дробной производной Римана–Лиувилля лишена регуляризованная производная дробного порядка α в смысле Капуто:

$$D^{(\alpha)}f(t)=J^{m-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t\frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}d\tau .$$

Производные Римана–Лиувилля и Капуто высших порядков связаны соотношением

$$D^{(\alpha)}f(t)=D^{\alpha}f(t)-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}f^{(i)}(0)=D^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^i}{i!}f^{(i)}(0)\right].$$

Справедливы следующие формулы для преобразования Лапласа дробных производных Римана–Лиувилля и Капуто, соответственно:

$$L\{D^{\alpha}f(t);s\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{i=0}^{m-1}s^iD^{\alpha-i-1}f(t)|_{t=0}, \quad (1)$$

$$L\{D^{(\alpha)}f(t);s\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{i=0}^{m-1}s^{\alpha-i-1}\frac{d^i}{dt^i}f(t)|_{t=0}, \quad (2)$$

где $L\{f(t);s\}=F(s)$.

Рассмотрим обобщенную матричную функцию Миттаг–Леффлера:

$$E_{\rho,\mu}(B)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{\Gamma(k\rho^{-1}+\mu)},$$

где $\rho>0$, $\mu\in\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел), B – произвольная квадратная матрица порядка n.

Обобщенная матричная функция Миттаг–Леффлера играет важную роль при изучении линейных систем дробного порядка. Будем обозначать I единичную матрицу порядка n. Справедлива следующая лемма, которая позволяет находить преобразование Лапласа выражений, содержащих обобщенную матричную функцию Миттаг–Леффлера.

Лемма 1. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, A – произвольная квадратная матрица порядка n. Тогда справедлива формула

$$L\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(At^{\alpha});s\right\} = s^{\alpha-\beta}(s^{\alpha}I - A)^{-1}.$$

Доказательство. Учитывая определения обобщенной матричной функции Миттаг–Леффлера, гамма-функции и используя замену $\tau = st$ получаем

$$L\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(At^{\alpha});s\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(At^{\alpha})dt = \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)s^{\alpha k+\beta}}\int_0^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\alpha k+\beta-1}d\tau = \sum_{k=0}^{\infty}A^k s^{-(\alpha k+\beta)}.$$

Покажем теперь, что $\sum_{k=0}^{\infty}A^k s^{-(\alpha k+\beta)} = s^{\alpha-\beta}(s^{\alpha}I - A)^{-1}$. Последнее равносильно равенству

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k s^{-(k+1)\alpha} = (s^{\alpha}I - A)^{-1}.$$

Домножим левую часть последнего равенства на $(s^{\alpha}I - A)$ (безразлично слева или справа, поскольку данные матрицы коммутируют). Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k s^{-(k+1)\alpha}(s^{\alpha}I - A) = \sum_{k=0}^{\infty}A^k s^{-k\alpha} - \sum_{k=0}^{\infty}A^{(k+1)}s^{-(k+1)\alpha} = I.$$

Поскольку обратная матрица единственна, это завершает доказательство.

Пусть $g(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, – измеримая ограниченная функция. Тогда $g(t)e^{-st} \in L_1(0,\infty)$, $s \in \mathbb{C}$. Следовательно, к функции $g(t)$ применимо преобразование Лапласа. Пусть также $z = z(t)$, $z \in \mathbb{R}^n$, – фазовый вектор, задающий состояние динамической системы в момент t, а эволюция системы описывается уравнением

$$D^{\alpha} z = Az + g, \quad m-1 < \alpha < m, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$D^{\alpha-k} z(t)|_{t=0} = z_k^0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Лемма 2. Траектория системы (3), (4) имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=1}^{m} t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(At^{\alpha}) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha}) g(\tau) d\tau.$$

Доказательство. Обозначим $L\{z(t);s\} = Z(s)$, $L\{g(t);s\} = G(s)$. Применим к системе (3) преобразование Лапласа, учитывая формулу (1). Получим уравнение

$$s^{\alpha} Z(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1} z_k^0 = AZ(s) + G(s),$$

или

$$Z(s) = \sum_{k=1}^{m} s^{k-1} (s^{\alpha} I - A)^{-1} z_k^0 + (s^{\alpha} I - A)^{-1} G(s).$$

Применяя к последнему равенству обратное преобразование Лапласа, с учетом леммы 1, будем иметь

$$z(t) = \sum_{k=1}^{m} t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(At^{\alpha}) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha}) g(\tau) d\tau.$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь динамическую систему дробного порядка в смысле Капуто, описываемую уравнением

$$D^{(\alpha)} z = Az + g, \quad m-1 < \alpha < m, \tag{5}$$

с начальными условиями

$$z^{(k)}(0) = z_k^0, \ k = 0, \ldots, m-1. \tag{6}$$

Лемма 3. Траектория системы (5), (6) имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^{k} E_{\alpha,k+1}(At^{\alpha}) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha}) g(\tau) d\tau.$$

Доказательство. Применим к системе (5) преобразование Лапласа, учитывая формулу (2). Получим уравнение

$$s^{\alpha}Z(s)-\sum_{k=0}^{m-1}s^{\alpha-k-1}z_k^0=AZ(s)+G(s),$$

или

$$Z(s)=\sum_{k=0}^{m-1}s^{\alpha-k-1}(s^{\alpha}I-A)^{-1}z_k^0+(s^{\alpha}I-A)^{-1}G(s).$$

Применим к последнему равенству обратное преобразование Лапласа. Тогда, учитывая лемму 1, получим

$$z(t)=\sum_{k=0}^{m-1}t^kE_{\alpha,k+1}(At^{\alpha})z_k^0+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha})g(\tau)d\tau,$$

что и требовалось доказать.

В работе [3] показано, что при $\alpha\in(0,1)$ система (5) с начальными условиями (6) имеет единственное решение вида

$$z(t)=\int_0^t e_{\alpha}^{A(t-\tau)}Az_0^0d\tau+z_0^0+\int_0^t e_{\alpha}^{A(t-\tau)}g(\tau)d\tau,$$

где e_{α}^{At} – матричная α-экспоненциальная функция:

$$e_{\alpha}^{At}=t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^{\alpha k}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}). \tag{7}$$

Покажем, что это представление согласуется с леммой 3. Для этого рассмотрим выражение $\tilde{z}(t)=\int_0^t e_{\alpha}^{A(t-\tau)}Az_0^0d\tau+z_0^0$, которое представляет собой решение однородной системы $D^{(\alpha)}z=Az$. В силу (7) почленным интегрированием получаем

$$\tilde{z}(t)=\left[\int_0^t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}(t-\tau)^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}d\tau+I\right]z_0^0=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k(t-t_0)^{\alpha k}}{\Gamma(k\alpha+1)}\right]z_0^0=E_{\alpha,1}(At^{\alpha})z_0^0,$$

$$z(t)=E_{\alpha,1}(At^{\alpha})z_0^0+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha})g(\tau)d\tau,$$

что соответствует утверждению леммы 3.

Заключение. Полученные результаты показывают, что структура решений задачи Коши для линейных неоднородных систем дробных дифференциальных уравнений аналогична классической формуле Коши для линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка.

Развитие данной работы будет направлено на построение методов управления линейными системами дробного порядка, в частности на решение задачи быстродействия для таких систем.

І.І. Матичин

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

Розглядаються неоднорідні лінійні системи диференціальних рівнянь з класичними дробовими похідними Рімана–Ліувілля і регуляризованими дробовими похідними Капуто. За допомогою перетворення Лапласа одержані зображення розв'язків таких систем у вигляді аналогів формули Коші при довільних вимірних обмежених функціях часу у правій частині.

I.I. Matychyn

REPRESENTATION OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Non-homogeneous linear systems of differential equations with classical Riemann–Liouville fractional derivatives as well as regularized Caputo's fractional derivatives are considered. Using Laplace transform the solutions to such systems are represented in the form of analogues of Cauchy formula for arbitrary measurable and bounded functions of time in the right-hand side. These relations play a key role by solving related problems of mathematical control theory and theory of dynamic games.

1. *Chikrii A.A., Matychyn I.I.* Game problems for fractional-order systems // New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications. Vol. XI. – Dordrecht; Heidelberg; London; New York: Springer, 2010. – P. 233–241.
2. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. – San Diego: Acad. Press, 1999. – 340 p.
3. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 540 p.
4. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

Получено 03.02.2011