УДК 519.8

Г.А. ДОНЕЦ, О.В. МИРОНЕНКО

СВОЙСТВА БАЗОВОЙ КОМПОНЕНТЫ БИЦИКЛИЧЕСКОЙ T-ФАКТОРИЗАЦИИ

Рассматривается одна из актуальных задач теории графов – разложение полных графов на изоморфные деревья. Предлагается оригинальный подход, позволяющий получить новые результаты в этой области.

По определению T-факторизация полного дерева K_n ($n=2k$) относительно дерева T с матрицей смежности A(T) существует, если можно подобрать k-1 перестановочных матриц P_i ($1\le i \le k$-1), таких, что $A + P_1 A P_1^T + P_2 A P_2^T + \ldots + A_{k-1} A P_{k-1}^T = I_n - E_n$, где E_n - матрица, все элементы которой равны 1.

Рассмотрим пример из [1, рис.3]. Ясно, что здесь $P_i = \alpha^i$, где α= (1 2 3 4 5) (6 7 8 9 10). Это бициклическая T-факторизация. Рассмотрим необходимые условия для произвольной T-факторизации, учитывая, что вектор степеней d =(3, 6, 1, 0, 0). В этом случае $a_4 = a_5 = 0$, а система приобретает вид

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 15, \\ 4a_1 + 2a_2 \qquad &= 30, \\ a_2 + 2a_3 &= 5. \end{aligned} \qquad (1)$$

Определитель этой системы равен нулю, что следует из соотношения 4·I - II - 6·III = 0, где I, II, III – соответственно первая, вторая и третья строки. Из третьего уравнения следует, что a_2, a_3 могут принимать значения (5,0); (3,1); (1,2). Соответственно вектор a будет иметь три значения: a = (5, 5, 0, 0, 0), a = (6, 3, 1, 0, 0) и a = (7, 1, 2, 0, 0). Нетрудно убедиться, что на рис. 1 реализовано первое решение, т. е. имеется пять вершин типа t_1 = =(1, 4, 0, 0, 0) – это (1, 2, 3, 4, 5), и пять вершин типа t_2 = (2, 2, 1, 0, 0) – это 6, 7, 8, 9, 10. В дальнейшем, чтобы не было путаницы, будем обозначать вектор d, где d_i – число вершин степени i, по-другому: вектор $\delta = (\delta_1, \delta_2,\ldots, \delta_k)$, а d_i – степень вершины i. Тогда в данном примере δ = (3, 6, 1, 0, 0).

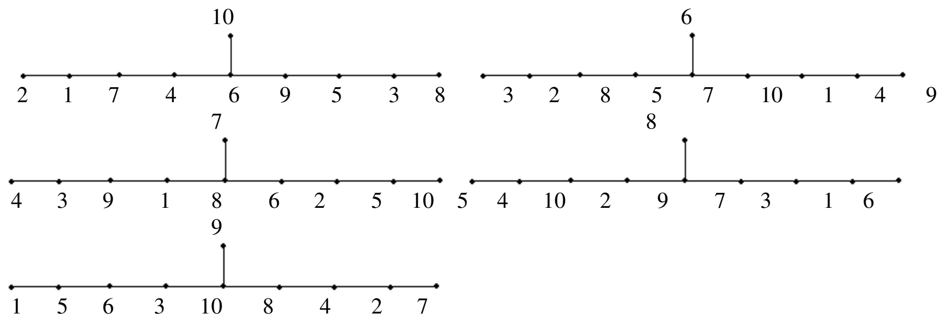

РИС.1. Т-факторизация графа G_{10}

Возникает вопрос: может ли второе и третье решение быть реализовано как бициклическая *T*-факторизация? (как для первого решения!). Оказывается это невозможно, что вытекает из таких рассуждений.

В бициклической перестановке нет неподвижных элементов, т. е. никакой элемент не переходит сам в себя. Но во втором и третьем решении участвует третий тип вершины $t_3 = (3, 0, 2, 0, 0)$, где вершина степени 3 дважды накладывается на себя. Но в графе такая вершина только одна, следовательно, в какой-то перестановке эта вершина отражается на себя. Тем самым справедлива

Лемма 1. В бициклической *T*-факторизации реализуются только те типы вершин t_i ($i \geq 1$), для которых справедливо

$$\delta \geq t_i, \tag{2}$$

где неравенство берется по всем компонентам.

В данном случае $(3, 6, 1, 0,0) \geq (3, 0, 2, 0, 0)$ неравенство не соблюдается, поэтому бициклическая *T*-факторизация если и существует, то только для первого и второго типов вершин.

Рассмотрим детальнее свойства бициклических *T*-факторизаций. Общий вид перестановки $\alpha = (1, 2, 3, \ldots, k)\ (k+1,\ k+2,\ \ldots,\ 2k)$. *T*-факторизация может быть получена под действием k подстановок α^s ($s = 0, 1, 2, \ldots, k\text{-}1$). Таким образом , множество вершин графа разбивается на две разные доли $A=\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ и $B=\{k+1,\ k+2,\ \ldots,\ 2k\}$. Каждая подстановка добавляет ребра до тех пор, пока их количество не станет равным $C_{2k}^{2} = k(2k - 1)$, числу ребер полного n-вершинного графа ($n=2k$).

В каждой доле должно быть несколько ребер, которые в результате перестановок должны образовать множество ребер полного k-вершинного графа. В итоге получаем $2\cdot \dfrac{k(k-1)}{2} = k\ (k\text{-}1)$ ребер. Остальные ребра, соединяющие вершины из разных доль, должны образовать недостающие до полного графа $k(2k\ \text{-}1)\ \text{-}\ k(k\ \text{-}1) = k^2$ ребер. Очевидно, этих ребер должно быть ровно k, а для каждой доли остается $\dfrac{2k-1-k}{2} = \dfrac{k-1}{2}$ ребер.

Отсюда можно сделать вывод, что k – нечетное число, т. е. $k = 2l + 1$ ($l \geq 1$). Тогда необходимым условием существования бициклической T-факторизации есть

$$n = 4l+2 \quad (l \geq 1). \tag{3}$$

Каждой доле l ребер должны образовывать полный k-вершинный граф при последовательных k-1 подстановках $\alpha_1 = (1, 2, \ldots, k)$ и $\alpha_2 = (k+1, k+2, \ldots, 2k)$. Пусть, например n=10, тогда l=2. Занумеруем два ребра, как показано на рис. 2.

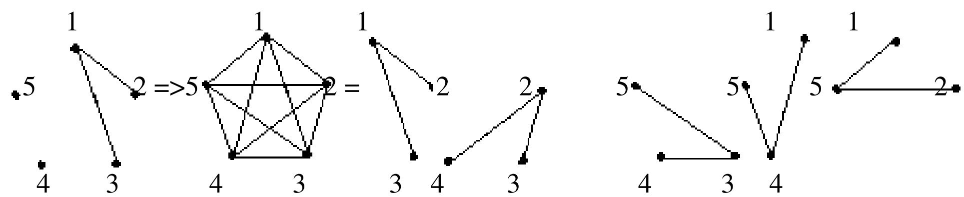

РИС. 2. Действие подстановки α_1 для k=5

Последовательное применение подстановки α_1 приводит к образованию дополнительных ребер, а всего их становится $5 \times 2 = 10 = C_5^2$, т.е. столько, как у полного 5-вершинного графа.

Следующее значение l=3 и n=14, k=7, (рис. 3).

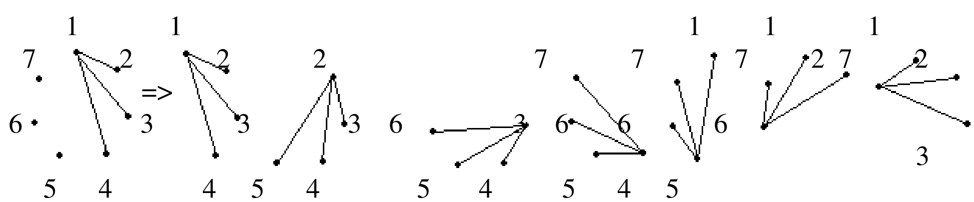

РИС. 3. Действие подстановки α_1 для k=7

На рис. 3 показано образование полного 7-вершинного графа. Каждый раз образуется ровно 3 новых ребра, а всего $7 \times 3 = 21 = C_7^2$, т. е. столько, как у полного 7-вершинного графа. Очевидно , что указанные l ребер должны быть занумерованы специальным образом, чтобы при действии подстановки α_1 не образовывались ребра-дубликаты. Так как эти l ребер составляют подграф графа T, то они не должны образовывать циклов. Рассмотрим теперь окружность, поделенную k точками на равные дуги (назовем эти дуги элементарными). Точки деления последовательно обозначим 1, 2, …, k. Длиною произвольной хорды, соединяющей две точки деления, назовем количество элементарных дуг в меньшей из дуг, на которые эта хорда разбивает окружность. В силу этого определения каждая хорда может иметь длину 1,…, l.

Граф из l ребер будем называть правильно вписанным в окружность, разделенную k точками, если длины этих ребер не повторяются.

Лемма 2. В бициклической T-факторизации l ребер в каждой доле графа T правильно вписаны.

Допустим, что l ребер вписаны неправильно, т. е. существуют какие-то два ребра с одинаковой длиною $1\le s \le l$. Их кодировку можно записать i_1,($i_1\pm$s) (mod k) и i_2,($i_2\pm$s) (mod k). Перепишем коды этих ребер так, чтобы возле элемента s стоял только знак “+”. Тогда получаем их запись: i_3,(i_3+s) (mod k) и i_4,(i_4+s) (mod k). Каждое действие подстановки α_1 увеличивает коды вершин на 1, а результат берется по mod k.

Возьмем $r = i_4 - i_3 > 0$. Тогда действие перестановки α_1^r приведет к образованию ребра $i_3 + r$,($i_3 + r + s$)(mod k) = i_4,(i_4+s) (mod k). Но это ребро-дубликат, поэтому l ребер должны быть правильно вписаны. С другой стороны, в каждой вершине j ($1\le j\le k$) графа за k-1 подстановку образуются 2l ребер разной длины, т. е. l ребер типа j, (j-s)(mod k) и l ребер типа j, (j+s)(mod k) для каждого $1\le s \le l$. То есть все вершины соединяются со всеми и имеют степень $2s = k-1$, что и образует полный k-вершинный граф.

Все эти рассуждения были проведены для первой доли графа, однако их легко провести и для второй доли, увеличив все коды вершин на число k.

Кроме l ребер, принадлежащих каждой доле, существуют еще k ребер, концевые вершины каждого из которых принадлежат разным долям. Обозначим $a_i = (1, 2, \ldots, k)$, $b_j = (k+1, k+2, \ldots, 2k)$ $(1 \le i,j \le k)$. Тогда ребра имеют вид (a_i, b_j).

Лемма 3. В бициклической T-факторизации множество всевозможных разностей $(b_j - a_i)$ (mod k) должно составлять полную систему вычетов по mod k.

Полная система вычетов по mod k составляет множество чисел (0, 1,…, k -1).

Допустим, среди указанных ребер найдутся два таких (a_1, b_1) и (a_2, b_2), что

$$(b_1 - a_1) \equiv (b_2 - a_2) (\mathrm{mod}\ k).$$

Не нарушая общности, будем считать, что $a_1 < a_2$. Пусть $r = a_2 - a_1$. Тогда под действием подстановки $\alpha^r=(\alpha_1)^r\ (\alpha_2)^r$ получим из ребра (a_1, b_1) новое ребро $(a_1 + r, b_1 + r)$ (mod k) =[a_2(mod k), b_2(mod k)]. При этом a_2(mod k)$\in$ (1, 2, 3, …, k), но b_2(mod k) также принадлежит первой доле. Необходимо добавить число k, чтобы это была вершина из второй доли. В результате получим ребро (a_2, b_2), которое является дубликатом. Этого не должно быть, значит лемма верна.

Рассмотрим некоторые аспекты структуры базовой компоненты бициклической T-факторизации. Остановимся на таких двух.

Вопрос о правильном вписывании. Обозначим подграф из l ребер, о которых идет речь в лемме 2, для каждой доли g_A и g_B. Правильное вписывание g_A не предполагает его связности, поэтому неизвестно и число его вершин. Если g_A связен, то он представляет дерево с l+1 вершиной. Если он несвязен, то число вершин может доходить до 2l. Задача ставится так: занумеровать вершины графа g_A числами из множества (1, 2, …, k) так, чтобы абсолютные разности кодов ребер составляли множество (1, 2, …, l). Если рассмотреть частный случай, когда $k = l + 1$, то граф становится деревом, и задача превращается в известную задачу Роса, которая формулируется следующим образом: занумеровать n-вершинное дерево числами от 1 до n так, чтобы множество абсолютных разностей кодов всех ребер составляло множество (1, 2, …, n-1).

Можно сказать, что для нечетного n задача Роса является частным случаем задачи правильного вписывания l ребер в окружность, разделенную $2l$+1 точками. Очевидно, что все, изложенное здесь о подграфе g_A, справедливо и для подграфа g_B.

Еще один аспект о числе представлений подграфов g_A и g_B. Не всегда они должны быть деревьями. Как видно на рис.1, базовая компонента графа состоит из таких доль A=(1, 2, 3, 4, 5), B=(6, 7, 8, 9, 10). Подграф g_A содержит два несвязных ребра (1, 2) и (3, 5), а подграф g_B – связный, из двух ребер (6, 9) и (6, 10). Междолевые ребра (3, 8), (1, 7), (4, 6), (4, 7), (5, 9) соответствуют полной системе вычетов по mod 5.

Таким образом, уже можно описывать вид базовой компоненты бициклической Т-факторизации: а) она состоит из двух доль A= (1, 2, 3, 4,…, k), B=(k+1, k+2, …, n); б) подграфы g_A и g_B правильно вписаны; в) разность кодов междолевых ребер составляет полную систему вычетов по mod k.

Пункт б) можно сформулировать по-другому: если l ребер каждого из подграфов g_A и g_B стянуть в вершины, то получим граф из n - $2l$ вершин, который можно раскрасить двумя цветами, причем каждым цветом окрашено x - l вершин. Очевидно, что одноцветные вершины принадлежат одной доле.

Рассмотрим виды подграфов $g_A(g_B)$ из l ребер. Для n=10 это два ребра, правильно вписанные: g_A= {(1, 2), (1, 3)}, {(1, 2), (1, 4)}, {(1, 5), (1, 3)}, {(1, 5), (1, 4)}, {(1, 2), (3, 5)}, {(1, 5), (2, 4)}, {(1, 3), (4, 5)}, {(1, 4), (2, 3)}. Здесь все подграфы g_A содержат вершину 1, а для связных подграфов она обязательно имеет степень 2. Если применить к кодам подграфов g_A подстановку α_1= (1, 2, 3, 4, 5), то получим значительно больше подграфов (соответственно в 5 раз больше).

Для n=14, k=7, l=3 необходимо правильно вписать три ребра. Будем считать, что вершина 1 принадлежит подграфу g_A с наиболее возможной максимальной степенью. Тогда получим такой список: g_A= {(1, 2), (1, 3), (1, 4)}, {(1, 2), (1, 3), (1, 5)}, {(1, 2), (1, 3), (2, 5)}, {(1, 2), (1, 3), (2, 6)}, {(1, 2), (1, 3), (3, 6)}, {(1, 2), (1, 3), (3, 7)}, {(1, 2), (1, 3), (4, 7)}, {(1, 2), (1, 6), (1, 4)}, {(1, 2), (1, 6), (1, 5)}, {(1, 2), (2, 4), (1, 5)}, {(1, 2), (3, 5), (1, 4)}, {(1, 2), (3, 5), (1, 5)}, {(1, 2), (4, 6), (1, 4)}, {(1, 2), (4, 6), (1, 5)}, {(1, 2), (5, 7), (1, 4)}, {(1, 2), (5, 7), (1, 5)}. Это только половина списка, а вторая половина получится, если всюду сделать преобразование кодов 1→1, а остальные y_i= 9–x_i. Приходится констатировать, что находить базовые компоненты даже для небольших значений n становится затруднительно. Необходимо найти эквивалентные преобразования, которые не изменяют свойства базовых компонент.

Лемма 4. Действия независимых подстановок α_1 для доли *A* и α_2 для доли *B* не изменяют свойств базовой компоненты.

Действительно, если ребра подграфа g_A правильно вписаны, то одновременное увеличение на 1 кодов концевых ребер не меняет их длину. То же самое верно и для подграфа g_B. С другой стороны, если применить подстановку α_1 (или α_2) только к одной доле, то разности кодов вершин междолевых ребер изменятся, но все одновременно. Причем система вычетов по mod *k* в целом только поменяется местами, но всегда от прибавления константы остается полной системой вычетов.

Рассмотрим еще один прием преобразования, который применяется при построении базовой компоненты. Параллельным переносом ребра (междолевого) называется увеличение всех кодов его вершин на постоянную величину.

Теперь можно заняться построением всех базовых компонент бициклической *T*-факторизации для произвольных значений n=4l+2. Общая схема алгоритма следующая.

1. Граф разбивается на две доли с вершинами A= (1, 2, 3, 4,…, k).
2. B=(k+1, k+2, …, 2k).
3. Строится подграф gA таким образом, чтобы вершина 1 имела максимальную степень. Если это не так, то по лемме 4 это можно сделать с помощью подстановки α1= (1, 2, …, k).
4. Остальные ребра, инцидентные вершинам доли *A,* идут в междолевые ребра (начинается перебор их конечных вершин). Перебор ведется с условием, чтобы разности кодов составляли полную систему вычетов по mod *k*.
5. В доле *B* достраивается подграф g_B с условием необразования цикла и правильности вписывания.
6. Если вершина 1 смежна с какой-либо вершиной доли *B*, то по лемме 4 можно сделать так, чтобы ее номер стал равен *k*+1 с помощью подстановки α_2 = (*k*+1, *k*+2, …, *n*). В этих условиях делается перебор подграфов g_B.

Общий перебор можно иногда сократить путем перенумерации вершин в доле *A* так, чтобы подграф g_A имел нумерацию (1, 2, …, *r*), где *r* – число вершин подграфа g_A. При этом необходимо делать параллельный перенос соответствующих междолевых ребер. Перебор подграфов g_B также иногда можно сократить, если возникают изоморфные деревья *T*.

Покажем действие алгоритма на примере n=10 для тех деревьев, которые имеют вершину со степенью 5. Все деревья изображены в книге Ф. Харари [2]. Их количество равно 106. На рис.4 указано 19 деревьев, содержащих вершину степени 5, и их порядковые номера, соответствующие порядку на диаграмме Ф. Харари.

Рассмотрим всевозможные подграфы g_A (и g_B), которые возникают в доле *A*. При этом вершина 1 входит в g_A (рис.5).

Выбираем вершину со степенью 5 и присваиваем ей номер 1. Два ребра, инцидентные ей, остаются в доле *A* (из них строится подграф g_A), а остальные три ребра становятся междолевыми. Одно из этих ребер (1, 6). Очевидно, что подграф g_A имеет один из четырех типов на рис. 5, но подграф g_B может иметь все 8 типов.

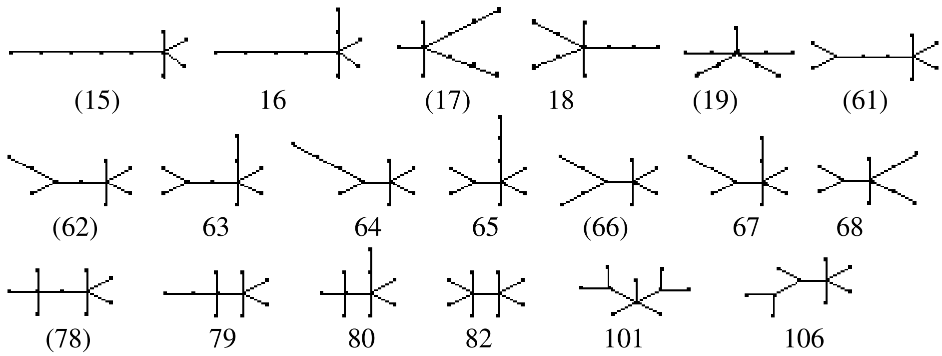

РИС.4. Диаграмма Харари

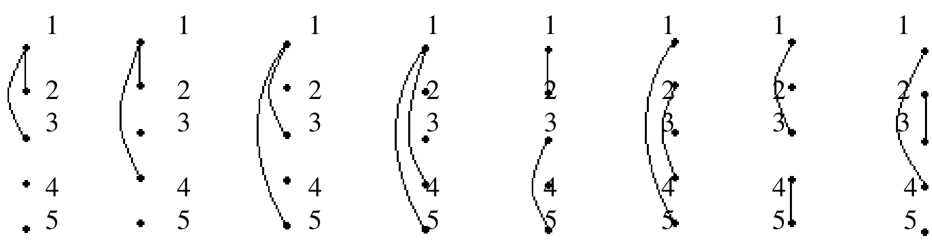

РИС.5. Типы подграфов g_A (g_B)

Два остальных ребра, выходящих из вершины 1, имеют вид (1, b_1) и (1, b_2), где b_1 и b_2 пробегают значения 7, 8, 9, 10. Получается $C_4^2 = 6$ вариантов, которые надо умножить на количество подграфов g_B. Кроме того, необходимо рассмотреть все варианты подграфа g_A (их четыре). Начнем поиск для g_A, расположенного на вершинах 1, 2, 3. Далее расписаны последовательно все получающиеся варианты.

1. b_1=7; b_2=8. Междолевые ребра образовывают разности (6 - 1)≡0(mod 5), (7 - 1)≡1(mod 5), (8 - 1)≡2(mod 5).Необходимо, чтобы ребра (4, x) и (5, y) образовывали разности 3 и 4. Это дает два варианта: {(4, 7), (9, 5)} и {(4, 8), (5, 8)}. Рассмотрим первый. Подграф g_B строим на трех вершинах. В него не могут войти две вершины из 6, 7, 8, ибо тогда образуется цикл (у нас дерево!). Следовательно, в g_B входит одна из этих вершин и вершины 9, 10. Таким образом получим подграфы g_B: {(6, 9), (6, 10)}, {(6, 9), (9, 10)}, {(7, 9), (9, 10)}, {(7, 10), (9, 10)}, {(8, 10), (9, 10)}, {(8, 9), (8, 10)}. Если g_B содержит четыре вершины, то дополнительно получим подграфы g_B: {(6, 10), (7, 9)}, {(6, 8), (9, 10)}, {(7, 10), (8, 9)}, всего девять подграфов. Из этих подграфов первый и шестой образуют изоморфные графы T (так как 6 и 8 вершины подобны), а восьмой подграф делает граф T несвязным. Остальные подграфы показаны на рис.6. Внизу указаны номера деревьев из рис. 4. Как видим, не удалось избежать дублирования дерева 67. Второй вариант даст деревья 65 (дважды), 68, 79, 80, 82 и 101.

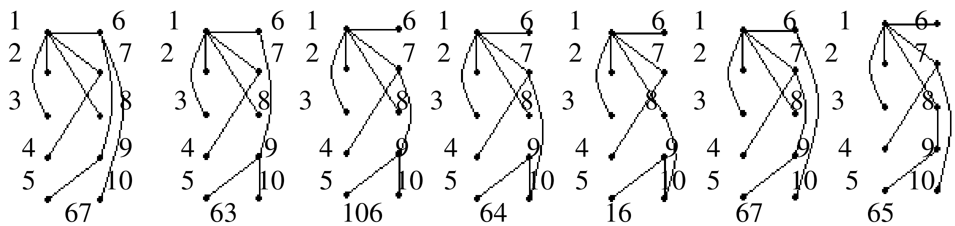

РИС.6. Графы, удовлетворяющие условию 1

2. b_1=7; b_2=9. Междолевые ребра образовывают разности (0, 1, 3). Ребра с концевыми вершинами 4 и 5 должны образовать разности 2 и 4. Здесь также существует два варианта, которые воспроизведут множество деревьев 16,18, 63, 65, 67, 68 (дважды), 79, 80, 101 и 106.

3. b_1=7; b_2=10. Междолевые ребра образуют разности (0, 1, 4). Ребра с концевыми вершинами 4 и 5 должны образовывать разности 2 и 3. Два варианта воспроизводят деревья 16, 63, 64, 65 (дважды), 67 (дважды), 68, 79, 80, 82 и 106 (дважды).

Становится ясно, что перебор всех вариантов ребер (1, b_1) и (1, b_2) достаточно ограничить первыми двумя случаями: 1) b_1=7, b_2=8; 2) b_1=7, b_2=9. Третий случай сводится к первому. Далее (b_1=8, b_2=9) сводится ко второму.

Осталось сделать перебор всех возможных подграфов g_A. Если к этому подходить неформально, то этот перебор не обязателен, так как два первых случая уже построенных графов полностью исчерпывает список всех графов с максимальной степенью 5 (см. рис. 4), за исключением номеров, взятых в скобки. Об этих графах известно [1], что они не допускают бициклической T-факторизации. Доказательство этого факта получено с помощью компьютера. В данной работе приводится это доказательство, полученное логическим путем.

Легко показать, что графы 15 и 19 не имеют двудольной укладки, а это означает, что они не имеют бициклической T-факторизации. Остальные пять графов имеют двудольную укладку, поэтому рассмотрим их отдельно.

Во всех укладках, как было указано, вершиной 1 выбираем вершину со степенью 5. Остальные вершины доли A обозначим a_2, a_3, a_4, a_5 = (2, 3, 4, 5). Аналогично вершину 6 считаем смежной с вершиной 1, а остальные вершины обозначим b_2, b_3, b_4, b_5 = (7, 8, 9, 10). Пусть g_A образуют ребра (1, a_2), (1, a_3).

Лемма 5. Для любой двудольной укладки графа справедливо $a_4 + a_5 \neq$ $\neq 2 (\mathrm{mod}\ 5)$.

В силу правильности вписывания должно быть $(1 - a_2) \neq (a_3 - 1)(\text{ mod } 5)$, или $a_2 + a_3 \neq 2(\text{mod } 5)$. Очевидно, что $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv 4(\text{mod } 5)$. Вычтем из предыдущего неравенства последнее равенство и получим подтверждение леммы.

Рассмотрим граф T_{17} и его двудольную укладку (рис. 7).

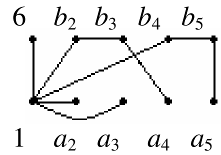

РИС. 7. Укладка графа T_{17}

Очевидно, что до полной системы вычетов междолевых ребер не хватает двух чисел $(b_3 - 1)(\text{mod } 5)$ и $(b_5 - 1)(\text{mod } 5)$. Эти разности должны доставить ребра (b_3, a_4) и (b_5, a_5). Это возможно в двух несовместимых случаях: а) $(b_3 - 1) \equiv (b_3 - a_4)$ (mod 5). Но это невозможно, ибо тогда вытекает неверное равенство $a_4 \equiv 1(\text{ mod } 5)$. б) $(b_3 - 1) \equiv (b_5 - a_5)(\text{ mod } 5)$; $(b_5 - 1) \equiv (b_3 - a_4)(\text{ mod } 5)$. Сложим эти равенства, получим: $a_4 + a_5 \equiv 2(\text{mod}5)$. Но это противоречит лемме 5, следовательно для T_{17} нет бициклической T-факторизации.

Аналогично доказывается (с помощью леммы 5), что графы T_{61} T_{62}, T_{66} и T_{78} также не имеют бициклической T-факторизации.

Г.П. Донець, О.В. Мироненко

ВЛАСТИВОСТІ БАЗОВОЇ КОМПОНЕНТИ БІЦИКЛІЧНОЇ Т-ФАКТОРИЗАЦІЇ

Розглядається одна з актуальних задач теорії графів – розкладання повних графів на ізоморфні дерева. Пропонується новий підхід, що дозволяє отримати нові результати в даній галузі.

G.A. Donets, O.V. Mironenko

ABOUT NESSISERY CONDITIONS FOR T-FACTORIZATION OF FULL GRAPHS

It is considered an actual problem in graphs theory – decomposition of full graphs into isomorphic trees. A new approach is proposed, which permits to obtain new results in considered field of research.

1. *Петренюк А.Я.* Ектремальні розклади повних графів.– Кіровоград: Комбінаторні конфігурації, 2009. – 169 с.
2. *Харари Ф.* Теория графов .– М.: Мир, 1973. – 182 с.

Получено 14.04.2011