УДК 629.7.015.4

Итерационный метод оценки критической скорости флаттера аэродинамического профиля в нестационарном потоке

А. В. Сафронов, В. А. Сафронов

Национальный научно-исследовательский центр оборонных технологий и военной безопасности Украины, Киев, Украина

Предложен метод, позволяющий на ранней стадии проектирования за три-четыре итерации определять критическую скорость флаттера аэродинамических профилей с применением теории крыла в нестационарном потоке и создавать авиационные конструкции с оптимальными весовыми характеристиками.

Разработке методов оценки критической скорости флаттера аэродинамического профиля посвящены многочисленные публикации [1–8]. Обычно оценка характеристик флаттера осуществляется по теории крыла в стационарном потоке. Ее особенность заключается в сравнительно простом определении действующих на колеблющийся профиль аэродинамических сил и моментов. Однако при этом величины критических скоростей флаттера оказываются значительно меньше критических скоростей, определяемых по теории крыла в нестационарном потоке, а конструкции более тяжелыми.

В отличие от этой задачи, исследование флаттера авиационных конструкций с использованием теории крыла в нестационарном потоке относится к весьма сложной задаче аэроупругости и обусловлено необходимостью решения громоздких систем нелинейных трансцендентных уравнений различными приближенными методами [2, 6, 8]. То есть поиск простых инженерных методов, позволяющих на ранней стадии проектирования авиационных конструкций достоверно оценивать характеристики флаттера, представляется актуальной научной задачей.

На наш взгляд, достоверные результаты при исследовании характеристик флаттера в нестационарном потоке можно получить с помощью метода итераций. При таком подходе в каждой отдельной итерации поставленная задача решается в линейной постановке.

Процедуру предлагаемого подхода изложим на примере оценки частоты колебаний и критической скорости изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля в нестационарном несжимаемом потоке. В этом случае, воспользовавшись результатами работы [2], систему дифференциальных уравнений совместных изгибно-крутильных колебаний профиля в потоке можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&(m+\mu_0)\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+C_{\text{и}}Y(t)-(m\sigma+\mu_0 a)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=F(k;t);\\
&(J+\Delta J)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+C_k\theta(t)-(m\sigma+\mu_0 a)\frac{d^2Y(t)}{dt^2}=M(k;t),
\end{aligned}\qquad (1)$$

где m – погонная масса профиля; μ_0 – присоединенная погонная масса профиля; $Y(t)$ – изгибные колебания профиля; $C_и$ – жесткость профиля на изгиб; σ – расстояние между осью вращения и центром тяжести профиля (величина положительная, если центр тяжести расположен позади оси вращения); a – расстояние оси вращения от середины хорды (положительное при расположении оси ближе к передней кромке); $\theta(t)$ – крутильные колебания профиля; $F(k;t)$, $M(k;t)$ – нестационарные аэродинамические погонные силы и моменты, действующие на профиль; k – число Струхаля; J – массовый погонный момент инерции профиля; ΔJ – присоединенный погонный момент инерции профиля; C_k – жесткость профиля крыла при кручении.

Присоединенные погонные масса и момент инерции профиля определяются из известных зависимостей [2, 6]

$$\mu_0 = \pi\rho b^2; \quad \Delta J = \mu_0 b^2\left[\frac{1}{8} + \left(\frac{X_0}{b} - 1\right)^2\right],$$

где ρ – плотность воздуха; b – полухорда профиля; X_0 – расстояние от передней кромки профиля до оси его вращения.

Число Струхаля, от величины которого зависят нестационарные аэродинамические сила и момент, определяется безразмерным отношением [2, 6]

$$k = \frac{b\omega}{V}, \tag{2}$$

где ω – круговая частота колебаний профиля при возникновении флаттера; V – скорость потока.

При принятой форме записи системы (1) нестационарные аэродинамические сила и момент, в соответствии с данными работ [2, 6], могут быть представлены зависимостями

$$F(k;t) = 2\pi b_0 q\left\{\theta(t)C(k) + \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} - \frac{X_0}{b_0}\right)C(k)\right]\frac{b_0}{V}\frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{dY(t)}{Vdt}C(k)\right\}; \tag{3}$$

$$M(k;t) = 2\pi b_0^2 q\left\{\left(\frac{X_0}{b_0} - \frac{1}{4}\right)\theta(t)C(k) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{3}{4} - \frac{X_0}{b_0}\right)\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{X_0}{b_0} - \frac{1}{4}\right)C(k)\right]\frac{b_0}{V}\frac{d\theta(t)}{dt} - \left(\frac{X_0}{b_0} - \frac{1}{4}\right)\frac{dY(t)}{Vdt}C(k)\right\}, \tag{4}$$

где b_0 – хорда профиля; $q = \dfrac{1}{2}\rho V^2$ – скоростной напор потока; $C(k) = F(k) + iG(k)$ – функция Теодорсена [2, 6].

ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2002, № 1

Для удобства изложения материала введем следующие обозначения: $\omega_{и}^2 = \dfrac{C_{и}}{m+\mu_0}$, $\omega_k^2 = \dfrac{C_k}{J+\Delta J}$ – квадраты круговой частоты собственных изгибных и крутильных колебаний профиля в потоке при $V = 0$;

$$m_n = m + \mu_0; \quad m_1 = m\left(1 + \frac{\mu_0 a}{m\sigma}\right); \quad J_n = J + \Delta J; \quad a_1 = 2\pi \frac{b_0}{m_n};$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\pi \frac{b_0^2}{m_n}; \quad a_3 = 2\pi \frac{b_0^2}{m_n}\left(\frac{3}{4} - \frac{X_0}{b_0}\right); \quad b_1 = 2\pi \frac{b_0^2}{J_n}\left(\frac{X_0}{b_0} - \frac{1}{4}\right);$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\pi \frac{b_0^3}{J_n}\left(\frac{3}{4} - \frac{X_0}{b_0}\right); \quad b_3 = 2\pi \frac{b_0^3}{J_n}\left(\frac{X_0}{b_0} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{X_0}{b_0}\right).$$

Тогда систему уравнений (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + \omega_{и}^2 Y(t) - \frac{m_1}{m_n}\sigma \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \\
&= a_1 q\theta(t)C(k) + a_2 \frac{q}{V}\frac{d\theta(t)}{dt} + a_3 \frac{q}{V}\frac{d\theta(t)}{dt}C(k) - a_1 \frac{q}{V}\frac{dY(t)}{dt}C(k); \\
&-\frac{m_1}{J_n}\sigma \frac{d^2Y(t)}{dt^2} + \omega_k^2\theta(t) + \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \\
&= b_1 q\theta(t)C(k) - b_2 \frac{q}{V}\frac{d\theta(t)}{dt} + b_3 \frac{q}{V}\frac{d\theta(t)}{dt}C(k) - b_1 \frac{q}{V}\frac{dY(t)}{dt}C(k).
\end{aligned} \tag{5}$$

Классическое решение системы уравнений (5) представляется в форме гармонических функций [6]:

$$\begin{aligned}
Y(t) &= Y_0 e^{i\omega t}; \\
\theta(t) &= \theta_0 e^{i\omega t},
\end{aligned} \tag{6}$$

где Y_0, θ_0 – амплитуды изгибных и крутильных колебаний профиля.

Подставляя решение (6) в систему (5), получаем характеристическое уравнение колебаний профиля в нестационарном потоке:

$$\begin{aligned}
&Y_0\left[-\omega^2 + \omega_{и}^2 + a_1 \frac{q}{V}C(k)\right] + \\
&+\theta_0\left[\frac{m_1}{m_n}\sigma\omega^2 - a_1 qC(k) - i\omega a_2 \frac{q}{V} - i\omega a_3 \frac{q}{V}C(k)\right] = 0; \\
&Y_0\left[\frac{m_1}{J_n}\sigma\omega^2 + i\omega b_1 \frac{q}{V}C(k)\right] + \\
&+\theta_0\left[-\omega^2 + \omega_k^2 - b_1 qC(k) + i\omega b_2 \frac{q}{V} - i\omega b_3 \frac{q}{V}C(k)\right] = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда после преобразований получим частотное уравнение

$$A_0\omega^4 + iA_1\omega^3 + A_2\omega^2 + iA_3\omega + A_4 = 0, \tag{8}$$

в котором комплексные величины представляются выражениями

$$A_0 = 1 - \frac{m_1^2}{m_n J_n}\sigma^2; \quad A_1 = \frac{q}{V}\left\{a_2\frac{m_1}{J_n}\sigma - b_2 + d_1 C(k)\right\};$$

$$A_2 = -\omega_k^2 - \omega_{\text{и}}^2 + d_2 qC(k); \quad A_3 = \frac{q}{V}\{b_2\omega_{\text{и}}^2 + d_3 C(k)\};$$

$$A_4 = \omega_k^2\omega_{\text{и}}^2 - d_4 qC(k),$$

где

$$d_1 = b_3 - a_1 + \left(a_3\frac{m_1}{J_n} - b_1\right)\sigma; \quad d_2 = b_1 + a_1\frac{m_1}{J_n}\sigma - \frac{1}{4}\rho\pi^2\frac{b_0^4}{m_n J_n};$$

$$d_3 = a_1\omega_k^2 - b_3\omega_{\text{и}}^2; \quad d_4 = b_1\omega_{\text{и}}^2.$$

Разделяя в уравнении (8) действительные и мнимые величины, получаем два действительных уравнения, которые запишем в виде

$$BF(k)V^2 - CG(k)V + D = 0; \tag{9}$$

$$A_1'\omega^3 + d_2 VG(k)\omega^2 + A_3'\omega - d_4 VG(k) = 0, \tag{10}$$

где

$$\begin{cases} B = \omega^2 d_2 - d_4; \quad C = (\omega^2 d_1 + d_3)\omega; \\ D = \dfrac{2}{\rho}[A_0\omega^4 - (\omega_{\text{и}}^2 + \omega_k^2)\omega^2 + \omega_{\text{и}}^2]; \\ A_1' = a_2\dfrac{m_1}{J_n}\sigma - b_2 + d_1 F(k); \\ A_3' = \omega_{\text{и}}^2 b_2 + d_3 F(k). \end{cases} \tag{11}$$

Уравнения (2), (9) и (10) представляют собой замкнутую нелинейную систему относительно неизвестных V, ω и k, точное решение которой невозможно. Данная система уравнений может быть решена методом итераций [9], полагая начальное значение числа Струхаля равным нулю ($k_1 = 0$).

При этом условии действительная и минимая части функции Теодорсена в первой итерации соответственно равны [3, 6]:

$$F(k_1) = 1{,}0; \tag{12}$$

$$G(k_1)=0. \tag{13}$$

Условие (13) позволяет легко определить из уравнения (10) круговую частоту колебаний в первой итерации

$$\omega_1^2=-\frac{A'_{31}}{A'_{11}}. \tag{14}$$

При известной круговой частоте колебаний из уравнения (9) определяется критическая скорость флаттера, которая во всех итерациях может быть представлена зависимостью

$$V_i=\frac{1}{2B_iF(k_i)}\{C_iG(k_i)+[C_i^2G^2(k_i)-4B_iD_iF(k_i)]^{1/2}\}. \tag{15}$$

Определив ω_1 и V_1 из отношения, аналогичного (2), найдем число Струхаля

$$k_2=\frac{b\omega_1}{V_1},$$

а затем действительные $F(k_2)$ и мнимые $G(k_2)$ части функции Теодорсена во втором приближении.

Отличительной особенностью выполнения второй и последующих итераций является то, что круговая частота колебаний при флаттере должна определяться из кубического уравнения (10), которое может быть решено различными приближенными методами [9]. Эти методы достаточно громоздки и не всегда удобны для практического применения.

Поскольку для реальных аэродинамических профилей последний член уравнения (10) представляет собой величину малого порядка, решение этого уравнения можно записать в виде суммы

$$\omega_i=\omega_{in}+\Delta\omega_i, \tag{16}$$

где ω_{in} – приближенное значение круговой частоты колебаний, получаемое из решения уравнения (10) без учета последнего члена; $\Delta\omega_i$ – приращение круговой частоты колебаний, получаемое из этого же уравнения, записанного в приращениях.

Подставляя сумму (16) в уравнение (10), получаем два независимых уравнения:

$$A'_{1i}\omega_{in}^2+d_2V_{i-1}G(k_i)\omega_{in}+A'_{3i}=0; \tag{17}$$

$$A'_{1i}\Delta\omega_i^2+[2A'_{1i}\omega_{in}+d_2V_{i-1}G(k_i)]\Delta\omega_i=\frac{d_4}{\omega_{in}+\Delta\omega_i}V_{i-1}G(k_i), \tag{18}$$

где A'_{1i} и A'_{3i} определяются по формулам (11), в которых вместо ω и k следует подставить ω_i и k_i соответственно.

Из уравнения (17) находим приближенное значение круговой частоты колебаний аэродинамического профиля

$$\omega_{in} = \frac{1}{2A'_{1i}}\{-d_2 V_{i-1} G(k_i) \pm [d_2^2 V_{i-1}^2 G^2(k_i) - 4A'_{1i}A'_{3i}]^{1/2}\}. \qquad (19)$$

Определив приближенное значение круговой частоты колебаний из уравнения (19), можно перейти к оценке приращения круговой частоты колебаний из уравнения (18). С этой целью уравнение (18) представим в виде

$$A'_{1i}\Delta\omega_i^3 + [3A'_{1i}\omega_{in} + d_2 V_{i-1} G(k_i)]\Delta\omega_i^2 +$$

$$+ [2A'_{1i}\omega_{in} + d_2 V_{i-1} G(k_i)]\omega_{in}\Delta\omega_i - d_4 V_{i-1} G(k_i) = 0. \qquad (20)$$

Поскольку абсолютная величина приращения круговой частоты колебаний мала, то даже для относительно легких аэродинамических профилей первый член уравнения (20) оказывается на несколько порядков меньше других членов этого уравнения. Следовательно, в инженерных расчетах этим членом можно пренебречь и вместо кубического рассматривать квадратное уравнение

$$[3A'_{1i}\omega_{in} + d_2 V_{i-1} G(k_i)]\Delta\omega_i^2 +$$

$$+ [2A'_{1i}\omega_{in} + d_2 V_{i-1} G(k_i)]\omega_{in}\Delta\omega_i - d_4 V_{i-1} G(k_i) = 0. \qquad (21)$$

Из уравнения (21) легко можно получить приращение круговой частоты колебаний аэродинамического профиля.

Подставляя величины приближенных значений ω_{in} и $\Delta\omega_i$ в выражение (16), получаем результирующее значение круговой частоты колебаний во второй и последующих итерациях.

Отметим, что погрешность определения круговой частоты колебаний предложенным методом составляет десятые доли процента, т.е. представление круговой частоты колебаний аэродинамического профиля в виде суммы (16) позволяет привести решение кубического уравнения (10) к классическому решению двух независимых уравнений второго порядка и с большой точностью определять круговую частоту колебаний аэродинамического профиля в каждой итерации.

Процесс итерации продолжается до тех пор, пока в двух последующих итерациях отличие по критической скорости флаттера аэродинамического профиля не превышает принятой в расчете погрешности.

Изложенный подход обеспечивает быструю сходимость итерационного процесса. Выполненные расчеты показывают, что отличие по частоте колебаний и критической скорости флаттера уже в третьей и четвертой итерациях не превышает 1,0%.

Для сравнения результатов, полученных предложенным методом, с данными работы [2] оценим критическую скорость изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля при различных значениях относительной массы профиля:

$$\overline{m} = \frac{m}{\mu_0}.$$

Расчеты выполняли при следующих исходных данных: $b = 1{,}0$ м; $X_0 = 0{,}6$ м; $\sigma = 0{,}1$ м; $\rho = 0{,}125$ кг $\cdot$ м$^{-4} \cdot$ с^2; $\omega_и = 0$.

Зависимость момента инерции от массы и геометрических характеристик профиля представим выражением [2, 6]

$$J = mb^2R^2,$$

где R – радиус инерции аэродинамического профиля, $R^2 = 0{,}25$.

Критическую скорость флаттера запишем в безразмерной форме [2]:

$$\overline{V}_i = \frac{V_i}{b\omega_k}.$$

Для упрощения вычислений введем следующие относительные величины:

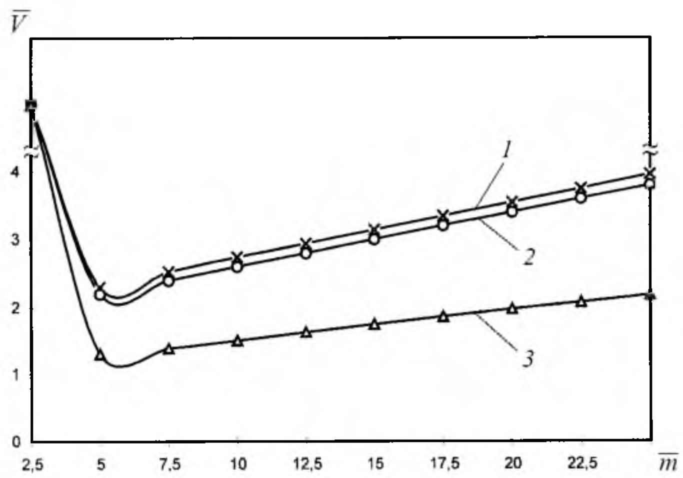
$$\overline{A}'_{3i} = \frac{A'_{3i}}{\omega_k^2}; \quad \overline{C}_1 = \frac{C_i}{\omega_k^2}; \quad \overline{D}_i = \frac{D_i}{\omega_k^2}; \quad \overline{B}_i = \frac{B_i}{\omega_k^2}; \quad \overline{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\omega_k}.$$

Изменение этих величин и параметров изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля по итерациям при $\overline{m} = 20{,}0$ приведено в таблице.

Результаты расчетов изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля в нестационарном потоке при $\overline{m}$ = 20,0

№ итерации	k_i	$F(k_i)$	$-G(k_i)$	$-A'_{1i}$	$\overline{A}'_{3i}$	$\overline{\omega}_i$	$\overline{B}_i$	$\overline{C}_i$	$-\overline{D}_i$	$\overline{V}_i$
1	0	1,000	0	2,804	1,524	0,736	0,547	0,552	4,228	2,780
2	0,265	0,683	0,183	2,669	1,041	0,535	0,289	0,750	3,337	3,780
3	0,142	0,779	0,185	2,710	1,187	0,544	0,299	0,761	3,404	3,530
4	0,154	0,768	0,187	2,705	1,170	0,546	0,301	0,763	3,416	3,547

Сравнение критических скоростей флаттера, полученных методом итераций, с результатами работы [2] при различных величинах $\overline{m}$ приведено на рисунке. Видно, что максимальное отличие сравниваемых результатов при значениях относительных масс, близких к реальным ($\overline{m} \geq 20{,}0$), не превышает 4...5%. Там же представлены результаты оценки критической скорости флаттера по теории крыла в стационарном потоке [6, 10]. Их сравнение показывает, что критическая скорость изгибно-крутильного флаттера в этом случае оказывается значительно меньше, т.е. реальные запасы по критической скорости изгибно-крутильного флаттера аэродинамических поверхностей оказываются больше нормируемых. Этот факт был неоднократно подтвержден и другими экспериментальными исследованиями [4].



Сравнение критической скорости флаттера аэродинамического профиля в стационарном и нестационарном потоке: *1* – метод итераций; *2* – по данным работы [2]; *3* – для стационарного потока.

Таким образом, предложенный метод по сравнению с известными обеспечивает достаточно быструю сходимость итерационного процесса и позволяет более достоверно, чем по теории крыла в стационарном потоке, определять критическую скорость изгибно-крутильного флаттера аэродинамических поверхностей и проектировать конструкции с оптимальными по условиям флаттера весовыми характеристиками.

Резюме

Запропоновано метод, який дозволяє на ранній стадії проектування за тричотири ітерації визначати критичну швидкість флатера аеродинамічних профілів із використанням теорії крила в нестаціонарному потоці і створювати авіаційні конструкції з оптимальними ваговими характеристиками.

1. *Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В.* Введение в аэроавтоупругость. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л.* Аэроупругость. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959. – 799 с.
3. *Смирнов А. И.* Аэроупругая устойчивость летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1980. – 231 с.
4. *Келдыш М. В.* Избранные труды. Механика. – М.: Наука, 1985. – 568 с.
5. *Гурьянов И. А., Котовский В. Н., Ништ М. И.* Математическое моделирование нестационарного обтекания вязким потоком телесного крыла конечного размаха // Учен. зап. ЦАГИ. – 1991. – **22**, № 3. – С. 35 – 42.

6. *Некрасов А. И.* Сравнительный анализ расчета флаттера по теории неустановившегося и установившегося потоков // Инж. сб. – 1951. – **10**. – С. 109 – 168.
7. *Левкин В. Ф.* Экспериментальные исследования нестационарных аэродинамических характеристик поверхности управления при трансзвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. – 1982. – Вып. 2132. – 16 с.
8. *Нуштаев Ю. П.* Нестационарные аэродинамические характеристики профиля в трансзвуковом потоке идеального газа // Учен. зап. ЦАГИ. – 1982. – **13**, № 1. – С. 1 – 10.
9. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. – М.: Физматгиз, 1961. – 784 с.
10. *Сафронов А. В., Сафронов В. А.* Графо-аналитические методы параметрической оценки характеристик изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля // Пробл. прочности. – 1997. – № 4. – С. 95 – 106.

Поступила 21. 03. 2001