

## **Вибрационные характеристики усталостного повреждения стержневых элементов конструкций**

**А. П. Бовсуновский, В. В. Матвеев**

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

*Рассматриваются свободные колебания упругого консольного стержня с краевой закрывающейся трещиной. Трещина моделируется упругим шарниром, податливость которого полагается конечной и определяется исходя из энергетического критерия эквивалентности. Построен алгоритм последовательного расчета собственных форм колебаний стержня для каждого из ограниченного числа циклов его колебаний. Показано, что при раскрытии и закрытии трещины возникают также другие формы колебаний стержня, отличные от изначально задаваемой, исследованы особенности их проявления.*

*Выполнен анализ чувствительности вибрационных характеристик повреждения, определяемых на основе оценки нелинейных искажений формы волны перемещения, ускорения и деформации сечений стержня с закрывающейся трещиной.*

**Ключевые слова:** консольный стержень, изгибные колебания, трещина усталости, собственная частота и форма, закрывающаяся трещина, механика разрушения, гармонический анализ.

**Введение.** Некоторые механические конструкции в реальных условиях эксплуатации подвергаются совместному или разделному действию динамической нагрузки, температуры и агрессивной среды, что приводит к возникновению усталостных и термоусталостных трещин, коррозионному растрескиванию и другим видам повреждений. Непосредственное визуальное обнаружение таких повреждений во многих случаях затруднено или невозможно, а использование локальных неразрушающих методов требует больших затрат времени и зачастую оказывается неэффективным.

Перспективным в этой связи является использование вибрационных методов диагностики повреждения, основанных на взаимосвязи вибрационных характеристик (например, собственные частоты [1–3] и формы [4] колебаний) или особенностей поведения нелинейной колебательной системы (например, нелинейные искажения волны колебаний [5–8], возникновение суб- и суперрезонансных колебаний [7–9], смещение антирезонансных частот [10]) с параметрами (размеры и местоположение) повреждения.

Анализ изменения вибрационных характеристик реальных конструкций при возникновении повреждения – сложная задача. Однако она значительно упрощается, если конструкцию или ее элементы с достаточной для инженерной практики точностью представить в виде стержневой колебательной системы с краевыми условиями и условиями нагружения, близкими к реальным.

Особое внимание во многих работах уделяют конструкциям, при вибрации которых трещина открыта на одном полуцикле колебаний и закрыта на другом. Такая трещина называется закрывающейся и обуславливает существ-

венную нелинейность колебательной системы. Оценка этой нелинейности позволяет расширить круг возможных вибрационных характеристик повреждения (ВХП).

Наиболее просто характеристики колебаний какого-либо стержневого элемента определяются в предположении, что трещина не изменяет его форму колебаний. Это позволяет при заданной форме колебаний элемента рассматривать его как систему с одной степенью свободы [11]. Получаемое в этом случае решение, строго говоря, справедливо при относительно малой глубине трещины.

Ранее [12] получено решение задачи об изгибных колебаниях консольного стержня с закрывающейся трещиной для первого цикла колебаний и показано, что при раскрытии трещины возникают и другие, отличные от изначально задаваемой, собственные формы колебаний стержня. Такой подход к решению задачи позволяет рассматривать не только первый, но и последующие циклы колебаний. Задача настоящей работы состояла в построении алгоритма расчета собственных форм колебаний стержня на каждом из ограниченного числа циклов колебаний, исследовании на его основе особенностей возникновения сопутствующих форм колебаний и сравнительной оценке чувствительности ряда ВХП. В качестве ВХП рассмотрены собственные частоты и формы колебаний, уровень нелинейных искажений формы волны перемещения, ускорения и деформации.

**Методика расчета.** Решение задачи об изгибных колебаниях стержня с закрывающейся краевой трещиной строится на основе синтеза решений дифференциальных уравнений, описывающих свободные поперечные колебания стержня Бернулли–Эйлера без трещины и с открытой трещиной [12]. Полуцикл колебаний при закрытой трещине описывается уравнением

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x)(P_i \sin \omega_i t + R_i \cos \omega_i t), \quad (1)$$

где  $w_i(x)$ ,  $\omega_i$  – соответственно собственные формы и угловые частоты колебаний стержня;  $P_i$ ,  $R_i$  – коэффициенты, подлежащие определению;  $i$  – номер формы колебаний.

На полуцикле колебаний, когда трещина открыта, стержень моделируется двумя стержнями, соединенными между собой упругим шарниром, имеющим некоторую угловую податливость и расположенным на расстоянии  $L_T$  от заделки (рис. 1). Этот полуцикл колебаний описывается уравнением

$$y_{Tj}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_{ij}(x)(P_{Ti} \sin \omega_{oi} t + R_{Ti} \cos \omega_{oi} t), \quad (2)$$

где  $w_{ij}(x)$  – собственные формы колебаний стержня на  $j$ -м участке ( $j = 1, 2$ );  $\omega_{oi}$  – собственные угловые частоты колебаний стержня с открытой трещиной;  $P_{Ti}$ ,  $R_{Ti}$  – коэффициенты, подлежащие определению.

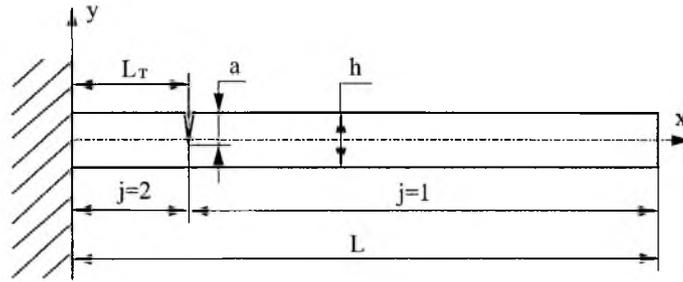


Рис. 1. Схема консольного стержня с краевой закрывающейся трещиной.

Краевые условия для угла поворота  $\theta_{ij}(x)$ , изгибающего момента  $M_{ij}(x)$  и поперечной силы  $Q_{ij}(x)$  и условия сопряжения участков стержня имеют вид

$$\begin{aligned} M_{i1}(L) &= I_m \omega_{oi}^2 k_{oi} [A_{i1}V(k_{oi}L) + B_{i1}S(k_{oi}L) + C_{i1}T(k_{oi}L) + D_{i1}U(k_{oi}L)]; \\ Q_{i1}(L) &= -m_L \omega_{oi}^2 [A_{i1}S(k_{oi}L) + B_{i1}T(k_{oi}L) + C_{i1}U(k_{oi}L) + D_{i1}V(k_{oi}L)]; \\ w_{i1}(L_T) &= w_{i2}(L_T); \quad \theta_{i1}(L_T) - \theta_{i2}(L_T) = \delta_T M_{i1}(L_T); \quad M_{i1}(L_T) = M_{i2}(L_T); \\ Q_{i1}(L_T) &= Q_{i2}(L_T); \quad w_{i2}(0) = 0; \quad \theta_{i2}(0) = 0, \end{aligned}$$

где  $k_{oi}^4 = \omega_{oi}^2 \rho F / EI$ ;  $\delta_T$  – изменение податливости сечения с трещиной;  $L$  – длина стержня;  $E, \rho$  – соответственно модуль упругости и плотность материала стержня;  $I, F$  – соответственно момент инерции и площадь поперечного сечения стержня;  $m_L$  – масса груза на конце стержня;  $I_m$  – момент инерции массы;  $S, T, U, V$  – функции Крылова.

Частотное уравнение, определяющее собственные частоты колебаний стержня с открытой трещиной, запишем следующим образом:

$$\begin{vmatrix} U(\varphi_i) - q_0 V(\varphi_i) & V(\varphi_i) - q_0 S(\varphi_i) & S(\varphi_i) - q_0 T(\varphi_i) & T(\varphi_i) - q_0 U(\varphi_i) & 0 & 0 \\ T(\varphi_i) + g_0 S(\varphi_i) & U(\varphi_i) + g_0 T(\varphi_i) & V(\varphi_i) + g_0 U(\varphi_i) & S(\varphi_i) + g_0 V(\varphi_i) & 0 & 0 \\ S(\psi_i) & T(\psi_i) & U(\psi_i) & V(\psi_i) & -S(\psi_i) & -T(\psi_i) \\ V(\psi_i) - r_0 U(\psi_i) & S(\psi_i) - r_0 V(\psi_i) & T(\psi_i) - r_0 S(\psi_i) & U(\psi_i) - r_0 T(\psi_i) & -T(\psi_i) & -U(\psi_i) \\ U(\psi_i) & V(\psi_i) & S(\psi_i) & T(\psi_i) & -S(\psi_i) & -T(\psi_i) \\ T(\psi_i) & U(\psi_i) & V(\psi_i) & S(\psi_i) & -V(\psi_i) & -S(\psi_i) \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

где  $\varphi_i = k_{oi}L$ ;  $\psi_i = L_T \varphi_i / L$ ;  $q_0 = I_m \varphi_i^3 / \rho FL^3$ ;  $g_0 = m_L \varphi_i / \rho FL$ ;  $r_0 = EI \delta_T \varphi_i / L$ .

Изменение податливости упругого шарнира определялось с использованием подходов линейной механики разрушения и энергетических соотношений [13]:

$$\delta_T(\gamma) = \frac{8,82[(1-\gamma)^6 - 3(1-\gamma)^2 + 2]}{(1-\gamma)^2 bh^2 E}. \quad (4)$$

Здесь  $\gamma = a / h$  – относительная глубина трещины, где  $a$  – глубина трещины;  $h$  – высота поперечного сечения. При выводе формулы (4) использовано выражение для определения коэффициента интенсивности напряжений (КИН) при изгибе полосы с боковым вырезом, предложенное Черепановым [14]:

$$K_I = \frac{4,2 M}{bh^{3/2}} [(1-\gamma)^{-3} - (1-\gamma)^3]^{1/2}. \quad (5)$$

Заметим, что результаты расчетов собственных частот и форм (до пятой включительно) колебаний консольного стержня с представленной выше моделью трещины в виде упругого шарнира и с более сложной моделью в виде короткой секции с уменьшенным моментом инерции сечения [12] оказались практически одинаковыми. В обоих случаях для оценки обусловленного наличием трещины изменения потенциальной энергии деформации стержня использовали выражение (5).

Выбор выражения для определения КИН влияет на результаты расчета собственных частот и форм колебаний по причине различия значений КИН, вычисленных по разным формулам. Например, различие между значениями КИН, определенными по формуле (4) из [15] и по формуле (5), достигает 13,2%. Таким образом, адекватность моделирования колебаний стержня с трещиной при использовании энергетического подхода зависит не столько от типа модели трещины, сколько от выбора выражения для КИН. В настоящей работе предпочтение отдано выражению (5), что обосновано ранее [12].

Допустим, что на первом и последующих нечетных полуциклах колебаний трещина закрыта ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ), а на четных – открыта ( $n = 2, 4, 6, \dots$ ). Начальные условия для перемещения, скорости, угла поворота и скорости изменения угла поворота сечений стержня на 1-м полуцикле колебаний ( $n = 1$ ) в момент времени  $t_1 = 0$  приняты соответственно следующими:  $y_1(x) = 0$ ;  $v_1(x) = \omega_s w_s(x)$ ;  $\theta_1(L) = 0$ ;  $[\partial \theta_1(L, t) / \partial t]_{t_1=0} = \omega_s \theta_s(L)$ , где  $s$  – номер начальной задаваемой (исходной) формы колебаний. Другие формы колебаний ( $i \neq s$ ), возникающие в момент открытия или закрытия трещины, назовем сопутствующими. При указанных начальных условиях  $P_{1,s} = 1$  и  $P_{1,i \neq s} = R_{1,i \neq s} = 0$ .

На четных полуциклах колебаний коэффициенты  $P_{n,ti}$  и  $R_{n,ti}$  определяются по формулам

$$P_{n,ti} = \frac{\omega_{oi} G_{n,1} \sin \omega_{oi} t_n + G_{n,2} \cos \omega_{oi} t_n}{\omega_{oi} \left[ \int_0^{L_i} m w_{i2}^2(x) dx + \int_{L_i}^L m w_{i1}^2(x) dx + m_L w_{i1}^2(L) + I_m \theta_{i1}^2(L) \right]}; \quad (6)$$

$$R_{n, \pi i} = \frac{\omega_{oi} G_{n,1} \sin \omega_{oi} t_n - G_{n,2} \cos \omega_{oi} t_n}{\omega_{oi} \left[ \int_0^{L_r} m w_{i2}^2(x) dx + \int_{L_r}^L m w_{i1}^2(x) dx + m_L w_{i1}^2(L) + I_m \theta_{i1}^2(L) \right]}, \quad (7)$$

где  $m = \rho F$  — интенсивность массы стержня;

$$G_{n,1} = \int_0^{L_r} m y_{n-1}(x) w_{i2}(x) dx + \int_{L_r}^L m y_{n-1}(x) w_{i1}(x) dx +$$

$$+ m_L y_{n-1}(L) w_{i1}(L) + I_m \theta_{n-1}(L) \theta_{i1}(L),$$

$$G_{n,2} = \int_0^{L_r} m v_{n-1}(x) w_{i2}(x) dx + \int_{L_r}^L m v_{n-1}(x) w_{i1}(x) dx +$$

$$+ m_L v_{n-1}(L) w_{i1}(L) + I_m \left[ \frac{\partial \theta_{n-1}(L, t)}{\partial t} \right]_{t_n} \theta_{i1}(L)$$

при соответствующих начальных условиях

$$y_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x) (P_{n-1,i} \sin \omega_i t_n + R_{n-1,i} \cos \omega_i t_n);$$

$$v_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i w_i(x) (P_{n-1,i} \cos \omega_i t_n - R_{n-1,i} \sin \omega_i t_n);$$

$$\theta_{n-1}(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(L) (P_{n-1,i} \sin \omega_i t_n + R_{n-1,i} \cos \omega_i t_n);$$

$$\left[ \frac{\partial \theta_{n-1}(L, t)}{\partial t} \right]_{t_n} = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \theta_i(L) (P_{n-1,i} \cos \omega_i t_n - R_{n-1,i} \sin \omega_i t_n),$$

определяемых в моменты времени, когда упругая линия исходной формы колебаний стержня переходит через нейтральное положение:

$$t_n = \frac{n \pi}{2 \omega_s} + \left( \frac{n-2}{2} \right) \frac{\pi}{\omega_{os}}. \quad (8)$$

На третьем и последующих нечетных полуциклах колебаний ( $n = 3, 5, 7, \dots$ ) коэффициенты  $P_{n,i}$  и  $R_{n,i}$  определяются по формулам

$$P_{n,i} = \frac{\omega_i G_{n,3} \sin \omega_i t_n + G_{n,4} \cos \omega_i t_n}{\omega_i \left[ \int_0^L m w_i^2(x) dx + m_L w_i^2(L) + I_m \theta_i^2(L) \right]}; \quad (9)$$

$$R_{n,i} = \frac{\omega_i G_{n,3} \sin \omega_i t_n - G_{n,4} \cos \omega_i t_n}{\omega_i \left[ \int_0^L m w_i^2(x) dx + m_L w_i^2(L) + I_m \theta_i^2(L) \right]}, \quad (10)$$

где

$$G_{n,3} = \int_0^L m y_{n-1,j}(x) w_i(x) dx + m_L y_{n-1,j}(L) w_i(L) + I_m \theta_{n-1,j}(L) \theta_i(L),$$

$$G_{n,4} = \int_0^L m v_{n-1,j}(x) w_i(x) dx + m_L v_{n-1,j}(L) w_i(L) + I_m \left[ \frac{\partial \theta_{n-1,j}(L,t)}{\partial t} \right]_{t_n} \theta_i(L)$$

при соответствующих начальных условиях

$$y_{n-1,j}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} w_{i,j}(x) (P_{n-1, \tau i} \sin \omega_{oi} t_n + R_{n-1, \tau i} \cos \omega_{oi} t_n);$$

$$v_{n-1,j}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{oi} w_{ij}(x) (P_{n-1, \tau i} \cos \omega_{oi} t_n - R_{n-1, \tau i} \sin \omega_{oi} t_n);$$

$$\theta_{n-1,j}(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{ij}(L) (P_{n-1, \tau i} \sin \omega_{oi} t_n + R_{n-1, \tau i} \cos \omega_{oi} t_n);$$

$$\left[ \frac{\partial \theta_{n-1,j}(L,t)}{\partial t} \right]_{t_n} = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{oi} \theta_{ij}(L) (P_{n-1, \tau i} \cos \omega_{oi} t_n - R_{n-1, \tau i} \sin \omega_{oi} t_n),$$

определяемых в моменты времени

$$t_n = \frac{n-1}{2} \left( \frac{\pi}{\omega_s} + \frac{\pi}{\omega_{os}} \right). \quad (11)$$

Коэффициенты  $P$  и  $R$ , а также усредненные по  $N$  (четное число) циклам колебаний их значения представим следующим образом:

$$H_{n,i} = \sqrt{P_{n,i}^2 + R_{n,i}^2}; \quad H_{n, \tau i} = \sqrt{P_{n, \tau i}^2 + R_{n, \tau i}^2}; \quad (12)$$

$$\bar{H}_i = \sum_{n=1,3,\dots}^{N-1} H_{n,i} / N; \quad \bar{H}_{ti} = \sum_{n=2,4,\dots}^N H_{n,ti} / N. \quad (13)$$

Помимо коэффициентов (12) определяли также их максимальные и минимальные значения за  $N$  циклов колебаний:  $H_{n,i}^{\max}$ ,  $H_{n,i}^{\min}$ ,  $H_{n,ti}^{\max}$ ,  $H_{n,ti}^{\min}$ .

**Оценка ограничения, накладываемого расчетной методикой на величину глубины трещины.** Алгоритм расчета построен в предположении, что на соответствующих полупериодах колебаний трещина либо постоянно открыта, либо закрыта. В то же время при возникновении значительных амплитуд сопутствующих форм колебаний момент открытия или закрытия трещины может наступить раньше момента времени  $t_n$ , когда сечение с трещиной оказывается в нейтральном положении. В этом случае алгоритм расчета в представленном виде использовать нельзя. Критерием оценки диапазона его применимости служит фактор изменения знака изгибающего момента в сечении с трещиной:

$$M_n(L_T, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 w_i(x)}{\partial x^2} \right]_{x=L_T} (P_{n,i} \sin \omega_i t + R_{n,i} \cos \omega_i t); \quad (14)$$

$$M_{n,T}(L_T, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 w_{i1}(x)}{\partial x^2} \right]_{x=L_T} (P_{n,ti} \sin \omega_{oi} t + R_{n,ti} \cos \omega_{oi} t). \quad (15)$$

Значения параметров трещины, при которых начинается изменение знака изгибающего момента, определяют границы применимости алгоритма расчета. Заметим, что предложенный подход может быть распространен также на случай, когда трещина либо открывается на нечетных полупериодах, либо закрывается на четных, однако, очевидно, что при этом процедура построения решения усложнится.

В работе [16] показано, что при увеличении гибкости стержня, определяемой отношением  $L/h$ , происходит снижение чувствительности собственных частот колебаний стержня к размеру трещины. Поэтому при расчетах принято наименьшее отношение  $L/h = 20$ , которое позволяет оставаться в рамках теории Бернулли–Эйлера с достаточной точностью.

В табл. 1 приведены значения относительной глубины трещины, которые представляют собой верхнюю границу применимости расчетной модели для трех форм колебаний консольного стержня ( $L/h = 20$ ;  $L_T/L = 0,1$ ;  $b/h = 1$ ;  $m_L = 0$ ). Эти значения использовались при вычислениях амплитуд исходной и сопутствующих форм колебаний указанного стержня. Результаты вычислений свидетельствуют о том, что каждый полупериод колебаний стержня с закрывающейся трещиной характеризуется неповторяющимся набором соотношений амплитуд исходной и сопутствующих форм колебаний и что амплитуды сопутствующих форм могут достигать значительных величин.

При местоположении трещины  $L_T / L = 0,5$  амплитуды сопутствующих форм колебаний стержня при верхних пределах относительной глубины трещины ( $\gamma = 0,43$  для первой формы колебаний,  $\gamma = 0,68$  для второй,  $\gamma = 0,30$  для третьей) ниже, чем в случае  $L_T / L = 0,1$ , и в работе не приведены.

Т а б л и ц а 1

Коэффициенты исходной и сопутствующих форм колебаний консольного стержня ( $L_T / L = 0,1$ )

$a/h$	$s$	$i$	$H_{n,i}^{\min} / H_{n,ti}^{\min}$	$\bar{H}_i / \bar{H}_{ti}$	$H_{n,i}^{\max} / H_{n,ti}^{\max}$
0,53	1	1	0,969/0,754	0,985/0,765	1,000/0,778
		2	0/0,016	0,141/0,106	0,231/0,167
		3	0/0,002	0,036/0,031	0,063/0,054
0,54	2	1	0/0,020	0,223/0,156	0,437/0,279
		2	0,782/0,569	0,921/0,644	1,000/0,694
		3	0/0,071	0,175/0,142	0,380/0,299
0,48	3	1	0/0,004	0,210/0,162	0,367/0,272
		2	0/0,005	0,203/0,158	0,437/0,342
		3	0,818/0,695	0,913/0,778	1,000/0,850

Интересным представляется вопрос о причинах возникновения сопутствующих форм колебаний. Поскольку возможное соударение берегов трещины не учитывается при моделировании колебаний стержня с трещиной, оно не может быть источником возбуждения различных форм колебаний. Анализ выражений (6), (7) и (9), (10), определяющих амплитуды всех возникающих форм колебаний, приводит к выводу, что механизмом возникновения сопутствующих форм колебаний является нелинейный характер колебаний стержня при возникновении в нем закрывающейся трещины. Начальный строго гармонический характер колебаний неповрежденного стержня нарушается при возникновении трещины, и уровень нелинейных искажений колебательного процесса увеличивается по мере ее роста. Этим объясняется тот факт, что величина амплитуд сопутствующих форм колебаний прямо пропорциональна глубине трещины.

При наличии сопутствующих колебаний моменты времени, когда сечение с трещиной находится в нейтральном положении, строго говоря, не будут совпадать с соответствующими моментами времени, определяемыми по формулам (8) и (11). В диапазоне относительных глубин трещины  $0 \leq \gamma \leq 0,25$  влияние этого фактора на коэффициенты (12) мало и им можно пренебречь. Однако численная реализация расчетной модели предусматривает вычисление действительных моментов времени, в которые задаются начальные условия для последующих полуциклов колебаний.

Ранее на основе сопоставления результатов расчета с экспериментом показано, что предложенная расчетная методика позволяет с достаточной точностью прогнозировать изменение собственных частот [12] и форм [17] колебаний консольного стержня с трещиной усталости. Кроме того, при проведении экспериментальных исследований [12, 17] наблюдались предсказанные расчетом явления: возникновение сопутствующих форм колебаний и неповторяющийся набор высших форм колебаний на каждом полу-

цикле. Последнее обстоятельство обусловило необходимость усреднения результатов оценки нелинейных искажений формы волны деформации и ускорения за 100 400 циклов колебаний при использовании экспериментальной методики гармонического анализа [18]. Таким образом, предложенная расчетная методика адекватно описывает колебания консольного стержня с закрывающейся трещиной.

Отметим также, что экспериментальные исследования образцов с трещинами усталости [12] позволили обнаружить, что процесс возникновения сопутствующих форм колебаний зависит от амплитуды колебаний (закономерность не установлена) и от точности настройки частоты вынуждающей силы на собственную частоту колебательной системы.

**Результаты расчетов.** Расчеты выполнены для диапазона относительных глубин трещины  $0 \leq \gamma \leq 0,25$ , который является наиболее интересным с практической точки зрения. В этом диапазоне пределы изменения амплитуд колебаний по каждой из пяти исследованных собственных форм и усредненные за  $N$  циклов значения амплитуд достаточно быстро сходятся к определенным значениям (стабилизируются), т.е. процесс колебаний является устойчивым. Этот вывод иллюстрируется результатами расчетов коэффициентов  $H_{n,i}$  и  $H_{n,ti}$  и их усредненных значений (13) для первой (исходной) и двух сопутствующих форм колебаний консольного стержня ( $L/h = 20; L_T/L = 0,1; a/h = 0,25; m_L = 0$ ) с максимальной рассматриваемой глубиной трещины (табл. 2). Как видно, уже после 25-го цикла колебаний пределы изменения коэффициентов  $H_{n,i}$  и  $H_{n,ti}$ , как и их усредненные значения, остаются практически постоянными. Отклонение коэффициентов  $H_{n,s}$  и  $H_{n,ts}$  для первой формы колебаний от усредненного значения в табл. 2 не приведено, поскольку оно не превышает 0,02% (заметим, что это отклонение в случае, когда исходной являются вторая и третья формы колебаний, соответственно составляет 0,17 и 0,22%).

Т а б л и ц а 2

**Коэффициенты первой и сопутствующих форм колебаний консольного стержня ( $a/h = 0,25, L_T/L = 0,1$ )**

N, цикл	$s = 1$	$i = 2$			$i = 3$		
	$\bar{H}_s / \bar{H}_{ts}$	$H_{n,i}^{\min} / H_{n,ti}^{\min}$	$\bar{H}_i / \bar{H}_{ti}$	$H_{n,i}^{\max} / H_{n,ti}^{\max}$	$H_{n,i}^{\min} / H_{n,ti}^{\min}$	$\bar{H}_i / \bar{H}_{ti}$	$H_{n,i}^{\max} / H_{n,ti}^{\max}$
1	1,0/0,957	0/0	0/0,008	0/0,008	0/0	0/0,001	0/0,001
5	1,0/0,957	0/0,005	0,008/0,010	0,014/0,015	0/0,001	0,004/0,005	0,008/0,008
25	1,0/0,957	0/0,002	0,009/0,010	0,015/0,015	0/0,001	0,007/0,007	0,011/0,010
50	1,0/0,957	0/0,002	0,009/0,010	0,015/0,015	0/0,001	0,007/0,006	0,011/0,010
100	1,0/0,957	0/0,002	0,009/0,010	0,015/0,015	0/0,001	0,007/0,006	0,011/0,010
200	1,0/0,957	0/0,002	0,009/0,010	0,015/0,015	0/0,001	0,007/0,006	0,011/0,010

Поэтому в исследуемом диапазоне относительных глубин трещины можно ограничиться рассмотрением 1-го цикла колебаний, поскольку амплитуда 1-го цикла исходной формы колебаний отличается от амплитуд последующих циклов не более чем на 0,22%. Кроме того, при таких условиях можно пренебречь влиянием сопутствующих форм колебаний на

рассматриваемые вибрационные характеристики в силу малости их амплитуд как на 1-м, так и на последующих циклах. Следовательно, выражения (1) и (2) для определения перемещения различных сечений стержня преобразуются к виду

$$y(x, t) = w_s(x) \sin \omega_s t; \quad (16)$$

$$y_{Tf}(x, t) = w_{sj}(x)(P_{TS} \sin \omega_{os} t + R_{TS} \cos \omega_{os} t). \quad (17)$$

Максимальные отклонения оси стержня от его нейтрального положения на разных полциклах определяются следующим образом:

$$y^{\max}(x) = w_s(x); \quad (18)$$

$$y_{Tf}^{\max}(x) = w_{sj}(x) \left( P_{TS} \cos \frac{\omega_{os}}{\omega_s} \pi - R_{TS} \sin \frac{\omega_{os}}{\omega_s} \pi \right). \quad (19)$$

Волна деформации на поверхности стержня описывается выражениями [12]

$$\varepsilon(x, t) = M_s(x) \sin \omega_s t; \quad (20)$$

$$\varepsilon_T(x, t) = f_\varepsilon(x, \gamma) M_{sj}(x) (P_{TS} \sin \omega_{oi} t + R_{TS} \cos \omega_{oi} t), \quad (21)$$

где функция  $f_\varepsilon(x, \gamma)$  учитывает влияние трещины на распределение деформаций по поверхности стержня со стороны трещины и на противоположной стороне [12].

Поскольку рассматриваемые временные функции являются периодическими, для определения уровня их нелинейных искажений можно использовать Фурье-анализ:

$$F_T = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_{TS} t + \lambda_k), \quad (22)$$

где  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ;  $\lambda_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}$ ;  $\omega_{TS}$  – угловая частота колебаний стержня с закрывающейся трещиной по исходной форме [12];

$$a_k = \frac{\omega_{TS}}{\pi} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f(x, t) \cos k\omega_{TS} t dt + \int_{t_2}^{t_3} f_T(x, t) \cos k\omega_{TS} t dt \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (23)$$

$$b_k = \frac{\omega_{TS}}{\pi} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f(x, t) \sin k\omega_{TS} t dt + \int_{t_2}^{t_3} f_T(x, t) \sin k\omega_{TS} t dt \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Моменты времени  $t_1, t_2$  и  $t_3$  определяются формулами (8) и (11). Функции  $f(x, t)$  и  $f_T(x, t)$  в (23) и (24) определяются для волны перемещения соответственно выражениями (16) и (17), для волны ускорения – второй производной выражений (16) и (17) по времени, для волны деформации – уравнениями (20) и (21).

Уровень нелинейных искажений формы волны перемещения, ускорения и деформации оценивали так называемым коэффициентом гармоник [19]:

$$\chi = \sum_{k=2}^{20} A_k / A_1. \quad (25)$$

При его вычислении ограничивались определением амплитуд 20 гармоник, поскольку дальнейшее увеличение их числа не приводит к существенному изменению величины коэффициента гармоник.

Заметим, что поскольку каждый полупериод колебаний стержня с закрывающейся трещиной характеризуется своим неповторяющимся набором амплитуд сопутствующих колебаний, то в случаях, когда эти амплитуды достигают значительных величин, что возможно при больших относительных глубинах трещины, соответствующие функции, описывающие волны перемещения, ускорения и деформации, будут существенно непериодическими. К таким функциям неприменим Фурье-анализ, и для анализа их нелинейных искажений требуются другие подходы.

Геометрические характеристики стержня таковы:  $L / h = 20$ ;  $L_T / L = 0,1$  либо  $L_T / L = 0,5$ . Относительная глубина трещины варьируется в диапазоне  $0 \leq a / h \leq 0,25$ . Масса на конце стержня  $m_L$  и ее момент инерции  $I_m$  приняты равными нулю. Модуль упругости и плотность материала стержня, а также отношение  $b / h$  не оказывают влияния на относительное изменение рассматриваемых ВХП (при расчетах их значения принимались следующими:  $E = 200$  ГПа;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $b / h = 1$ ).

Ниже представлены результаты исследований наиболее чувствительных к повреждению вибрационных характеристик: коэффициент  $a_0$  и коэффициент гармоник  $\chi$ . Заметим, что относительная амплитуда второй гармоники, использованная в работе [12] в качестве характеристики повреждения, в среднем на 20...30% ниже коэффициента гармоник и поэтому здесь не рассматривается. С другой стороны, относительно небольшая разница между этими характеристиками означает, что все другие гармоники оказывают незначительное влияние на величину коэффициента гармоник.

На рис. 2 б показано изменение различных ВХП по длине стержня для трех собственных форм колебаний (на рисунках и в тексте индекс  $d$  обозначает перемещение, индекс  $a$  – ускорение, индекс  $cr$  – деформацию на поверхности с трещиной, индекс  $int$  – деформацию на неповрежденной поверхности стержня).

Так, рис. 2 иллюстрирует влияние закрывающейся трещины на отношение максимальных отклонений оси стержня от его нейтрального положения (при отсутствии трещины  $y_{ij}^{\max}(x) / y^{\max}(x) = 1$ ). Как видно, изменение этой характеристики, определяющей асимметрию цикла, является ка-

чественным признаком наличия повреждения типа закрывающейся трещины. Влияние трещины существенно ослабевает по мере ее удаления от заделки: этот вывод следует из сопоставления кривых 1 и 4. Изменение функции  $y_{Ti}^{max}(x)/y^{max}(x)$  невелико (не превышает 10% для первой формы колебаний): чем выше форма колебаний, тем оно меньше. Исключения составляют сечения, в которых указанная функция претерпевает разрыв (кривые 2 и 3), который связан с тем, что координаты узлов колебаний на полциклах, когда трещина закрыта и открыта, не совпадают. В табл. 3 приведены координаты узлов колебаний стержня на полциклах, когда трещина закрыта и открыта. Заметим, что рассматриваемые функции имеют перелом в сечении с трещиной: в сечении  $x/L = 0,1$  (кривые 1-3) и в сечении  $x/L = 0,5$  (кривая 4). Эту особенность функций можно использовать для определения местоположения трещины.

Т а б л и ц а 3

Координаты узлов колебаний и нулевых изгибающих моментов консольного стержня ( $a/h = 0,25, L_T/L = 0,1$ )

s	x/L			
	$y^{max}(x/L) = 0$	$y_{\bar{v}}^{max}(x/L) = 0$	$M^{max}(x/L) = 0$	$M_{\bar{v}}^{max}(x/L) = 0$
2	0,7834	0,7814	0,2166	0,2072
3	0,5036	0,5027	0,1324	0,1289
3	0,8677	0,8675	0,4964	0,4959

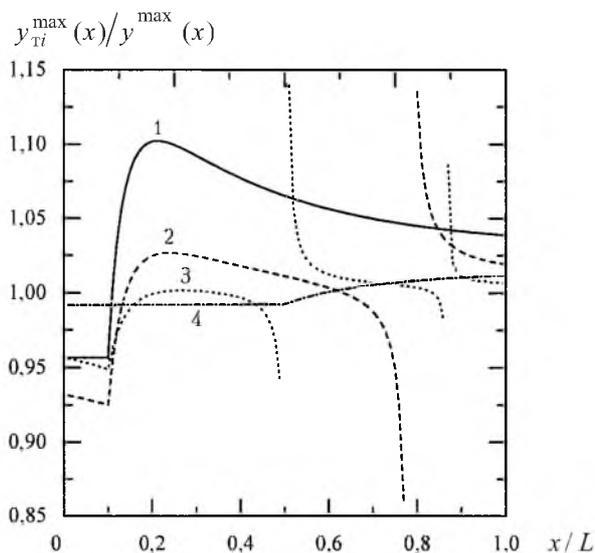


Рис. 2. Относительное изменение первой (1, 4), второй (2) и третьей (3) собственных форм колебаний стержня. (Здесь и на рис. 3–6: 1–3 –  $L_T/L = 0,1$ ; 4 –  $L_T/L = 0,5$ ;  $a/h = 0,25$ .)

Зависимости относительного изменения нулевого коэффициента для волны перемещения и ускорения качественно аналогичны зависимостям изменения асимметрии цикла колебаний, хотя степень их изменения не-

сколько ниже: до 9% для волны перемещения и до 6% для волны ускорения – эти оценки выполнены без учета поведения функций в окрестности узлов колебаний (при отсутствии трещины  $(a_0/A_1)_d = (a_0/A_1)_a = 0$ ) – рис. 3,а и 4,а. Зависимости для коэффициента гармоник имеют качественно другой вид (рис. 3,б и 4,б). Наибольшие значения коэффициента гармоник отмечаются вблизи заделки и узлов колебаний. Необходимо заметить, что при приближении к узлам колебаний с двух сторон соответствующие функции достигают максимумов.

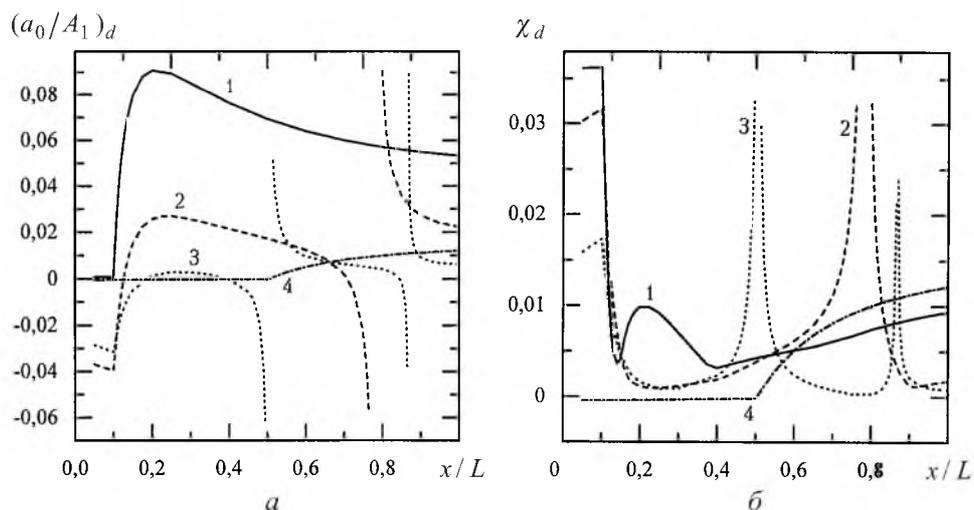


Рис. 3. Относительное изменение нулевого коэффициента (а) и коэффициента гармоник (б) по длине стержня для волны перемещения при первой (1, 4), второй (2) и третьей (3) собственных формах колебаний.

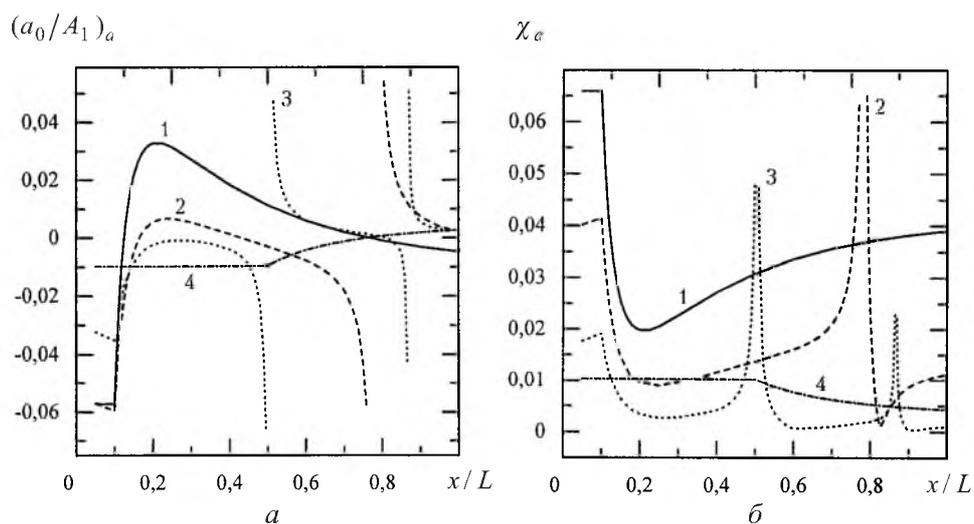


Рис. 4. Относительное изменение нулевого коэффициента (а) и коэффициента гармоник (б) по длине стержня для волны ускорения при первой (1, 4), второй (2) и третьей (3) собственных формах колебаний.

Чувствительность обеих характеристик для волны перемещения и ускорения снижается по мере удаления трещины от заделки (на рис. 3, 4 кривые 1, 4), а перелом функций их распределения по длине стержня указывает на сечение с трещиной.

Характерной особенностью изменения нулевого коэффициента по длине стержня для волны деформации является наличие максимумов в сечении с трещиной при всех формах колебаний (рис. 5,а и 6,а). При этом амплитуда нулевого коэффициента сопоставима с амплитудой первой гармоники. Здесь так же, как и в соответствующих случаях для волны перемещения и ускорения, имеет место разрыв функций при второй и третьей формах колебаний, обусловленный несовпадением координат сечений, при которых изгибающий момент достигает нулевого значения на разных полуциклах колебаний (табл. 3).

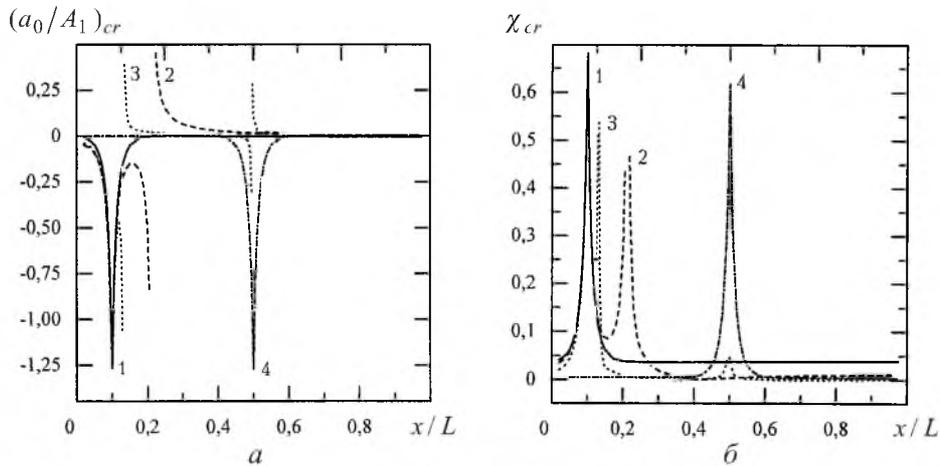


Рис. 5. Относительное изменение нулевого коэффициента (а) и коэффициента гармоник (б) по длине стержня для волны деформации на поверхности с трещиной при первой (1, 4), второй (2) и третьей (3) собственных формах колебаний.

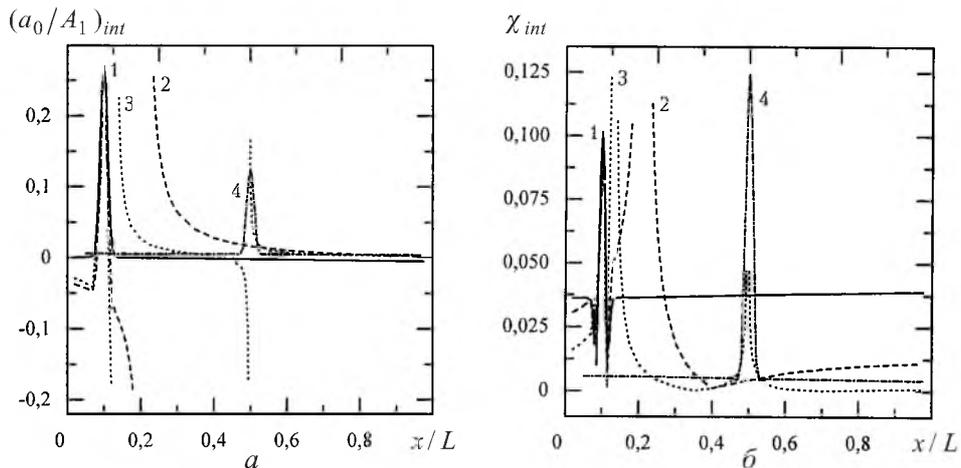


Рис. 6. Относительное изменение нулевого коэффициента (а) и коэффициента гармоник (б) по длине стержня для волны деформации на поверхности без трещины при первой (1, 4), второй (2) и третьей (3) собственных формах колебаний.

Коэффициенты гармоник для волны деформации достигают наибольших значений в сечениях с трещиной и в окрестности сечений с нулевым изгибающим моментом (рис. 5,б и 6,б). Обращает на себя внимание тот факт, что степень изменения коэффициента гармоник на неповрежденной поверхности стержня в окрестности трещины растет по мере удаления последней от заделки (на рис. 6,б кривые 1, 4), что качественно отличает эту характеристику от всех остальных.

Влияние массы груза на конце стержня и ее момента инерции на относительное изменение исследуемых вибрационных характеристик зависит от формы колебаний стержня. Так, различие в значениях функции  $y_{\text{т}}^{\text{max}}(x)/y^{\text{max}}(x)$  для стержня с массой ( $m_L = 7,8$  кг, что равно 50-кратной массе стержня, и  $I_m = 0,01$  кг·м<sup>2</sup>) и без массы на конце не превышает 1% для первой и 20% для второй формы. Наличие массы на конце стержня приводит к увеличению степени относительного изменения нулевого коэффициента (в некоторых случаях в несколько раз) и к снижению степени относительного изменения коэффициента гармоник для всех видов волн.

Анализ распределения вибрационных характеристик по длине стержня (рис. 2–6) позволяет определить сечения, в которых проявление той или иной характеристики наиболее значимо. Так, для относительного изменения асимметрии цикла колебаний и нулевого коэффициента для волны перемещения и ускорения – это сечение  $x/L = 0,2$  и сечения в окрестности узлов колебаний. Коэффициент гармоник для волны перемещения и ускорения наиболее существенно изменяется вблизи заделки и узлов колебаний. Нулевой коэффициент и коэффициент гармоник для волны деформации достигают максимума вблизи сечений с трещиной и с нулевым изгибающим моментом.

Однако возможность практического использования рассмотренных вибрационных характеристик при их измерении вблизи заделки и узлов колебаний вызывает сомнения, поскольку уровень колебаний указанных сечений стержня мал. Поэтому на рис. 7 приведены примеры зависимостей ВХП от относительной глубины трещины, измерение которых более реально с практической точки зрения. Исключение составляет коэффициент гармоник для волны ускорения при второй форме колебаний, определенный в сечении  $x/L = 0,78$  (кривая 3), амплитуда колебаний которого составляет 1,5% максимальной амплитуды колебаний стержня (сечение  $x/L = 1$ ). Отметим, что нулевой коэффициент для волны деформации на поверхности с трещиной (кривая 4 построена без учета знака исходной функции), как и коэффициент гармоник  $K_{cr}$  (по абсолютной величине приблизительно в два раза меньше нулевого коэффициента, соответствующая зависимость не показана), практически не зависит от размера трещины. Поэтому указанные характеристики совершенно непригодны для оценки величины повреждения. В то же время аналогичные характеристики, определяемые на противоположной от трещины поверхности стержня, заметно реагируют на рост трещины (кривые 5 и 6).

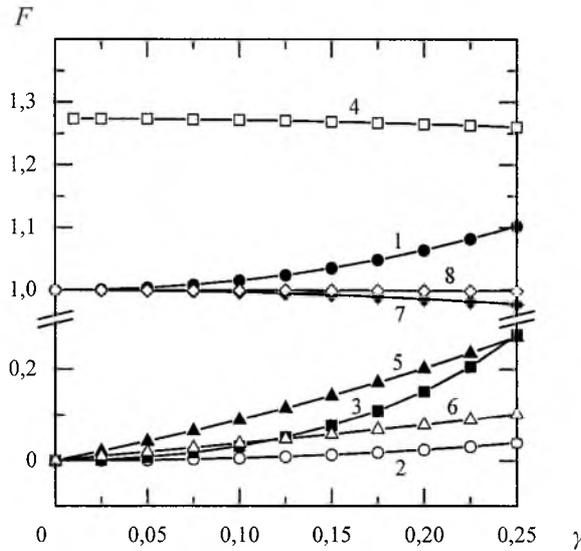


Рис. 7. Влияние размера трещины на относительное изменение ВХП консольного стержня с закрывающейся трещиной,  $L_T/L=0,1$ . (Здесь и на рис. 8: 1 –  $F = y_{Tj}^{\max}(x)/y^{\max}(x)$  ( $x/L=0,2; s=1$ ); 2 –  $F = K_a$  ( $x/L=1; s=1$ ); 3 –  $F = K_a$  ( $x/L=0,78; s=2$ ); 4 –  $F = (a_0/A_1)_{cr}$  ( $x/L=0,1; s=1$ ); 5 –  $F = (a_0/A_1)_{int}$  ( $x/L=0,1; s=1$ ); 6 –  $F = K_{int}$  ( $x/L=0,1; s=1$ ); 7 –  $F = \omega_T/\omega$  ( $s=1$ ); 8 –  $F = \omega_T/\omega$  ( $s=3$ ).

На рис. 7 также представлены зависимости относительного изменения собственных частот колебаний стержня от размера трещины. Как видно, влияние трещины на собственные частоты колебаний невелико по сравнению с другими ВХП и проявляется тем меньше, чем выше форма колебаний.

**Сравнительный анализ чувствительности ВХП.** В качестве меры чувствительности вибрационной характеристики  $F(\gamma)$  использовалась скорость ее изменения

$$V = \partial F(\gamma)/\partial \gamma. \tag{26}$$

Как видно из рис. 8, ни одна из рассмотренных на рис. 7 ВХП не обладает наибольшей чувствительностью во всем исследованном диапазоне размеров трещины. Наиболее чувствительными характеристиками в области малых трещин оказались нулевой коэффициент и коэффициент гармоник для волны деформации на неповрежденной поверхности стержня в сечении с трещиной (кривые 5 и 6). Чувствительность относительного изменения асимметрии цикла колебаний стержня (кривая 1) и коэффициента гармоник вблизи узла колебаний (кривая 3) достаточно высока во второй половине исследуемого диапазона размеров трещины. Однако возможность определения последнего на практике весьма проблематична.

В целом указанные характеристики обладают достаточной чувствительностью для диагностики относительно малых трещин. Однако, как отмечалось выше, эти характеристики определялись в специально выбранных сечениях, в которых они проявлялись наиболее значимо. В свою очередь, координаты таких характерных сечений зависят от местоположения трещины.

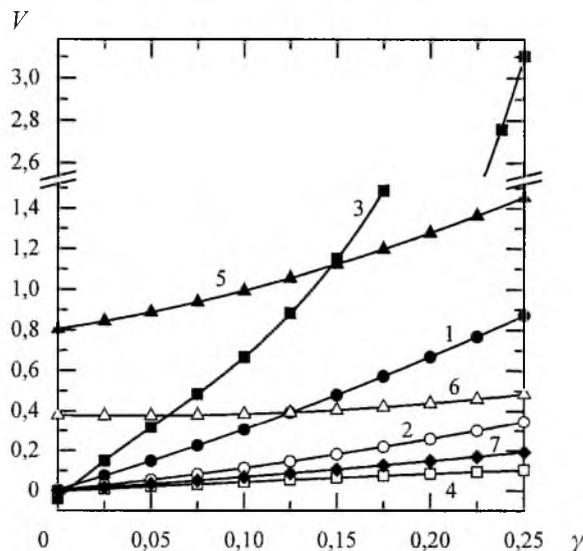


Рис. 8. Влияние размера трещины на скорости изменения ВХП  $V = \partial F(\gamma)/\partial \gamma$ , представленных на рис. 7.

Таким образом, для оптимального использования вибрационных характеристик необходимо знать местоположение трещины. Теоретически рассмотренные вибрационные характеристики, за исключением собственных частот колебаний, позволяют судить о местоположении трещины по перелому функции распределения соответствующей характеристики по длине стержня или по характерному максимуму этой функции. Однако на практике получение такой функции весьма трудоемко и не всегда возможно.

**Заключение.** Предложена расчетная модель для построения последовательного решения задачи определения собственных форм изгибных колебаний стержня с закрывающейся трещиной на каждом полуцикле его колебаний. Установлены пределы применимости расчетной методики.

Показано, что на каждом полуцикле колебаний такого стержня в момент открытия и закрытия трещины возникает неповторяющийся набор амплитуд сопутствующих форм колебаний. В исследованных пределах относительной глубины трещины ( $0 \leq \gamma \leq 0,25$ ) границы диапазона изменения этих амплитуд, как и их усредненные за  $N$  циклов колебаний значения, достаточно быстро стабилизируются, и в целом процесс колебаний устойчив.

Расчетная методика позволяет обнаружить характерные особенности колебаний консольного стержня с закрывающейся трещиной, что получило экспериментальное подтверждение, и, следовательно, может использоваться для решения как прямой, так и обратной задачи диагностики повреждения.

Как показали исследования, возникновение повреждения обуславливает существенную нелинейность зависимостей вибрационных характеристик от координаты сечения, для которого они определяются. Уровень этой нелинейности служит диагностическим признаком наличия повреждения типа закрывающейся трещины. Характерные особенности изменения вибрационной

характеристики по длине стержня в окрестности сечения с трещиной (перелом или максимум) указывают на местоположение трещины. Количественные изменения вибрационной характеристики по мере роста трещины позволяют определить размеры последней. Таким образом, на основе анализа изменения вибрационной характеристики по длине стержня может быть полностью решена задача диагностики повреждения, а именно: определение его размеров и местоположения.

Наиболее чувствительными вибрационными характеристиками повреждения являются нулевой коэффициент и коэффициент гармоник для волны деформации, определяемые в окрестности сечения с трещиной на противоположной от трещины поверхности стержня.

## Резюме

Розглядаються вільні коливання пружного консольного стрижня з крайовою тріщиною, що закривається. Тріщина моделюється пружним шарніром, податливість якого прийнята скінченною і визначається на основі енергетичного критерію еквівалентності.

Побудовано алгоритм послідовного розрахунку власних форм для кожного з обмеженого числа циклів коливань стрижня. Показано, що при розкритті і закритті тріщини виникають також інші, відмінні від початково заданої, форми коливань стрижня, досліджено особливості їхнього прояву.

Проаналізовано чутливість вібраційних характеристик пошкодження, що визначаються на основі оцінки нелінійних спотворень форми хвилі переміщення, прискорення і деформації перетинів стрижня з тріщиною, що закривається.

1. *Ismail F., Ibrahim A., and Martin H. R.* Identification of fatigue cracks from vibration testing // *J. Sound and Vibration*. – 1990. – **140**, No. 2. – P. 305 – 317.
2. *Rytter A., Brincker R., and Kirkegaard P. H.* An Experimental Study of the Modal Parameters of a Cantilever // *Fracture & Dynamics*, Paper No. 37, Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Denmark, 1992. – 76 p.
3. *Cheng S. M., Swamidas A. S. J., Wu X. J., and Wallace W.* Vibrational response of a beam with a breathing crack // *J. Sound and Vibration*. – 1999. – **225**, No. 1. – P. 201 – 208.
4. *Rizos P. F., Aspragathos N., and Dimarogonas A. D.* Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes // *Ibid.* – 1990. – **138**, No. 3. – P. 381 – 388.
5. *Ballo I.* Non-linear effects of vibration of a continuous transverse cracked slender shaft // *Ibid.* – 1998. – **217**, No. 2. – P. 321 – 333.
6. *Ruotolo R., Surace C., Crespo P., and Storer D.* Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack // *Computers and Structures*. – 1996. – **61**, No. 6. – P. 1057 – 1074.

7. Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М. Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // Дефектоскопия. – 1985. – № 3. – С. 77 – 85.
8. Цыфанский С. Л., Бересневич В. И., Магоне М. А. Вибродиагностика усталостных трещин в несущих поверхностях летательных аппаратов на основе использования нелинейных эффектов // Там же. – 1993. – № 2. – С. 87 – 94.
9. Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I. Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // J. Sound and Vibration. – 1998. – **213**, No. 1. – P. 159 – 168.
10. Afolabi D. An antiresonance technique for detecting structural damage // Proc. of the 5th IMAC. – 1987. – P. 491 – 495.
11. Матвеев В. В. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Пробл. прочности. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
12. Матвеев В. В., Бовсуновский А. П. К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях // Там же. – 2000. – № 3. – С. 5 – 23.
13. Ostachowicz W. and Krawczuk M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam // J. Sound and Vibration. – 1991. – **150**, No. 2. – P. 191 – 201.
14. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
15. Reid Parameter R. and Mukherji B. Stress intensity factors for an edge-cracked strip in bending // Int. J. Fracture. – 1974. – **10**, No. 3. – P. 441 – 444.
16. Kikidis M. L. and Papadopoulos C. A. Slenderness ratio effect on cracked beams // J. Sound and Vibration. – 1992. – **155**, No. 1. – P. 1 – 11.
17. Bovsunovsky A. P. and Matveev V. V. Analytical approach to the determination of dynamic characteristics of a beam with a closing crack // Ibid. – 2000. – **235**, No. 3. – P. 415 – 434.
18. Бовсуновский А. П. Форма петли механического гистерезиса для металлических материалов при гармонических напряжениях ниже предела выносливости. Сообщ. 2. Экспериментальная методика и результаты // Пробл. прочности. – 1997. – № 3. – С. 119 – 130.
19. Бовсуновский А. П. К вопросу об исследовании колебаний нелинейной механической системы, моделирующей тело с трещиной // Там же. – 2001. – № 4. – С. 97 – 111.

Поступила 26. 12. 2000