УДК 539.4

Эллиптическая трещина нормального отрыва в бесконечном упругом теле. Сообщение 1. Перемещение берегов трещины при полиномиальном законе нагружения

И. В. Орыняк, А. Ю. Гиенко

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрена внутренняя эллиптическая трещина нормального отрыва в неограниченном упругом теле. Модифицирована описанная ранее методика определения весовой функции и коэффициента интенсивности напряжений. Получены аналитические и численные значения коэффициента интенсивности напряжений вдоль фронта трещины для различных случаев полиномиального закона нагружения.

Предложен подход к определению перемещений берегов трещины по значениям коэффициента интенсивности напряжений, в котором используются уравнение энергетического баланса Райса, теорема Дайсона и теория трансляции трещин в неоднородном поле напряжений. Получено замкнутое выражение для перемещений берегов эллиптической трещины при полиномиальном законе нагружения любой степени, которое может быть использовано в решении пространственных задач теории упругости с трещинами.

В инженерных конструкциях реальные дефекты моделируются трещинами в форме эллипса или его части. Несмотря на универсальность и многообразие применяемых численных методов, развитие аналитических методов расчета тел с эллиптическими трещинами остается актуальной задачей. Аналитические решения используются при проверке точности численных решений, при выделении сингулярностей и асимптотических особенностей решения, при создании на их основе эффективных численных процедур, например в методе альтернирования [1, 2] или методе граничных элементов [3].

Фундаментальное решение теории упругости для эллиптической трещины в бесконечном теле еще не найдено. Тем не менее достигнут прогресс в анализе трещин, которые находятся в поле нормальных напряжений, определяемых полиномами.

Первое аналитическое решение было получено Грином и Снеддоном [4] для трещин в однородном поле напряжений. Сегедин [5] ввел в рассмотрение семейство потенциальных функций, обеспечивающих выполнение заданных граничных условий на берегах трещины. В работах Ша и Кобаяши [6], Атлури и др. [7] эти функции использовались при установлении общей процедуры нахождения решения для полиномиального распределения напряжений. Однако в этих подходах используется трудоемкий аппарат эллиптических функций Якоби и эллипсоидальных функций Ламе, что ограничивает их практическое применение.

В работе [8] был предложен более простой путь, основанный на теореме Дайсона [9]. Согласно последней, перемещения берегов эллиптической трещины под действием нормальных напряжений, определяемых полиномами степени N, должны иметь следующий вид:

$$W(x,y)=\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{b}\right)^2}\sum_{i+j=0}^{N}W_{ij}\left(\frac{y}{a}\right)^i\left(\frac{x}{b}\right)^j, \tag{1}$$

где W_{ij} – некоторые постоянные коэффициенты. Соответствующее выражение для напряжений таково:

$$q(x,y)=\left(\frac{y}{a}\right)^k\left(\frac{x}{b}\right)^l, \tag{2}$$

где $k+l=N$ или, что эквивалентно:

$$q(\rho,\varphi)=\rho^N\cos m\varphi; \tag{3а}$$

$$q(\rho,\varphi)=\rho^N\sin m\varphi \tag{3б}$$

(a и b – меньшая и бульшая полуоси эллипса; (ρ,φ) – параметрические координаты с началом в центра эллипса (см. ниже)).

Использование результатов теоремы Дайсона позволило свести определение коэффициентов W_{ij} к потенциалам эллиптического диска, что, в свою очередь, дало возможность численно решать задачу для любой степени N полиномиальной нагрузки [8].

В работе [10] предложен оригинальный метод интегральных уравнений для решения интегро-дифференциального уравнения, которое связывает поле перемещений с нагрузкой, действующей на поверхности трещины. Это позволило найти весовую функцию при полиномиальном нагружении до второй степени (N=2).

Для всех указанных работ общим является то, что вначале определяется поле перемещений берегов трещины, а коэффициент интенсивности напряжений (КИН) является уже следствием этих решений. Оригинальный подход нахождения решения для КИН (весовой функции (ВФ)) без предварительного определения поля перемещений предложен ранее [11]. В нем использованы качественные результаты теоремы Дайсона [9] и метод трансляций трещины в неоднородном поле напряжений [12].

Тем не менее перемещения берегов трещины представляют большой интерес, поскольку позволяют достаточно просто получить гармонические потенциальные функции и решение краевых задач теории упругости.

Цель настоящей статьи, являющейся логическим продолжением [11], – установление поля перемещений берегов эллиптической трещины нормального отрыва для заданного полиномиального закона нагружения ее берегов. Технически задача сводится к определению коэффициентов W_{ij} решения (1) при заданном законе нагружения (3).

1. **Базовые результаты и понятия**. *Системы координат*. В случае эллиптической трещины наряду с прямоугольной (x,y) и полярной (r,θ) системами координат широко используется параметрическая система коор-

динат (ρ,φ) с началом в центре эллипса. Связь между параметрическими и полярными координатами имеет следующий вид:

$$\operatorname{tg}\theta = \alpha \operatorname{tg}\varphi; \quad \rho = \frac{r}{R(\theta)}; \quad R(\theta) = \frac{a}{\sqrt{\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta}}, \tag{4}$$

где α – отношение полуосей эллипса, $\alpha = a / b \le 1{,}0$; $R(\theta)$ – полярный радиус точек контура эллипса.

Ветви нагрузки. Напряжения, приложенные к берегам трещины, можно разделить на четыре ветви по виду симметрии относительно полуосей и центра эллипса. К первой ветви отнесем напряжения, симметричные относительно полуосей a и b, ко второй – симметричные относительно a и кососимметричные относительно b, к третьей – симметричные относительно b и кососимметричные относительно a и, наконец, к четвертой – напряжения, кососимметричные относительно полуосей a и b. Соответственно выражения для полиномиальных нагрузок (3а) и (3б) можно представить в следующем виде:

$$q(\rho,\varphi) = q^{c}_{2i+k,2j+k}\,\rho^{2i+k}\cos(2j+k)\varphi, \quad 0 \le j \le i; \tag{5а}$$

$$q(\rho,\varphi) = q^{s}_{2i-k,2j-k}\,\rho^{2i-k}\sin(2j-k)\varphi, \quad 1 \le j \le i, \tag{5б}$$

где $2i + k = N$; индекс k обозначает принадлежность к одной из указанных ветвей нагрузки (в выражении (5а): $k = 0$ – для первой ветви, $k = 1$ – для второй; в (5б): $k = 0$ – для четвертой, $k = 1$ – для третьей).

Ортонормированная на эллипсе система функций. Ранее [11] предложена ортогональная с весом $\Pi^{1/2}(\varphi)$ нормированная система функций $ce_n(\varphi)$, $se_n(\varphi)$:

$$\begin{gathered}\int_0^{2\pi} ce_i(\varphi)ce_j(\varphi)\Pi^{1/2}(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} se_i(\varphi)se_j(\varphi)\Pi^{1/2}(\varphi)d\varphi = \begin{cases}0, & i \ne j;\\ 1, & i = j;\end{cases}\\ \int_0^{2\pi} ce_i(\varphi)se_j(\varphi)\Pi^{1/2}(\varphi)d\varphi = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

где $\Pi^{1/2}(\varphi)$ – безразмерный элемент длины контура эллипса;

$$\Pi^{1/2}(\varphi) = \sqrt{\sin^2\varphi + \alpha^2\cos^2\varphi}. \tag{7}$$

Данная система функций строится на базе тригонометрических функций синусов и косинусов. Функцию $\cos n\varphi$ можно выразить через систему функций $ce_n(\varphi)$ в виде

$$\cos n\varphi = \beta_{n,n} ce_n(\varphi) + \beta_{n,n-2} ce_{n-2}(\varphi) + \ldots = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \beta_{n,n-2m} ce_{n-2m}(\varphi). \qquad (8а)$$

Аналогично $\sin n\varphi$ можно представить как

$$\sin n\varphi == \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \upsilon_{n,n-2m} se_{n-2m}(\varphi), \qquad (8б)$$

где $\beta_{n,n-2m}, \upsilon_{n,n-2m}$ – некоторые постоянные коэффициенты; здесь и далее скобки $[\cdot]$ над знаком суммы обозначают целую часть от выражения, заключенного внутри них.

Коэффициенты $\beta_{n,n-2m}$ определяются из выражения (8а) для всех индексов n и $n-2m$, начиная с низших значений и далее, домножая левые и правые части (8а) на $\cos k\varphi$ (при этом k принимает значения 0, 1, ..., n) и интегрируя с весом $\Pi^{1/2}(\varphi)$ с учетом условий ортогональности (6). В результате получена следующая рекуррентная формула для определения искомых коэффициентов:

$$\beta_{n,p} = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta_{p,p}} \left(M_{n,p} - \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \beta_{n,p-2i} \beta_{p,p-2i} \right), & p < n; \\ \sqrt{M_{n,n} - \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (\beta_{n,n-2i})^2}, & p = n, \end{cases} \qquad (9)$$

где $p = n - 2m \geq 0$; $[p/2]$ – целая часть от деления $p/2$; $M_{n,p}$ – определенные интегралы следующего вида:

$$M_{n,p} = \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos p\varphi \Pi^{1/2}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}(M_{n+p} + M_{n-p}); \qquad (10а)$$

$$M_k = \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \Pi^{1/2}(\varphi) d\varphi. \qquad (10б)$$

По аналогии получена рекуррентная формула для определения неизвестных коэффициентов $\upsilon_{n,n-2m}$ с использованием выражения (8б):

$$
v_{n,p} = \begin{cases} \dfrac{1}{v_{p,p}} \left(L_{n,p} - \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} v_{n,p-2i} v_{p,p-2i} \right), & p < n; \\ \sqrt{L_{n,n} - \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (v_{n,n-2i})^2}, & p = n, \end{cases} \tag{11}
$$

где $p > 0$; $L_{n,p}$ – коэффициенты,

$$
L_{n,p} = \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \sin p\varphi \Pi^{1/2}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}(M_{n-p} - M_{n+p}). \tag{12}
$$

Например, из выражений (9) и (11) следует

$$
\begin{gathered} \beta_{0,0} = \sqrt{M_{0,0}}; \; \beta_{1,1} = \sqrt{M_{1,1}}; \; \beta_{2,0} = \frac{M_{2,0}}{\beta_{0,0}}; \; \beta_{2,2} = \sqrt{M_{2,2} - (\beta_{2,2})^2}; \\ v_{1,1} = \sqrt{L_{1,1}}; \; v_{2,2} = \sqrt{L_{2,2}}. \end{gathered} \tag{13}
$$

Коэффициенты $M_{n,p}$ и $L_{n,p}$ легко могут быть найдены численным интегрированием, поскольку не содержат особенностей либо получены аналитически, например:

$$
\begin{cases} M_{0,0} = 4E(k); \\ M_{1,1} = \dfrac{4}{3k^2}[(2k^2 - 1)E(k) + (1 - k^2)K(k)]; \\ L_{1,1} = \dfrac{4}{3k^2}[(1 + k^2)E(k) - (1 - k^2)K(k)], \end{cases} \tag{14}
$$

где $k^2 = 1 - \alpha^2$; $E(k), K(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Ранее [11] приведены общие формулы для определения коэффициентов $\beta_{n,n-2m}$ и $v_{n,n-2m}$. Однако выражения (9) и (11), на наш взгляд, более наглядны и удобны для практического использования.

Функции $ce_n(\varphi)$ и $se_n(\varphi)$ можно записать через тригонометрические функции следующим образом:

$$
ce_n(\varphi) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varepsilon_{n,n-2m} \cos(n-2m)\varphi; \tag{15а}
$$

$$
se_n(\varphi) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \chi_{n,n-2m} \sin(n-2m)\varphi, \tag{15б}
$$

где $\varepsilon_{n,n-2m}$ и $\chi_{n,n-2m}$ – некоторые постоянные коэффициенты.

Выражение (15а) является обратным (8а), и коэффициенты $\varepsilon_{n,n-2m}$ и $\beta_{n,n-2m}$ – взаимосвязаны как элементы обратных матриц. Структуру последних можно представить на примере преобразования (8а) для ряда функций косинуса с четными аргументами, записанного в матричном виде:

$$
\begin{Bmatrix} \cos 0\varphi \\ \cos 2\varphi \\ \dots \\ \cos(2l)\varphi \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{0,0} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{2,0} & \beta_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{2l,0} & \beta_{2l,2} & \dots & \beta_{2l,2l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} ce_0(\varphi) \\ ce_2(\varphi) \\ \dots \\ ce_{2l}(\varphi) \end{Bmatrix}. \tag{16}
$$

Аналогичный вид имеет матрица преобразования для нечетных аргументов косинуса. Таким образом,

$$
\{\varepsilon_k\} = \{\beta_k\}^{-1}, \tag{17}
$$

где

$$
\{\varepsilon_k\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_{2+k,k} & \varepsilon_{2+k,2+k} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{2l+k,k} & \varepsilon_{2l+k,2+k} & \dots & \varepsilon_{2l+k,2l+k} \end{pmatrix};
$$

$$
\{\beta_k\} = \begin{pmatrix} \beta_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{2+k,k} & \beta_{2+k,2+k} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{2l+k,k} & \beta_{2l+k,2+k} & \dots & \beta_{2l+k,2l+k} \end{pmatrix},
$$

$k = 0, 1$; $2l + k = 0, \dots, N$. Размерности таких матриц: $(l+1) \times (l+1)$.

Коэффициенты $\chi_{n,n-2m}$ (15б) и $\upsilon_{n,n-2m}$ (8б) также взаимосвязаны между собой:

$$
\{\chi_k\} = \{\upsilon_k\}^{-1}. \tag{18}
$$

Заметим, что размерности этих матриц будут $(l+k)\times(l+k)$, поскольку при $k=0$ в обеих матрицах отсутствуют первые строка и столбец.

2. **Весовая функция**. По определению (см., например, [13]), весовой функцией называется коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва в точке Q' контура трещины при действии пары симметричных единичных сил, приложенных в произвольной точке Q на поверхности трещины. Таким образом, зная весовую функцию в каждой точке поверхности трещины, можно получить КИН для любого распределения напряжений. Ранее [11] было показано, что ВФ для эллиптической трещины в неограниченном теле при полиномиальном законе распределения напряжений степени N на ее поверхности можно определить в виде ряда:

$$F(\rho,\varphi,t)=\frac{2}{\pi ab\sqrt{1-\rho^2}}\left[\sum_{n=0}^{N}A_n(\rho,\varphi)ce_n(t)+\sum_{n=1}^{N}B_n(\rho,\varphi)se_n(t)\right], \tag{19}$$

где t – параметрический угол точки контура трещины; ρ,φ – координаты точки на поверхности трещины; A_n, B_n – некоторые неизвестные функции. Используя выражение (19) [11] и расписывая функции $ce_n(\varphi)$ согласно (15а) настоящей работы, представим функцию $A_n(\rho,\varphi)$ в следующем виде:

$$A_n(\rho,\varphi)=\rho^n\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\varepsilon_{n,n-2m}\cos(n-2m)\varphi+$$

$$+(1-\rho^2)\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{j=0}^{m-1}a^n_{n-2m,2j}\,\rho^{n-2m+2j}\cos(n-2m)\varphi. \tag{20}$$

Аналогично, используя (20) [11] и (15б), получаем

$$B_n(\rho,\varphi)=\rho^n\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\varepsilon_{n,n-2m}\sin(n-2m)\varphi+$$

$$+(1-\rho^2)\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{m-1}b^n_{n-2m,2j}\,\rho^{n-2m+2j}\sin(n-2m)\varphi, \tag{21}$$

где $a^n_{n-2m,2j}$, $b^n_{n-2m,2j}$ – неизвестные постоянные коэффициенты.

Каждая функция A_n, B_n содержит $S_n = \frac{r}{2}(1+r)$ неизвестных коэффициентов, где $r = \left[\frac{n}{2}\right]$ в случае A_n, $r = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ в случае B_n. Заметим, что эти коэффициенты отличаются от рассматриваемых в работе [11], однако определяются таким же способом. Для этого используется очевидное следствие теоремы Дайсона: при полиномиальном законе нагружения степени N вклад в КИН от функций A_n, B_n, где $n > N$, должен быть равен нулю. Для фиксированного значения индекса n, интегрируя весовую функцию (19) по одной стороне поверхности трещины совместно с серией полиномов (5a), где $j = 0, \ldots, [(n-k)/2]$; $i = j, \ldots, [(n-k)/2]$, получаем совокупность независимых систем уравнений для определения неизвестных коэффициентов $a^n_{n-2m,2j}$ функции A_n в виде

$$\varepsilon_{n,n-2m} I_{2(n-m+i)+1} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{I_{2(n-2m+i+j)+1}}{2(n-2m+i+j)+3} a^n_{n-2m,2j} = 0, \tag{22}$$

где $m = 1, \ldots, n$; $i = 0, \ldots, m-1$;

$$I_{2m+1} = \int_0^1 \frac{\rho^{2m+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \tag{23}$$

Таким образом, выражение (22) представляет собой n независимых систем уравнений, каждая из которых содержит m уравнений и m неизвестных.

Аналогично получено выражение для определения коэффициентов $b^n_{n-2m,2j}$ функции B_n:

$$\chi_{n,n-2m} I_{2(n-m+i)+1} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{I_{2(n-2m+i+j)+1}}{2(n-2m+i+j)+3} b^n_{n-2m,2j} = 0, \tag{24}$$

где $m = 1, \ldots, n$; $i = 0, \ldots, m-1$.

3. **Решение для КИН**. Если известна весовая функция, то решение для КИН при любом законе распределения напряжений $q(\rho,\varphi)$ на поверхности трещины S определяется интегралом:

$$\overline{K}_{\mathrm{I}}(t) = \int_{(S)} F(\rho,\varphi,t) q(\rho,\varphi) dS, \tag{25}$$

где dS – элементарная площадь поверхности трещины в параметрических координатах, $dS = ab\rho d\rho d\varphi$. В дальнейшем для удобства используем нормированное выражение для коэффициента интенсивности напряжений:

$$\overline{K}_{\mathrm{I}}(t)=\frac{K_{\mathrm{I}}(t)}{\sqrt{\pi a}\,\Pi^{1/4}(t)}. \tag{26}$$

Подставив (5а) и (19) в (25) и проинтегрировав, получим КИН для случая действия на берегах трещины нагрузки первой или второй ветвей:

$$\overline{K}_{\mathrm{I}_{2n+k,2p+k}}(t)=2q^{c}_{2n+k,2p+k}(1+\delta_{2p+k,0})\sum_{l=p}^{n}\Omega^{2l+k}_{2n+k,2p+k}ce_{2l+k}(t), \quad 0\le p\le n, \tag{27}$$

где $\delta_{2p+k,0}$ – символы Кронекера: $\delta_{i,j}=\begin{cases}0, & i\ne j\\ 1, & i=j\end{cases}$; напомним, что k определяет принадлежность к определенной ветви нагружения ($k=0,1$);

$$\Omega^{2l+k}_{2n+k,2p+k}=\sum_{j=0}^{l-p}k^{2l+k}_{2p+k,2j}I_{2(n+p+j+k)+1}; \tag{28}$$

$k^{2l+k}_{2p+k,2j}$ – постоянные коэффициенты,

$$k^{2l+k}_{2p+k,2j}=\begin{cases}\varepsilon_{2l+k,2l+k}, & j=0, & p=l;\\ a^{2l+k}_{2p+k,0}, & j=0, & p<l;\\ \varepsilon_{2l+k,2p+k}-a^{2l+k}_{2p+k,2(l-p-1)}, & j=l-p, & p<l;\\ a^{2l+k}_{2p+k,2j}-a^{2l+k}_{2p+k,2j-2}, & 0<j<l-p, & p<l.\end{cases} \tag{29}$$

Аналогично получим КИН при действии третьей и четвертой ветвей нагружения, описываемых полиномами (5б):

$$\overline{K}_{\mathrm{I}_{2n-k,2p-k}}(t)=2q^{s}_{2n-k,2p-k}\sum_{l=p}^{n}\Delta^{2l-k}_{2n-k,2p-k}se_{2l-k}(t), \quad 1\le p\le n, \tag{30}$$

где

$$\Delta^{2l-k}_{2n-k,2p-k}=\sum_{j=0}^{l-p}r^{2l-k}_{2p-k,2j}I_{2(n+p+j-k)+1}; \tag{31}$$

$$r^{2l-k}_{2p-k,2j}=\begin{cases}\chi_{2l-k,2l-k}, & j=0, & p=l;\\ b^{2l-k}_{2p-k,0}, & j=0, & p<l;\\ \chi_{2l-k,2p-k}-b^{2l-k}_{2p-k,2(l-p-1)}, & j=l-p, & p<l;\\ b^{2l-k}_{2p-k,2j}-b^{2l-k}_{2p-k,2j-2}, & 0<j<l-p, & p<l.\end{cases} \tag{32}$$

4. **Перемещения берегов эллиптической трещины**. Перемещения берегов трещины (1) удобно представить в параметрических координатах. Соответствующее выражение в случае действия нагрузок первой или второй ветвей, описываемых полиномами (5а), примет вид

$$W_{2n+k,2p+k}(\rho,\varphi)=a\sqrt{1-\rho^2}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=m}^{n}d_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k}\rho^{2j+k}\cos(2m+k)\varphi, \qquad (33а)$$

где $k=0,1;\ 0\le p\le n$. Аналогично при действии нагрузок третьей и четвертой ветвей (5б) получим

$$W_{2n-k,2p-k}(\rho,\varphi)=a\sqrt{1-\rho^2}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=m}^{n}e_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k}\rho^{2j-k}\sin(2m-k)\varphi, \qquad (33б)$$

где $k=0,1;\ 1\le p\le n;\ d_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k},\ e_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k}$ – неизвестные постоянные коэффициенты. Эти коэффициенты можно определить, приравнивая полные вариации перемещений берегов трещины, полученные, с одной стороны, из уравнения энергетического баланса Райса [14] и, с другой стороны, непосредственно из (33), варьируя последние в соответствии с [12]. При этом, как было показано в работе [12], необходимо учитывать изменение нагрузок на берегах трещины вследствие изменения формы трещины. Согласно [12], полную вариацию перемещений берегов трещины при пропорциональном изменении ее формы ($\delta a/\delta b=\alpha=\text{const}$) можно представить так:

$$\frac{\delta W(q)}{\delta a}=\frac{\partial W(q)}{\partial a}-W\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right), \qquad (34)$$

где $W(q)$ – перемещения берегов трещины при соответствующем распределении нагрузок $q(\rho,\varphi)$ на ее берегах.

Для полиномиального закона нагружения (5) следует

$$W\left(\frac{\partial q_{2n+k,2p+k}(\rho,\varphi)}{\partial a}\right)=-\frac{2n+k}{a}W_{2n+k,2p+k}(\rho,\varphi). \qquad (35)$$

Заметим, что в случае однородного нагружения ($n=k=0$) выражение (34) преобразуется к виду

$$\frac{\delta W(q)}{\delta a}=\frac{\partial W(q)}{\partial a}. \qquad (36)$$

Таким образом, подставив (33а) и (35) в правую часть (34), получим вариацию перемещений берегов трещины при действии первой и второй ветвей нагрузки:

$$\frac{\delta W(\rho,\varphi)}{\delta a}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=m}^{n}[1+(2n-2j)(1-\rho^2)]d_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k}\rho^{2j+k}\cos(2m+k)\varphi. \qquad (37)$$

Уравнение энергетического баланса интегрально связывает значения КИН для двух случаев нагружения берегов трещины, а также полную вариацию перемещений берегов трещины для одного случая нагружения и распределение напряжений для другого. Это уравнение позволяет найти полную вариацию перемещений берегов трещины при известных нагрузках на ее берегах и способе изменения формы трещины. Выбирая полиномиальный закон в качестве первого случая нагружения, а нагружение парой симметричных сосредоточенных сил в качестве второго, уравнение энергетического баланса при пропорциональном изменении формы трещины (см. выше) запишем в виде

$$\frac{\pi ab}{H}\int_0^{2\pi}F(\rho,\varphi,t)\overline{K}_{\mathrm{I}}(t)\Pi^{1/2}(t)dt=\frac{\delta W(\rho,\varphi)}{\delta a}. \qquad (38)$$

Подставив в (38) выражение для весовой функции (19), КИН (27) и проинтегрировав с учетом условий ортогональности (6), получим выражение для вариации перемещений берегов трещины под действием первой и второй ветвей нагружения:

$$\frac{\delta W_{2n+k,2p+k}(\rho,\varphi)}{\delta a}=\frac{4q_{2n+k,2p+k}(1+\delta_{2p+k,0})}{H\sqrt{1-\rho^2}}\sum_{l=p}^{n}A_{2l+k}(\rho,\varphi)\Omega_{2n+k,2p+k}^{2l+k}. \qquad (39)$$

Далее, представив функцию A_n в виде (20) и перегруппировав члены, получим

$$\frac{\delta W_{2n+k,2p+k}(\rho,\varphi)}{\delta a}=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\sum_{l=p}^{n}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=m}^{n}h_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k}\rho^{2j+k}\cos(2m+k)\varphi, \qquad (40)$$

где

$$h_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k}=\frac{4q_{2n+k,2p+k}(1+\delta_{2p+k,0})}{H}\sum_{l=\max|p,j|}^{n}k_{2m+k,2(j-m)}^{2l+k}\Omega_{2n+k,2p+k}^{2l+k}. \qquad (41)$$

Отметим, что нельзя получить решение для перемещений берегов трещины, находящейся в неоднородном поле нагружений, просто интегрируя (40) по характерному размеру трещины, поскольку при этом необходимо учитывать изменение поля напряжений, происходящее из-за изменения формы трещины.

Приравнивая выражения (37) и (40) при одинаковых степенях ρ и аргументах косинуса, получаем следующую итерационную формулу для определения искомых коэффициентов поля перемещений берегов трещины (33а) при действии первой и второй ветвей полиномиального нагружения (5а):

$$a_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k} = \begin{cases} \dfrac{h_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k}}{2n-2j+1}, & j = m; \\ \dfrac{h_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k} + (2n-2j+2)d_{2j-2+k,2m+k}^{2n+k,2p+k}}{2n-2j+1}, & j > m. \end{cases} \tag{42}$$

По аналогии определяются неизвестные коэффициенты в решении для поля перемещений берегов трещины (33б) при действии третьей и четвертой ветвей полиномиального нагружения (5б):

$$e_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k} = \begin{cases} \dfrac{l_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k}}{2n-2j+1}, & j = m; \\ \dfrac{l_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k} + (2n-2j+2)e_{2j-2-k,2m-k}^{2n-k,2p-k}}{2n-2j+1}, & j > m, \end{cases} \tag{43}$$

где

$$l_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k} = \frac{4q_{2n-k,2p-k}}{H} \sum_{l=\max|p,j|}^{n} r_{2m-k,2(j-m)}^{2l-k} \, \Delta_{2n-k,2p-k}^{2l-k}. \tag{44}$$

Заметим, что выражения (33) представляют собой перемещения одного берега трещины. Для получения полного поля перемещений (обоих берегов трещины) необходимо удвоить полученные значения.

5. **КИН и перемещения берегов круговой трещины**. В случае круговой трещины $\alpha = 1$. Выражение (19) для весовой функции при этом примет следующий вид:

$$F(\rho,\varphi,t) =$$

$$= \frac{2}{\pi a^2 \sqrt{1-\rho^2}} \left[\sum_{n=0}^{N} (\varepsilon_{n,n})^2 \rho^n \cos n\varphi \cos nt + \sum_{n=1}^{N} (\chi_{n,n})^2 \rho^n \sin n\varphi \sin nt \right], \tag{45}$$

где

$$(\varepsilon_{0,0})^2 = \frac{1}{2\pi}; \quad (\varepsilon_{n,n})^2 = (\chi_{n,n})^2 = \frac{1}{\pi}, \quad n > 0. \tag{46}$$

В результате интегрирования (45) КИН для первой и второй ветвей нагружения в случае круговой трещины имеет вид

$$\overline{K}_{\mathrm{I}_{2n+k,2p+k}}(t)=\frac{2}{\pi}q^{c}_{2n+k,2p+k}I_{2(n+p+k)+1}\cos(2p+k)t,\quad 0\le p\le n. \tag{47а}$$

Аналогично для третьей и четвертой ветвей нагружения запишем

$$\overline{K}_{\mathrm{I}_{2n-k,2p-k}}(t)=\frac{2}{\pi}q^{s}_{2n-k,2p-k}I_{2(n+p-k)+1}\sin(2p-k)t,\quad 1\le p\le n. \tag{47б}$$

Подставив (42) и (47а) в уравнение энергетического баланса (38), получим вариацию поля перемещений берегов круговой трещины:

$$\frac{\delta W_{2n+k,2p+k}(\rho,\varphi)}{\delta a}=\frac{4q^{c}_{2n+k,2p+k}}{\pi H\sqrt{1-\rho^2}}I_{2(n+p+k)+1}\rho^{2p+k}\cos(2p+k)\varphi. \tag{48}$$

Поле перемещений берегов круговой трещины представляется, как и в случае эллиптической трещины, в виде (33а) или (33б). Неизвестные коэффициенты определяются аналогично. Таким образом, была получена следующая итерационная формула для определения постоянных коэффициентов поля перемещений берегов круговой трещины (33а):

$$d^{2n+k,2p+k}_{2j+k,2m+k}=\begin{cases}\dfrac{4q^{c}_{2n+k,2p+k}}{\pi H}\dfrac{I_{2(n+p+k)+1}}{(2n-2p+1)}, & j=m=p;\\ \dfrac{2n-2j+2}{2n-2j+1}d_{2j-2+k,2p+k}, & j>m=p;\\ 0, & j,m\ne p.\end{cases} \tag{49а}$$

По аналогии получена итерационная формула для определения постоянных коэффициентов перемещений в случае третьей и четвертой ветвей нагружения (33б):

$$e^{2n-k,2p-k}_{2j-k,2m-k}=\begin{cases}\dfrac{4q^{s}_{2n-k,2p-k}}{\pi H}\dfrac{I_{2(n+p-k)+1}}{(2n-2p+1)}, & j=m=p;\\ \dfrac{2n-2j+2}{2n-2j+1}e_{2j-2-k,2p-k}, & j>m=p;\\ 0, & j,m\ne p.\end{cases} \tag{49б}$$

С учетом (40) искомое решение для поля перемещений круговой трещины под действием первой или второй ветвей полиномиального нагружения (5а) имеет следующий вид:

$$W_{2n+k,2p+k}(\rho,\varphi)=a\sqrt{1-\rho^2}\cos(2p+k)\varphi\sum_{j=p}^{n}d_{2j+k,2p+k}^{2n+k,2p+k}\rho^{2j+k}, \quad (50а)$$

в случае третьей и четвертой ветвей нагружения (5б) –

$$W_{2n-k,2p-k}(\rho,\varphi)=a\sqrt{1-\rho^2}\sin(2p-k)\varphi\sum_{j=p}^{n}e_{2j-k,2p-k}^{2n-k,2p-k}\rho^{2j-k}. \quad (50б)$$

Отметим, что выражения (50) получены с учетом изменения формы трещины в неоднородном поле напряжений (34). Пренебрежение происходящим при этом изменением поля напряжений приводит к существенным ошибкам, как, например, в решении [15] для круговой трещины под действием симметричной полиномиальной нагрузки.

Как и выражения (33), формулы (50) представляют собой перемещения одного берега трещины. Для получения полного поля перемещений необходимо удвоить полученные результаты.

6. **Примеры расчета КИН и перемещений берегов трещины**.

6.1. *Решение для КИН*. В качестве примера рассмотрим аналитическое решение КИН для двух полиномов 3-й степени, симметричных относительно оси y (вторая ветвь нагружения):

$$P^1=\left(\frac{x}{b}\right)^3=\rho^3\cos^3\varphi; \quad (51а)$$

$$P^2=\left(\frac{y}{a}\right)^2\left(\frac{x}{b}\right)=\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi. \quad (51б)$$

Для удобства данные выражения представим в виде

$$P^i=\rho^3(q_{31}^i\cos\varphi+q_{33}^i\cos3\varphi), \quad i=1,2, \quad (52)$$

где $i=1,2$ для случаев нагружения (51а) и (51б) соответственно.

При этом КИН будет равен

$$\overline{K}_{\mathrm{I}}^i(t)=\overline{K}_{\mathrm{I}_{31}}^i(t)+\overline{K}_{\mathrm{I}_{33}}^i(t). \quad (53)$$

Далее, используя (27) с учетом (28), (29) и (22), получаем искомое решение для КИН в случае эллиптической трещины:

$$\overline{K}_{\rm I}^{i}(t)=\frac{2I_5}{7}\{\cos t[7q_{31}^{i}(\varepsilon_{11})^2+2q_{31}^{i}(\varepsilon_{31})^2+6q_{33}^{i}\varepsilon_{31}\varepsilon_{33}]+$$

$$+\cos 3t[2q_{31}^{i}\varepsilon_{31}\varepsilon_{33}+6q_{33}^{i}(\varepsilon_{33})^2]\},\qquad(54)$$

где $I_5=8/15$ (см. (23)). Заметим, что для второй ветви нагружения $k=1$, а из (22) следует $a_{1,0}^{3}=-4\varepsilon_{3,1}$. Коэффициенты ε_{ij} определяются согласно (17):

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{\beta_{11}};\quad \varepsilon_{31}=-\frac{\beta_{31}}{\beta_{11}\beta_{33}};\quad \varepsilon_{33}=-\frac{1}{\beta_{33}}.\qquad(55)$$

В случае действия нагрузки вида (51а) полагаем $q_{31}=0{,}75$, $q_{33}=0{,}25$. С учетом (55) и (11) искомое решение (54) для КИН примет следующий вид:

$$\overline{K}_{\rm I}^{1}(t)=\frac{3k^2}{10}\left(\frac{2}{\Phi_1(k)}-\frac{\Phi_3(k)\Phi_4(k)}{\Phi_1(k)\Phi_2(k)}\right)\cos t+\frac{3k^4}{2}\frac{\Phi_4(k)}{\Phi_2(k)}\cos 3t.\qquad(56а)$$

Аналогично для нагружения (51б), принимая $q_{31}=0{,}25$, $q_{33}=-0{,}25$, получаем

$$\overline{K}_{\rm I}^{2}(t)=\frac{k^2}{10}\left(\frac{2}{\Phi_1(k)}+\frac{\Phi_3(k)\Phi_5(k)}{\Phi_1(k)\Phi_2(k)}\right)\cos t-\frac{k^4}{2}\frac{\Phi_5(k)}{\Phi_2(k)}\cos 3t.\qquad(56б)$$

Здесь $k^2=1-\alpha^2$;

$$\begin{cases}\Phi_1(k)=(1-k^2)K+(2k^2-1)E;\\ \Phi_2(k)=(8k^8-63k^6+114k^4-71k^2+12)K^2+\\ \qquad +(32k^8-64k^6+151k^4-119k^2+12)E^2-\\ \qquad -(16k^8-79k^6+146k^4-95k^2+12)2EK;\\ \Phi_3(k)=(2k^4+3k^2-8)E-(k^4+7k^2-8)K;\\ \Phi_4(k)=(2k^4-2k^2+2)E-(k^4-3k^2+2)K;\\ \Phi_5(k)=(8k^4-3k^2-2)E-(4k^4-2k^2-2)K,\end{cases}\qquad(57)$$

где $K=K(k)$, $E=E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Решения для КИН в случае окружной трещины ($\alpha=1{,}0$) при заданных случаях нагружения соответственно равны

$$\overline{K}_{\rm I}^{1}(t)=\frac{4}{35\pi}(7\cos t+2\cos 3t);\qquad(58а)$$

$$\overline{K}_{\mathrm{I}}^{2}(t)=\frac{4}{105\pi}(7\cos t-6\cos 3t). \qquad (58б)$$

Результаты расчета КИН согласно (56) и (58), полученные в двух точках контура трещины для разных отношений α полуосей трещины, представлены в таблице.

Безразмерные КИН при нагружении (51а) и (51б)

t, град	$\alpha = a/b$	$\overline{K}_{\mathrm{I}}^{1}(t)$	$\overline{K}_{\mathrm{I}}^{2}(t)$
0	1,0	0,32740	0,01213
	0,8	0,38948	0,01551
	0,6	0,47735	0,01928
	0,5	0,53575	0,02089
	0,2	0,80350	0,01663
45	1,0	0,12862	0,11147
	0,8	0,15415	0,12304
	0,6	0,18922	0,13650
	0,5	0,21158	0,14395
	0,2	0,30172	0,16752

Полученные аналитические значения с точностью до шестого знака совпадают с результатами, определенными по методу Бородачева [8] путем численного интегрирования обобщенных потенциалов эллиптического диска.

6.2. *Поле перемещений берегов трещины при полиномиальном законе нагружения 2-й степени*. Рассмотрим полиномиальное нагружение вида

$$q_{2,0}(\rho,\varphi)=q_{2,0}\rho^{2}; \qquad (59а)$$

$$q_{2,2}(\rho,\varphi)=q_{2,2}\rho^{2}\cos^{2}\varphi. \qquad (59б)$$

Поле перемещений при этом представляется согласно (33а) так:

$$W_{2,i}(\rho,\varphi)=a\sqrt{1-\rho^{2}}\,(d_{0,0}^{2,i}+d_{2,0}^{2,i}\rho^{2}+d_{2,2}^{2,i}\rho^{2}\cos^{2}\varphi), \quad i=0,2. \qquad (60)$$

Искомые постоянные коэффициенты получим согласно (42) в виде

$$d_{0,0}^{2,i}=\frac{h_{0,0}^{2,i}}{3}; \quad d_{2,0}^{2,i}=h_{2,0}^{2,i}+2d_{0,0}^{2,i}; \quad d_{2,2}^{2,i}=h_{2,2}^{2,i}. \qquad (61)$$

Коэффициенты $h_{2j,2p}^{2,i}$ с учетом (41), (29) и (22) (откуда $a_{0,0}^{2}=-2\varepsilon_{2,0}$) запишем следующим образом:

$$h_{0,0}^{2,0} = \frac{16}{15}\frac{q_{2,0}}{H}[5(\varepsilon_{0,0})^2 - 4(\varepsilon_{2,0})^2]; \quad h_{2,0}^{2,0} = \frac{32}{5}\frac{q_{2,0}}{H}(\varepsilon_{2,0})^2;$$
$$h_{2,2}^{2,0} = \frac{32}{15}\frac{q_{2,0}}{H}\varepsilon_{2,0}\varepsilon_{2,2}; \quad h_{0,0}^{2,2} = -\frac{64}{15}\frac{q_{2,2}}{H}\varepsilon_{2,0}\varepsilon_{2,2}; \tag{62}$$
$$h_{2,0}^{2,2} = \frac{32}{5}\frac{q_{2,2}}{H}\varepsilon_{2,0}\varepsilon_{2,2}; \quad h_{2,2}^{2,2} = \frac{32}{15}\frac{q_{2,2}}{H}(\varepsilon_{2,2})^2.$$

С учетом (62), а также (17) и (11) получим выражения для искомых коэффициентов (61):

$$d_{0,0}^{2,0} = \frac{4}{3}\frac{q_{2,0}}{H}\frac{\Delta_2(k)}{\Delta_1(k)E(k)}; \quad d_{2,0}^{2,0} = \frac{2}{3}\frac{q_{2,0}}{H}\frac{3(\Delta_3(k))^2 + 4\Delta_2(k)}{\Delta_1(k)E(k)};$$
$$d_{2,2}^{2,0} = -2k^2\frac{q_{2,0}}{H}\frac{\Delta_3(k)}{\Delta_1(k)}; \tag{63а}$$

$$d_{0,0}^{2,2} = \frac{4}{3}\frac{q_{2,2}}{H}\frac{k^2\Delta_3(k)}{\Delta_1(k)}; \quad d_{2,0}^{2,2} = -\frac{10}{3}\frac{q_{2,2}}{H}\frac{k^2\Delta_3(k)}{\Delta_1(k)};$$
$$d_{2,2}^{2,2} = 6\frac{q_{2,2}}{H}k^4\frac{E(k)}{\Delta_1(k)}, \tag{63б}$$

где

$$\Delta_1(k) = E^2(4k^4 + 11k^2 - 11) - 5K^2(1-k^2)^2 + 8EK(k^4 - 3k^2 + 2);$$

$$\Delta_2(k) = E^2(k^4 + 5k^2 - 5) - 3K^2(1-k^2)^2 + 4EK(k^4 - 3k^2 + 2);$$

$$\Delta_3(k) = 2K(1-k^2) - E(2-k^2).$$

Заметим, что эти коэффициенты взаимосвязаны с эквивалентными коэффициентами $q_{m,n}^{i,j}$, полученными ранее (см. в [11] (45)). Например,

$$q_{0,0}^{0,2} = \frac{(d_{0,0}^{2,0} + d_{0,0}^{2,2})}{4}; \quad q_{2,0}^{0,2} = \frac{(d_{2,0}^{2,0} + d_{2,0}^{2,2}) - (d_{2,2}^{2,0} + d_{2,2}^{2,2})}{4};$$
$$q_{0,2}^{0,2} = \frac{(d_{2,0}^{2,0} + d_{2,0}^{2,2}) + (d_{2,2}^{2,0} + d_{2,2}^{2,2})}{4}. \tag{64}$$

Это позволило найти ошибку в записи коэффициента $q_{0,2}^{0,2}$, допущенную в [11] (см. в [11] (45f)). Правильное выражение с использованием оригинальных обозначений указанной работы таково:

$$q_{0,2}^{0,2} = \frac{E^2(2k^4 + 6k^2 - 2) + EK(1-k^2)(2-5k^2)}{3E\Delta(k)}, \qquad (65)$$

где

$$\Delta(k) = \frac{\Delta_1(k)}{2}.$$

Выводы

1. Модифицирована существующая методика [11] получения решения для весовой функции и КИН. При этом в общем разложении весовой функции неизвестные функции A_n и B_n представляются в виде разложения в ряды относительно тригонометрических функций косинуса или синуса.

2. Предложен оригинальный подход к определению нормальных перемещений берегов трещины при полиномиальном распределении напряжений, в котором используются значения для весовой функции и K_{I}, а также метод трансляции трещин в неоднородном поле напряжений. Получены общие решения для перемещений берегов эллиптической и круговой трещин нормального отрыва.

3. Разработан эффективный алгоритм расчета значений КИН и перемещений берегов трещины, позволяющий численно получить решение для любой степени полиномиальной нагрузки. Получены аналитические формулы расчета K_{I} для полиномиального закона нагружения 3-й степени и поля перемещений берегов трещины для симметричного нагружения 2-й степени.

Резюме

Розглянуто внутрішню еліптичну тріщину нормального відриву в необмеженому тілі. Модифіковано запропоновану раніше методику визначення вагової функції та коефіцієнта інтенсивності напружень. Отримано аналітичні та чисельні значення коефіцієнта інтенсивності напружень вздовж фронту тріщини для різних випадків поліноміального закону навантаження.
Запропоновано підхід до визначення переміщень берегів тріщини за значеннями коефіцієнта інтенсивності напружень, у якому використовуються рівняння енергетичного балансу Райса, теорема Дайсона і теорія трансляції тріщин у неоднорідному полі напружень. Одержано замкнений вираз для переміщень берегів еліптичної тріщини при поліноміальному законі навантаження довільного ступеня, котрий можна використати в розв'язку просторових задач теорії пружності з тріщинами.

1. *Shah R. C. and Kobayashi A. S.* Stress intensity factors for an elliptical crack approaching the surface of a semi-infinite solid // Int. J. Fract. – 1973. – **9**. – P. 133 – 146.
2. *Nishioka T. and Atluri S. N.* Analytical solution for embedded elliptical cracks and finite element alternating method for elliptical surface cracks, subjected to arbitrary loading // Eng. Fract. Mech. – 1983. – **17**. – P. 247 – 268.

3. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. – М.: Наука, 1977. – 340 с.
4. *Green A. E. and Sneddon I. N.* The distribution of stress in the neighborhood of a flat elliptical crack in an elastic solid // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1950. – **46**. – P. 159 – 164.
5. *Segedin C. M.* Some Three-Dimensional Mixed Boundary-Value Problems in Elasticity // Report 67-3. Dept. of Aer. Astr., Univ. Washington, 1967. – 35 p.
6. *Shah R. C. and Kobayashi A. S.* Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading // Eng. Fract. Mech. – 1971. – **3**. – P. 71 – 96.
7. *Vijayakumar K. and Atluri S. N.* An embedded elliptical flaw in an infinite solid, subjected to arbitrary crack-face tractions // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1981. – **48**. – P. 88 – 96.
8. *Бородачев А. Н.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений для плоской эллиптической трещины при произвольных полиномиальных граничных условиях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 2. – С. 63 – 69.
9. *Dyson F. W.* The potentials of ellipsoids of variable densities // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1891. – **25**. – P. 259 – 288.
10. *Roy A. and Saha T. K.* Weight function for an elliptic crack in an infinite medium. I. Normal loading // Int. J. Fract. – 2000. – **103**. – P. 227 – 241.
11. *Orynyak I. V.* Method of translations for a mode I elliptic crack in an infinite body. Part II: Expansion of the fundamental solution into a series // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, No. 23. – P. 3043 – 3052.
12. *Orynyak I. V.* Method of translations for a mode I elliptic crack in an infinite body. Part I: Polynomial loading // Ibid. – P. 3029 – 3042.
13. *Oore M. and Burns D. J.* Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields // Trans. ASME. J. Press. Vessel Technol. – 1980. – No. 2. – P. 202 – 211.
14. *Rice J. R.* Some remarks on elastic crack tip fields // Int. J. Solids Struct. – 1972. – **8**, No. 6. – P. 751 – 758.
15. *Martin P. A.* The discontinuity in the elastic displacement vector across a penny-shaped crack under arbitrary loads // J. Elast. – 1982. – **12**. – P. 201 – 218.

Поступила 27. 11. 2000