у тому сенсі, що

$$\mu_1 \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \mu_2 \lim_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \varphi,$$

де границі розглядаються в просторі $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$. Правильним є таке твердження.

Теорема 2. *Задача* (2), (6) *коректно розв'язна в класі узагальнених функцій* $(\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))'$. *Розв'язок подається у вигляді згортки*

$$u(t,x) = (\varphi * G)(t,x), \qquad \varphi \in (\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))', \qquad (t,x)\in\Omega_+,$$

де G *— ФРЗД рівняння* (2).

1. *Пташник Б. И., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
2. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 336–337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 63–78.
4. *Городецький В. В., Ленюк О. М.* Еволюційні рівняння з псевдобесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 11–15.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 04.10.2007

УДК 514

В. А. Горькавый

О псевдосферических конгруэнциях в пространствах постоянной кривизны

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Geometric Bäcklund transformations of pseudo-spherical surfaces in n-dimensional spaces of constant curvature are studied. An analog of the classical theorems by Bäcklund and Tenenblat–Terng is proved.

Работа посвящена изучению псевдосферических геодезических конгруэнций в n-мерном пространстве постоянной секционной кривизны N^n. Следуя классическому определению, геодезической конгруэнцией в N^n будем называть диффеоморфизм $\psi\colon M^2 \to \widetilde{M}^2$ регулярных поверхностей M^2, $\widetilde{M}^2$ в N^n, обладающий *свойством двойного касания*: для каждой точки $P \in M^2$ существует единственная геодезическая объемлющего пространства, проходящая через точки P и $\psi(P) = \widetilde{P} \in \widetilde{M}^2$, которая касается как поверхности M^2 в точке P, так и поверхности $\widetilde{M}^2$ в точке $\widetilde{P}$ (ср. [1, с. 85]).

Геодезическую конгруэнцию $\psi\colon M^2 \to \widetilde{M}^2$ назовем псевдосферической, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) расстояние между соответствующими точками $P \in M^2$ и $\widetilde{P} \in \widetilde{M}^2$ постоянно и равно $|P\widetilde{P}| \equiv l_0 \neq 0$;

2) угол между касательными плоскостями поверхностей M^2 и $\widetilde{M}^2$ в соответствующих точках постоянен и равен $\angle(T_P M^2, T_{\widetilde{P}}\widetilde{M}^2) \equiv \omega_0 \neq 0$. Это определение соответствует стандартной конструкции псевдосферических геодезических конгруэнций для n-мерных подмногообразий в $(2n-1)$-мерных пространствах постоянной кривизны, сыгравшей фундаментальную роль при построении теории преобразований Беклунда для n-мерных псевдосферических подмногообразий, т. е. подмногообразий с постоянной отрицательной внешней кривизной, в $(2n-1)$-мерных пространствах постоянной кривизны [1]. У истоков этой теории стояли такие выдающиеся геометры, как Л. Бьянки, А. В. Беклунд, Г. Дарбу, а наиболее общие результаты получены К. Тененблат, Ч.-Л. Терн, Ю. А. Аминовым (достаточно полное замкнутое изложение основных положений вместе с объемным списком цитируемой литературы можно найти в [1], см. также [2]). Упомянем здесь два утверждения, играющих принципиально важную роль при изучении n-мерных псевдосферических подмногообразий в $(2n-1)$-мерных пространствах постоянной кривизны в рамках современной теории интегрируемых систем. Во-первых, если два подмногообразия M^n, $\widetilde{M}^n$ в пространстве постоянной кривизны N^{2n-1} связаны псевдосферической геодезической конгруэнцией, то M^n и $\widetilde{M}^n$ имеют одну и ту же постоянную отрицательную внешнюю кривизну [1, с. 86]. Во-вторых, произвольное псевдосферическое подмногообразие M^n в пространстве постоянной кривизны N^{2n-1} допускает n-параметрическое семейство различных псевдосферических конгруэнций [1, с. 91]. Преобразование n-мерных псевдосферических подмногообразий в N^{2n-1} с помощью псевдосферической конгруэнции и называется преобразованием Беклунда. Эта конструкция позволяет по заданному псевдосферическому подмногообразию последовательно строить новые псевдосферические подмногообразия, причем этот процесс обладает важным с точки зрения теории интергрируемых систем свойством коммутативности [1, с. 97].

Интерес представляет возможность построения аналогичной теории преобразований Беклунда для псевдосферических подмногообразий в пространствах постоянной кривизны при произвольных размерностях. Эта задача рассматривалась Ю. А. Аминовым и А. Сымом [3], а затем и в работах автора [4–6] в случае двумерных поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве E^4. Выяснилось, что уже не любая псевдосферическая поверхность в E^4 допускает псевдосферическую конгруэнцию [3, 6]; более того, если псевдосферическая поверхность в E^4 не лежит в гиперплоскости $E^3 \subset E^4$, то она допускает не более двух различных псевдосферических конгруэнций [4–6]. Поэтому ситуация с существованием и количеством псевдосферических конгруэнций для поверхностей в E^4 существенно отличается от классического случая поверхностей в E^3. С другой стороны, для одной из сформулированных выше классических теорем имет место следующий аналог: если картановы поверхности M^2 и $\widetilde{M}^2$ в E^4 связаны псевдосферической конгруэнцией, то обе поверхности M^2 и $\widetilde{M}^2$ имеют одну и ту же постоянную отрицательную гауссову кривизну. Условие картановости (эквивалентное наличию на поверхности однозначно определенной сопряженной координатной сети (см. [1, с. 163])) не является ограничительным, поскольку именно картановы поверхности в E^4 представляют собой наиболее общий класс поверхностей в E^4, допускающих геодезические конгруэнции. Частично отмеченные результаты обобщались Л. А. Масальцевым на случай n-мерных подмногообразий в E^{2n} [7].

В данной работе аналогичные результаты устанавливаются для двумерных поверхностей в n-мерных пространствах постоянной кривизны. Доказан следующий аналог классической теоремы Беклунда.

Теорема. *Пусть поверхности M^2 и $\widetilde{M}^2$ в пространстве N^n, $n > 3$, постоянной кривизны K_0 связаны псевдосферической конгруэнцией. Предположим, что на M^2 и $\widetilde{M}^2$ нет асимптотических направлений. Тогда M^2 и $\widetilde{M}^2$ имеют одну и ту же постоянную отрицательную внешнюю кривизну.*

Доказательство теоремы будет проведено в случае, когда N^n представляет собой сферу S^n_R радиуса R. Рассмотрение поверхностей в пространстве Лобачевского H^n_R и в евклидовом пространстве E^n отличается только лишь отдельными техническими моментами, на которые мы укажем ниже.

Открытым остается вопрос об описании псевдосферических поверхностей в N^n, допускающих псевдосферические конгруэнции. Для двумерных поверхностей в E^4 частичный ответ на этот вопрос дан в [5].

Геодезические конгруэнции в S^n_R. Будем рассматривать S^n_R как гиперсферу радиуса R в E^{n+1} с центром в начале координат. Пусть M^2 — регулярная поверхность в S^n_R, заданная радиус-вектором $r = r(u^1, u^2)$ в E^{n+1}. Обозначим через $g = g_{ij}du^idu^j$ и Γ^i_{jk} первую фундаментальную форму и символы Кристоффеля M^2, а через $b^\sigma = b^\sigma_{ij}du^idu^j$ и $\mu_{\sigma\nu} = \mu_{\sigma\nu|j}du^j$ соответственно вторые фундаментальные формы и формы кручения M^2 относительно нормалей $n_1, \ldots, n_{n-2}$, образующих в каждой точке на M^2 ортонормированный базис в нормальной плоскости поверхности M^2 в S^n_R. Имеют место деривационные формулы Вейнгартена:

$$\partial_{u^iu^j} r = \Gamma^k_{ij}\partial_{u^k} r + b^\sigma_{ij} n_\sigma - \frac{1}{R^2} g_{ij} r, \tag{1}$$

$$\partial_{u^i} n_\sigma = -b^\sigma_{ij} g^{jk}\partial_{u^k} r + \mu_{\sigma\nu|j} n_\nu. \tag{2}$$

Рассмотрим геодезическую конгруэнцию $\psi\colon M^2 \to \widetilde{M}^2$ в S^n_R. Благодаря условию двойного касания, на M^2 выделяется векторное поле X, касательное к геодезическим линиям рассматриваемой конгруэнции. С локальной точки зрения координаты u^1, u^2 можно выбрать таким образом, что $X = \partial_{u^1} r$. В этом случае конгруэнция ψ будет представляться в виде

$$\widetilde{r} = r\cos\alpha + \frac{R}{\sqrt{g_{11}}}\partial_{u^1} r \sin\alpha, \tag{3}$$

где $\alpha = L/R$, а L — расстояние между $P \in M^2$ и $\widetilde{P} \in \widetilde{M}^2$ на сфере S^n_R. Векторное поле X и функция $\alpha \neq \pi k$ характеризуют конгруэнцию ψ.

По определению конгруэнции геодезические линии должны касаться не только поверхности M^2, но и поверхности $\widetilde{M}^2$. В рассматриваемом случае это означает, что вектор

$$\widetilde{X} = -r\sin\alpha + \frac{R}{\sqrt{g_{11}}}\partial_{u^1} r\cos\alpha,$$

касательный к геодезическим линиям конгруэнции в точках поверхности $\widetilde{M}^2$, должен быть линейной комбинацией векторов $\partial_{u^1}\widetilde{r}$ и $\partial_{u^2}\widetilde{r}$, образующих базис в касательной плоскости поверхности $\widetilde{M}^2$. Дифференцируя (3) с помощью (1), не сложно получить, что если $\widetilde{X}$ раскладывается в линейную комбинацию $\partial_{u^1}\widetilde{r}$ и $\partial_{u^2}\widetilde{r}$, то имеют место равенства $b^\sigma_{11}b^\nu_{12} - b^\nu_{11}b^\sigma_{12} = 0$ при всех σ, ν, т. е. нормальные векторы $b_{11} = b^\sigma_{11}n_\sigma$ и $b_{12} = b^\sigma_{12}n_\sigma$ коллинеарны.

Если предполагать, что на M^2 нет асимптотических направлений, то b_{11} не обращается в ноль. Поэтому можем записать $b_{12} = \lambda b_{11}$. Это означает, что для векторного поля $X = \partial_{u^1} r$ на M^2, касательного к геодезическим линиям конгруэнции, имеется векторное поле $Y = -\lambda\partial_{u^1} r + \partial_{u^2} r$, сопряженное к X относительно всех вторых фундаментальных форм $b^1, \ldots, b^{n-2}$ одновременно. Локальные координаты u^1, u^2 на M^2 можно специализировать таким образом, что $Y = \partial_{u^2} r$. При таком выборе координат получаем $b^1_{12} = 0, \ldots, b^{n-2}_{12} = 0$. Это означает, что координатные линии образуют сопряженную сеть на $M^2 \subset S^n_R$.

Дальнейший анализ показывает, что в рассматриваемом случае зависимость между $\widetilde{X}$ и $\partial_{u^1}\widetilde{r}$, $\partial_{u^2}\widetilde{r}$ будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\cot\alpha = -\frac{R}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^2_{12}. \tag{4}$$

Мы видим, что функция α полностью определяется векторным полем X.

Таким образом, наличие геодезических конгруэнций на M^2 определяется наличием векторных полей на M^2, для которых существуют сопряженные векторные поля. На поверхности в S^3_R для любого векторного поля найдется сопряженное ему векторное поле, которое в ситуации общего положения будет трансверсальным; поэтому для одной и той же поверхности в S^3_R можно построить много различных геодезических конгруэнций. Напротив, при $n > 3$, если поверхность из S^n_R не лежит во вполне геодезическом $S^3_R \subset S^n_R$, на такой поверхности имеется не более двух сопряженных векторных полей, а значит, такая поверхность будет допускать не более двух различных геодезических конгруэнций. Поверхность в S^n_R, на которой имеется однозначно определенная сопряженная сеть, называется картановой (ср. [1, с. 163]). Картанова поверхность допускает в точности две различные геодезические конгруэнции.

Псевдосферические конгруэнции в S^n_R. Предположим теперь, что рассматриваемая геодезическая конгруэнция $\psi\colon M^2 \to \widetilde{M}^2$ в S^n_R является псевдосферической. Это означает, что функция расстояния L постоянна и равна l_0, т. е. $\alpha = l_0/R$. Тогда из (4) получаем

$$\Gamma^2_{12} = -\frac{\sqrt{g_{11}}}{R}\cot\frac{l_0}{R}. \tag{5}$$

Кроме того, постоянным должен быть и угол ω между касательными плоскостями поверхностей M и $\widetilde{M}$ в соответствующих точках. Для вычисления ω мы должны взять вектор ξ в $T_P M$, ортогональный к $X = \partial_{u^1} r$, и вектор $\widetilde{\xi}$ в $T_{\widetilde{P}}\widetilde{M}$, ортогональный к $\widetilde{X}$, — угол между ξ и $\widetilde{\xi}$ как раз и равен углу ω. Находя векторы ξ и $\widetilde{\xi}$, получаем, что угол ω постоянен и равен ω_0 тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$g_{11} B\cos^2\omega_0 = (\Gamma^2_{11})^2 \det g \sin^2\omega_0, \tag{6}$$

где $B = \sum (b^\sigma_{11})^2$.

Покажем, что из (5), (6) следует, что поверхность $M^2 \subset S^n_R$ имеет постоянную отрицательную внешнюю кривизну.

Рассмотрим сначала случай, когда $\Gamma^2_{11} = 0$. Принимая во внимание (5), не составляет труда убедиться, что в этом случае метрика поверхности приводится к виду

$$ds^2 = (d\varphi)^2 + \exp\left(-2\frac{\cot\dfrac{l_0}{R}}{R}\varphi\right)(du^2)^2,$$

где $\varphi = \varphi(u^1, u^2)$. Как следствие, внутренняя кривизна будет равна $K_{\text{int}} = -(\cot^2(l_0/R))/R^2$, а внешняя кривизна будет равна $K_{\text{ext}} = -1/(R^2 \sin^2(l_0/R))$, что и требовалось доказать.

Будем теперь предполагать, что Γ^2_{11} не обращается в ноль. Воспользуемся уравнением Гаусса

$$\sum_\sigma b^\sigma_{11} b^\sigma_{22} = R_{1212} - \frac{1}{R^2} \det g, \tag{7}$$

где R_{1212} — коэффициент тензора римановой кривизны поверхности M^2, и уравнениями Кодацци

$$\partial_{u^2} b^\sigma_{11} - \Gamma^1_{12} b^\sigma_{11} + \Gamma^2_{11} b^\sigma_{22} + b^\nu_{11} \mu_{\nu\sigma|2} = 0, \tag{8}$$

выписанными в сопряженной координатной системе ($b^\sigma_{12} = 0$). Умножая (8) на b^σ_{11}, суммируя по σ и принимая во внимание (7), получаем

$$\frac{1}{2} \partial_{u^2} B - \Gamma^1_{12} B + \Gamma^2_{11} \left(R_{1212} - \frac{\det g}{R^2} \right) = 0. \tag{9}$$

Подставляя B из (6) в (9) с учетом формул $\partial_{u^2} g_{11} = 2(\Gamma^1_{12} g_{11} + \Gamma^2_{12} g_{12})$, $\partial_{u^2} \det g = 2(\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}) \det g$, получаем

$$\operatorname{tg}^2 \omega_0 \frac{\det g}{g_{11}} \left(\underline{\partial_{u^2} \Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11} \Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12} \Gamma^2_{11}} - \Gamma^2_{12} \Gamma^2_{11} \frac{g_{12}}{g_{11}} \right) + R_{1212} - \frac{\det g}{R^2} = 0. \tag{10}$$

С другой стороны, подчеркнутые слагаемые в (10) можно заменить, используя стандартную формулу для тензора римановой кривизны R_{1212}:

$$R_{1212} = \frac{\det g}{g_{11}} (\underline{\partial_{u^2} \Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11} \Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12} \Gamma^2_{11}} - \partial_{u^1} \Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11} \Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{12} \Gamma^2_{12}).$$

Как результат такой замены имеем

$$R_{1212} \frac{1}{\cos^2 \omega_0} - \frac{\det g}{R^2} + \operatorname{tg}^2 \omega_0 \frac{\det g}{g_{11}} \left(\partial_{u^1} \Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{12} \Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{12} \frac{\Gamma_{11,1}}{g_{11}} \right) = 0. \tag{11}$$

Подставляя теперь выражение для Γ^2_{12} из (5) в (11) с учетом формулы $\partial_{u^1} g_{11} = 2\Gamma_{11,1}$, получим выражение для внутренней кривизны M^2:

$$K_{\text{int}} = \frac{R_{1212}}{\det g} = \cos^2 \omega_0 \frac{1}{R^2} + \sin^2 \omega_0 \frac{\cot^2 \dfrac{l_0}{R}}{R^2}.$$

Как следствие, внешняя кривизна поверхности $M^2 \subset S^n_R$ будет равна

$$K_{\text{ext}} = \frac{R_{1212}}{\det g} - \frac{1}{R^2} = -\frac{\sin^2 \omega_0}{R^2 \sin^2 \dfrac{l_0}{R}},$$

что и требовалось доказать. Поскольку поверхности M и $\widetilde{M}$ принимают равноправное участие в конструкции псевдосферической конгруэнции, то поверхность $\widetilde{M}$ также будет псевдосферической и будет иметь такую же внешнюю кривизну, что и поверхность M. Теорема доказана.

В случае, когда N^n представляет собой пространство Лобачевского, мы рассматриваем реализацию N^n как гиперсферы в $(n+1)$-мерном пространстве Минковского: все выкладки сохраняются с соответствующей заменой стандартных тригонометрических функций их гиперболическими аналогами. Евклидов случай рассматривался в [4] при $n = 4$, приведенное там доказательство допускает прямое обобщение для $n \geqslant 4$; формально евклидовы формулы получаются из выписанных выше соответствующих сферических формул предельным переходом при $R \to \infty$.

1. *Tenenblat K.* Transformations of manifolds and applications to differential equations. – London: Longman, 1998. – 208 p.
2. *Аминов Ю. А.* Геометрия подмногообразий. – Київ: Наук. думка, 2002. – 468 с.
3. *Aminov Yu., Sym A.* On Bianchi and Bäcklund transformations of two-dimensional surfaces in E^4 // Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2000. – **3**, No 1. – P. 75–89.
4. *Gorkavyy V.* On pseudo-spherical congruences in E^4 // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2003. – **10**, вып. 4. – С. 498–504.
5. *Горькавый В. А.* Конгруэнции Бьянки двумерных поверхностей в E^4 // Мат. сб. – 2005. – **196**, вып. 10. – С. 79–102.
6. *Gorkavyy V.* On pseudo-spherical surfaces in E^4 with Grassmann image of prescribed type // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. – 2006. – **2**, вып. 2. – С. 138–148.
7. *Масальцев Л. А.* Бикасательное преобразование Бьянки // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 2005. – **8**. – С. 83–98.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 02.11.2007

УДК 517.9

Н. З. Дільна, В. А. Пилипенко, А. М. Ронто

Деякі умови однозначної розв'язності нелокальної крайової задачі для лінійних функціонально-диференціальних рівнянь

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

General conditions for the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of linear functional differential equations are obtained.

У роботі досліджується питання існування та єдиності розв'язку нелокальної крайової задачі для систем лінійних функціонально-диференціальних рівнянь загального виду. Розглядається система функціонально-диференціальних рівнянь

$$u_k'(t) = (l_k u)(t) + q_k(t), \qquad t \in [a, b], \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

із нелокальними крайовими умовами

$$u_k(a) = h_k(u), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$