

## Краевые эффекты в композите, армированном волокнами квадратного поперечного сечения, при наличии контактной трещины

Ю. В. Коханенко<sup>а</sup>, В. В. Ясинский<sup>б</sup>, В. Ю. Бойчук<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

<sup>б</sup> Национальный технический университет Украины, Киев, Украина

*Рассмотрен двухкомпонентный композит, слабоармированный волокнами прямоугольного поперечного сечения и ослабленный двумя контактными трещинами, расположенными симметрично одной из координатных осей. Композит находится в условиях плоской деформации. На границе приложена равномерная растягивающая нагрузка. Исследуется влияние коэффициентов Пуассона компонент композита на характер зон краевых эффектов. Приближенное решение задачи отыскивается с помощью метода конечных разностей. Построены зоны краевых эффектов для компонент напряжений в зависимости от значений коэффициентов Пуассона компонент композита.*

Известно, что краевые эффекты в упругих средах исследуются в основном с помощью метода однородных решений [1]. Альтернативным является метод, позволяющий строить локальные зоны напряжений с использованием решений задач линейной теории упругости кусочно-однородных сред. При этом зоны краевых эффектов с установленной точностью строятся на основе определенных критериев [2]. В рамках такого подхода рассмотрены [2, 3] плоские и осесимметричные задачи о краевых эффектах в слоистых и слабоармированных волокнистых материалах при наличии разрывов наполнителя. Ранее [4] исследовалась пространственная задача определения зон краевых эффектов в композите, слабоармированном волокнами квадратного поперечного сечения, при наличии трещины в наполнителе.

В настоящей работе, являющейся продолжением работ [3, 4], исследуется плоская задача о краевых эффектах в композите, слабоармированном прямоугольными волокнами и ослабленном двумя параллельными контактными трещинами. Приближенное решение задачи теории упругости отыскивается с использованием сеточного подхода. При этом сеточные уравнения строятся на основе базовых факторов [2, 5, 6]. Разностная схема, соответствующая рассматриваемой задаче теории упругости, выписывается в явной форме. Индексы изменяются от 1 до 2, используются соглашения и суммирование.

*Постановка задачи.* В декартовых координатах  $y = (y_1, y_2, y_3)$  рассматривается волокнистый двухкомпонентный композитный материал, слабоармированный волокнами квадратного поперечного сечения. Компоненты композита моделируются линейно-упругими изотропными телами. Небольшое содержание наполнителя позволяет моделировать композит изолированным волокном, находящимся в бесконечной матрице. Направление армирования совпадает с направлением оси  $Oy_3$ . В плоскостях  $y_2 = \text{const}$  имеются две параллельные контактные трещины, достаточно протяженные (бес-

конечные) в направлении  $Oy_3$ . В направлениях осей  $Oy_1$  и  $Oy_2$  композит растягивается равномерными нагрузками  $p_{11} = p_{22} = p$ , которые обеспечивают в его теле в плоскости  $y_1Oy_2$  состояние плоской деформации.

Задачу можно рассматривать в прямоугольной области  $|y_i| \leq b_i$  с квадратным включением  $|y_i| \leq b$ , где  $2b$  – величина стороны квадрата. Трещины моделируются математическими разрезами  $|x_1| \leq b \wedge |x_2| = b$ . Величины  $b_i$  определяются из следующего условия: возмущения напряжений, обусловленные наличием включения и трещин, не достигают границы расчетной области. С учетом геометрической и силовой симметрии задача рассматривается для четвертой части области, занятой композитом (рис. 1). Задача формулируется в безразмерной форме. С этой целью для  $q$ -й компоненты композита размерные составляющие смещений и напряжений обозначаются через  $v_i^q$  и  $\tau_i^q$  соответственно ( $q=1$  относится к материалу наполнителя).

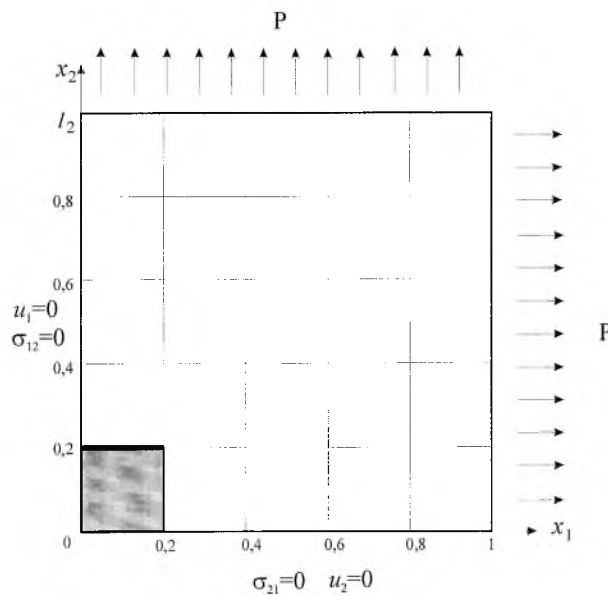


Рис. 1. Расчетная схема, соответствующая задаче определения краевых эффектов в двухкомпонентном композите, слабоармированном волокнами квадратного поперечного сечения и ослабленном контактными трещинами.

Введем следующие безразмерные величины (рис. 1):

$$\begin{aligned} x_i &= y_i / b_1; & u_i^q &= v_i^q / b_1; & l_i &= b_i / b_1 \rightarrow l_1 = 1; & a &= b / l_1; \\ p &= 0,5 \bar{p} / (\lambda^2 + G^2); & \sigma_{ij}^q &= 0,5 \tau_{ij}^q / (\lambda^q + G^q), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda^q = E^q \nu^q / [(1 + \nu^q)(1 - 2\nu^q)]$ ;  $E^q, G^q, \nu^q$  – соответственно коэффициент Ламе и технические постоянные  $q$ -го тела; верхний индекс обозначает номер компоненты композита, а не показатель степени.

При введении безразмерных напряжений по (1) поверхностные нагрузки становятся равными соответствующим поверхностным деформациям, т.е.

$$p_{11} = p_{22} = p = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}; \quad x_i = l_i \wedge x_{3-i} \leq l_{3-i}. \quad (2)$$

Композит занимает область  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^1 + \bar{\Omega}^2 = \{|x_i| \leq l_i, l_1 = 1\}$ ,  $\bar{\Omega}^1 = \{|x_i| \leq a\}$ ,  $\bar{\Omega}^2 = \bar{\Omega} - \bar{\Omega}^1$  (рис. 1). Перейдем к формулировке задачи теории краевых эффектов. Как отмечалось выше, для этого нужно сформулировать соответствующую задачу линейной теории упругости и критерий оценки зон краевых эффектов.

*Формулировка задачи теории упругости.* В области  $\bar{\Omega}$  требуется найти векторные функции  $\mathbf{u}^q = (u_1^q, u_2^q)$ , удовлетворяющие в пределах  $q$ -й компоненты композита уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{im}^q}{\partial x_i} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}^q; \quad (3)$$

граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^q &= 0 \wedge u_2^q = 0, & 0 \leq x_1 \leq 1 \wedge x_2 = 0, \\ \sigma_{11}^2 &= P \wedge \sigma_{12}^2 = 0, & x_1 = 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2, \\ \sigma_{21}^2 &= 0 \wedge \sigma_{22}^2 = P, & 0 \leq x_1 \leq 1 \wedge x_2 = l_2, \\ u_1^q &= 0 \wedge \sigma_{12}^q = 0, & x_1 = 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2, \\ \sigma_{21}^2 &= 0 \wedge \sigma_{22}^2 = 0, & 0 \leq x_1 \leq a \wedge x_2 = +a, \\ \sigma_{21}^1 &= 0 \wedge \sigma_{22}^1 = 0, & 0 \leq x_1 \leq a \wedge x_2 = -a; \end{aligned} \quad (4)$$

условиям идеального контакта на границе раздела компонент композита:

$$u_m^1 = u_m^2 \wedge \sigma_{1m}^1 = \sigma_{1m}^2, \quad x_1 = a \wedge 0 \leq x_2 \leq a. \quad (5)$$

Закон Гука в безразмерной форме в пределах  $q$ -й компоненты композита имеет вид

$$\sigma_{ii}^q = c^q \frac{\partial u_i^q}{\partial x_i} + d^q \frac{\partial u_j^q}{\partial x_j}; \quad \sigma_{12}^q = g^q \left( \frac{\partial u_1^q}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^q}{\partial x_1} \right), \quad i \neq j, \quad (6)$$

где

$$c^q = \frac{\lambda^q + 2G^q}{2(\lambda^q + G^q)}; \quad d^q = \frac{\lambda^q}{2(\lambda^q + G^q)}; \quad g^q = \frac{G^q}{\lambda^q + G^q}; \quad (7)$$

$\wedge$  – знак логического умножения.

*Критерий оценки зон краевых эффектов.* Используется первый критерий [2], согласно которому границы зон краевых эффектов для напряжений  $\sigma_{ij}^q$  представляют собой линии равных напряжений, определяемые из равенств

$$\sigma_{ii}^q = P(1 + 0,01\rho); \quad \sigma_{12}^q = 0,001\rho P, \quad (8)$$

где  $\rho$  – отклонение (увеличение) в процентах напряжений на границе зоны от напряжения  $P$ .

Из (8) определяется величина  $d_{ij}^q(\rho, \mathbf{n})$  протяженности краевого эффекта для напряжения  $\sigma_{ij}^q$  в направлении единичного вектора  $\mathbf{n}$  с точностью  $\rho$ . Указанная величина представляет собой расстояние в направлении  $\mathbf{n}$  от выбранной начальной точки  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}^q$ , находящейся в зоне краевого эффекта, до точки, находящейся на линии (8). Обычно за начальную принимается точка на линии, являющейся источником краевого эффекта. Для рассматриваемой задачи источниками краевого эффекта есть контактная часть  $\bar{\Omega}$  (отрезок  $x_1 = a \wedge 0 \leq x_2 < a$ ) и точка  $x_1 = a \wedge x_2 = 0$  (конец трещины). Отметим, что в соответствии с (8) определяются также границы областей краевых эффектов размерных напряжений  $\tau_{ij}$ , определяемых по (1).

*Приближенное решение задачи.* К приближенному решению задачи (2)–(7) применяется сеточный подход. Для построения разностной схемы используется концепция базовой схемы [2, 5, 6]. В рассматриваемом случае базовая схема является разностной схемой, построенной на шаблоне прямоугольной ячейки сетки, и соответствует классу плоских основных задач линейной теории упругости кусочно-однородных сред с изотропными компонентами. При этом область, занятая композитом, может иметь произвольные связность и конфигурацию, но должна представлять собой объединение областей прямоугольной формы. Выражение  $m$ -й компоненты разностной схемы в сеточном узле определяется как сумма выражений  $m$ -й компоненты базовой схемы в тех узлах ячеек сетки, которые принадлежат к сеточному узлу. Для каждой ячейки сетки принимаются технические постоянные той компоненты композита, которая эту ячейку заполняет. Если рассматриваемый сеточный узел является граничным и в нем по  $m$ -й компоненте задано граничное условие в смещениях, то это граничное условие есть выражением  $m$ -й компоненты разностной схемы.

Задача (2)–(7) как смешанная задача теории упругости принадлежит к рассматриваемому классу задач. Область  $\bar{\Omega}$ , занятая композитом, – односвязная и может быть описана, например, объединением следующих трех прямоугольных областей (рис. 1):

$$0 \leq x_1 \leq a \wedge 0 \leq x_2 \leq a; \quad a \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2; \quad 0 \leq x_1 \leq a \wedge a \leq x_2 \leq l_2.$$

В узле  $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\pm 1, \pm 2)$  ячейки сетки базовая схема имеет вид

$$\mathbf{a}(\xi)\mathbf{u} = \varphi(\xi) \quad \text{или} \quad a_m(\xi)\mathbf{u} = \varphi_m(\xi), \quad (9)$$

где  $m$ -я компонента базового оператора с учетом (2)–(7) определяется по формуле

$$a_m(\xi)\mathbf{u} = -\frac{H}{\eta_{\xi_i}}(\sigma_{im} + \sigma_{im}^{-\xi_i}). \quad (10)$$

Разностный аналог закона Гука

$$\sigma_{ii} = cu_{i,\xi_i} + du_{j,\xi_j}; \quad \sigma_{12} = g(u_{i,\xi_j} + u_{j,\xi_i}), \quad i \neq j. \quad (11)$$

С учетом отсутствия массовых сил ( $\rho\mathbf{F} = 0$ ) и равномерной поверхностной нагрузки ( $P_{ij} = P\delta_{ij}$ )  $m$ -я компонента базовой функции приводится к виду

$$\begin{aligned} \varphi_m(\xi) &= H \left( \rho F_m + 2 \frac{P_{1m}}{h_1} + 2 \frac{P_{2m}}{h_2} \right) = \\ &= 2(h_2 P_{1m} + h_1 P_{2m}) = 2P(h_2 \delta_{1m} + h_1 \delta_{2m}). \end{aligned} \quad (12)$$

(Обозначения в (9)–(12) см. в [2, 5].)

Задаче (2)–(7) в сеточной области ставится в соответствие разностная задача

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \Phi \quad \text{или} \quad A_m\mathbf{u} = \Phi_m. \quad (13)$$

Получим явное представление разностной задачи (13).

На линиях симметрии  $0 \leq x_i \leq l_i \wedge x_{3-i} = 0$  для граничных условий в перемещениях соответствующие компоненты разностной схемы имеют форму этих граничных условий:

$$\begin{aligned} (A_2\mathbf{u} = \Phi_2) &\equiv (u_2 = 0), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = 0; \\ (A_1\mathbf{u} = \Phi_1) &\equiv (u_1 = 0), \quad x_1 = 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2. \end{aligned} \quad (14)$$

В остальных сеточных узлах соотношение (13) в узле  $\mathbf{x}$  представляется суммой соотношений (10)–(12) для параметров  $\xi$ , принадлежащих узлу  $\mathbf{x}$ :

$$A_m\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\xi \in \mathbf{x}} a_m(\xi); \quad \Phi_m(\mathbf{x}) = \sum_{\xi \in \mathbf{x}} \varphi_m(\xi). \quad (15)$$

Ненулевые значения компонент  $\Phi_m$  имеют место на участках, где заданы внешние нагрузки, т.е. на прямых  $x_i = l_i \wedge x_{3-i} \leq l_{3-i}$ , ненулевые значения  $\Phi_m(\mathbf{x}) = \Phi_m(x_1, x_2)$  определяются из следующих равенств (рис. 1):

$$\begin{aligned} \Phi_1(l_1, 0) = 2h_2P, \quad \Phi_1(l_1, l_2) = 2h_2P, \quad \Phi_1(l_1, x_2) = 2P(h_2 + h_2^{+2}), \quad 0 < x_2 < l_2; \\ \Phi_1(l_1, 0) = 2h_2P, \quad \Phi_1(l_1, l_2) = 2h_2P, \quad \Phi_1(l_1, x_2) = 2P(h_2 + h_2^{+2}), \quad 0 < x_2 < l_2. \end{aligned} \quad (16)$$

В остальных сеточных узлах  $\Phi \equiv 0$ .

В (16)  $h_i$  – шаг в направлении  $x_i$  ячейки, примыкающей к узлу  $\mathbf{x}$ . В выражении  $(h_i + h_i^{+i})$  величина  $h_i$  – шаг ячейки, примыкающей к граничному узлу  $\mathbf{x}$  слева ( $i=1$ ) или снизу ( $i=2$ );  $h_i^{+i}$  – шаг ячейки, примыкающей к узлу  $\mathbf{x}$  справа ( $i=1$ ) или сверху ( $i=2$ ). Разностная задача (13), соответствующая варианту дифференциальной задачи (2)–(7), решается методом сопряженных градиентов.

Из базовой схемы (10)–(12) выписывается базовая система уравнений  $\mathbf{au} = \varphi$  [2]. Суммирование последней по всем ячейкам разностной сетки приводит к системе уравнений, соответствующей первой задаче теории упругости. Корректировка системы уравнений в соответствии с заданными граничными условиями в перемещениях [2] дает глобальную алгебраическую задачу (13), аппроксимирующую дифференциальную задачу (2)–(7). Задача (13) решается (прямым) методом Холецкого.

*Методика решения дискретных задач.* Эффективным оказывается следующий способ решения вариантов задачи (2)–(7). На достаточно крупной сетке (число узлов сетки выбирается такое, что решение сеточной задачи дает качественную картину искомого решения) методом Холецкого решается задача (13). Затем сетка сгущается путем половинного деления шагов, а исходное решение интерполируется и используется в качестве начального приближения для решения разностной задачи (13) методом сопряженных градиентов. Для задачи (13) процесс повторяется до тех пор, пока на двух последовательных сетках искомые факторы не совпадут с требуемой точностью.

*Проведение расчетов.* Для удобства расчетов вводится величина  $\Delta v \equiv \equiv |v^1 - v^2|$ . Исследуется влияние  $\Delta v$ , изменяющейся в интервале  $0 \leq \Delta v \leq 0,4$ , на характер зон краевых эффектов для размерных напряжений  $\tau_{ij}^q = = 2\sigma_{ij}^q(\lambda^q + G^q)$  в материалах наполнителя ( $q=1$ ) и связующего ( $q=2$ ). Безразмерные напряжения  $\sigma_{ij}^q$  определены по (1). Зоны строятся для  $\rho = 5$ . Величина  $d_{ij}^q(\mathbf{n})$  протяженности краевого эффекта для напряжения  $\tau_{ij}^q$  отсчитывается от вершины трещины в направлении вектора  $\mathbf{n}$ , если не оговорено другое.

Исходные данные композита следующие: геометрические характеристики –  $l_2 = l_1 = 1$ ,  $a = 0,2$  (величина  $a$  получена в результате проведения

вычислительного эксперимента); механические характеристики –  $E^1 = E^2 = E = 200$ . Серия расчетов проведена для параметров  $v^q$  из интервала  $0 \leq v^q \leq 0,4$  с шагом 0,05.

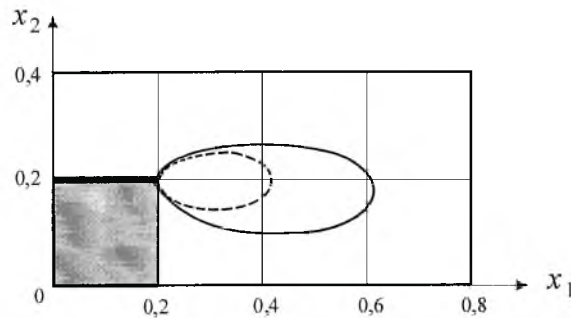


Рис. 2. Зоны красных эффектов, соответствующие напряжению  $\tau_{11}$ . (Большой эллипс – граница зоны, соответствующая величине  $|v^2 - v^1| = 0,4$ , малый – граница области краевого эффекта при  $v^1 = v^2$ .)

*Результаты расчетов.* На рис. 2 (сплошная линия) показана наибольшая зона краевого эффекта для напряжения  $\tau_{11}^2$ . Она наблюдается для значений  $v^1 = 0,4 \wedge v^2 = 0$  и представляет собой (приблизительно) эллипс с центром в точке  $\mathbf{x}(0,41; 0,2)$  и полуосями  $(a_{x_1}, a_{x_2}) \approx (0,21; 0,1)$ , направленными почти параллельно осям  $0x_1, 0x_2$ . Краевой эффект имеет место в теле матрицы ( $q = 2$ ) и распространяется в основном в направлении  $x_1$ , т.е. в направлении  $\mathbf{n} \approx (1, 0)$ . Величина максимальной протяженности зоны  $\max d_{11} = d_{11}(\mathbf{n}) \approx 0,42$ . Характер зоны (почти эллипс, вытянутый в направлении  $x_1$ ) остается (в пределах принятой точности) неизменным для всех вариантов расчетов. При этом зона краевого эффекта уменьшается с уменьшением величины  $\Delta v$  за счет уменьшения полуосей  $a_{x_i}$  и сдвига влево центра эллипса. Минимальная площадь области краевого эффекта (ограничена штриховой линией) имеет место при  $\Delta v = 0$ . Зона остается практически неизменной с изменением  $v^q$  в интервале  $0 \leq v^q \leq 0,4$  и представляет собой внутренний эллипс с центром в точке  $\mathbf{x} \approx (0,31; 0,2)$  и полуосями  $a_{x_1} \approx 0,11, a_{x_2} \approx 0,05$ . Величины  $a_{x_i}$  полуосей эллипсов достаточно точно определяются по формулам

$$a_{x_1} = 0,25 \Delta v + 0,1; \quad a_{x_2} = 0,05(\Delta v + 1). \quad (17)$$

Рис. 3 иллюстрирует зону краевого эффекта для напряжений  $\tau_{12}$  при  $\Delta v = 0$ , которая состоит из двух частей, описываемых кривыми с общей точкой в вершине трещины. Одна часть зоны описывается кривой, близкой по форме к эллипсу, бóльшая ось которого имеет направление

$\mathbf{n} \approx (0,39; 0,92)$ , а центр находится в точке  $\mathbf{x} \approx (0,25; 0,55)$ . Полуоси эллипса  $(a_{n_1}, a_{n_2}) \approx (0,4; 0,2)$  и расположен он в теле матрицы. Величина максимальной протяженности краевого эффекта для напряжения  $\tau_{12} - d_{12}^2 = d_{12}^2(\mathbf{n}) \approx 0,76$ .

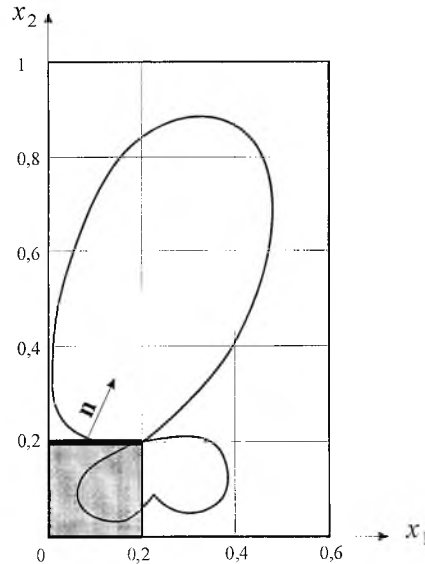


Рис. 3. Область краевого эффекта для касательного напряжения, обусловленная наличием трещины ( $v^2 = v^1$ ). (Вектор  $\mathbf{n} = (0,39, 0,92)$  соответствует направлению величины максимальной протяженности краевого эффекта.)

Граница другой части зоны краевого эффекта расположена как в материале связующего, так и в материале наполнителя. Максимальные величины протяженности в теле наполнителя и в теле связующего примерно одинаковы и равны  $d \approx 0,2$  ( $\max d_{12}^1 = \max d_{12}^2 \approx 0,2$ ).

В случае  $\Delta v \neq 0$  геометрия обеих кривых практически не изменяется, а зона краевых эффектов увеличивается. Максимальные площади зон наблюдаются при  $\Delta v = 0,4$ . В этом случае для эллиптической части зоны  $d_{12}^2(\mathbf{n}) \approx 0,85$ . Параметры эллипса следующие: центр находится в точке  $\mathbf{x} \approx (0,28; 0,6)$ , полуоси  $(a_{n_1}, a_{n_2}) \approx (0,43; 0,25)$ . Для другой части зоны  $\max d_{12}^2 \approx 0,26$ ,  $\max d_{12}^1 \approx 0,3$ .

На рис. 4 приведена зона краевого эффекта для напряжения  $\tau_{22}$  при  $\Delta v = 0$ . Краевой эффект наблюдается в материале связующего и в окрестности контактной части наполнителя. Величина протяженности в направлении  $x_1$  составляет  $d_{22}(\mathbf{n}_1) = d_{22}^2(1, 0) \approx 0,7$ . Максимальная протяженность наблюдается в направлении единичного вектора  $\mathbf{n} = (0,96; -0,27)$ ,  $\max d_{22} = d_{22}(\mathbf{n}) \approx 0,73$ . При  $\Delta v \neq 0$  характер зон существенно не изменяется, а их площади увеличиваются за счет роста протяженности зоны в направлениях осей  $Ox_i$ .



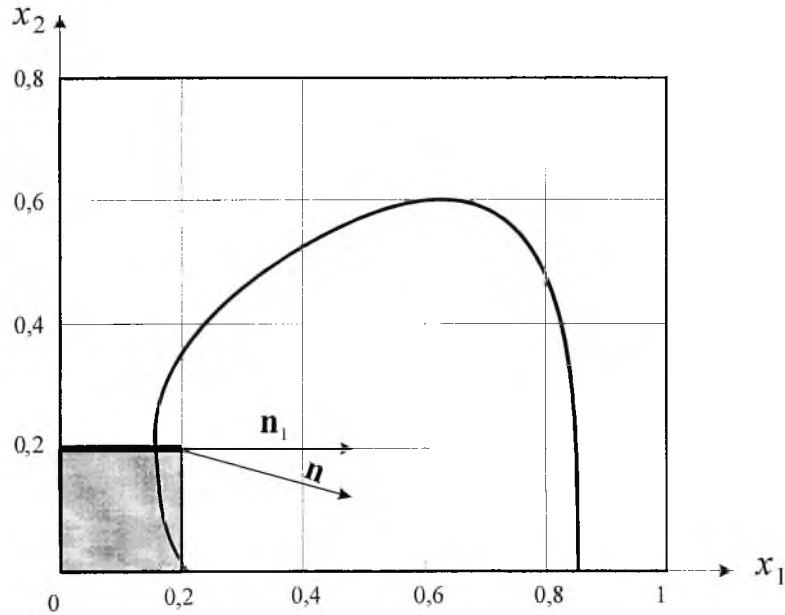


Рис. 4. Область возмущения напряжений  $\tau_{22}$ , соответствующая значению  $\rho = 5$  и обусловленная наличием трещины ( $v^2 = v^1$ ). (Вектор  $\mathbf{n} \approx (0,96; -0,27)$  указывает направление максимальной величины протяженности краевого эффекта, вектор  $\mathbf{n}_1 = (1; 0)$  характеризует протяженность краевого эффекта в направлении  $x_1$ .)

Для  $0 \leq \Delta v \leq 0,4$  интервалы изменения величин протяженностей следующие:  $0,7 \leq d_{22}(\mathbf{n}_1) \leq 0,8$ ,  $0,73 \leq d_{22}(\mathbf{n}) = \max d_{22} \leq 0,82$ .

*Анализ результатов.* Целью расчетов является исследование зависимости краевых эффектов от коэффициентов Пуассона компонент композита. Границы зон построены для 5%-ного отклонения (увеличения) напряжений от величины растягивающей нагрузки. В качестве источника краевого эффекта принята точка  $\mathbf{x} = (0,2; 0,2)$ , соответствующая вершине трещины. В результате расчетов установлено.

1. Различие в значениях коэффициентов Пуассона компонент композита ( $\Delta v \neq 0$ ) не изменяет существенно геометрии зон краевых эффектов, порожденных наличием трещины, и не уменьшает площади этих зон.

2. Зоны краевых эффектов, соответствующие напряжениям  $\tau_{11}$ , наблюдаются только в теле связующего. При этом они имеют форму эллипса с центром  $\mathbf{x} \approx (a_{x_i}; 0,2)$ , где  $a_{x_i}$  определяется по (17).

3. Зоны краевых эффектов для напряжения  $\tau_{12}$  имеют место как в наполнителе, так и в связующем. Максимальная протяженность зоны ( $d_{12}^2 \approx 0,7$ ) имеет место в материале связующего.

4. Зоны краевых эффектов для напряжения  $\tau_{22}$  наблюдаются в теле связующего и в окрестности линии контакта наполнителя. При  $0 \leq \Delta v \leq 0,4$  величина максимальной протяженности составляет  $0,73 \leq \max d_{22}^2 \leq 0,82$ .

## Выводы

1. Рассмотрена плоская задача о краевых эффектах в двухкомпонентном композите, слабоармированном волокнами прямоугольного поперечного сечения и ослабленном двумя симметричными контактными трещинами. Композит нагружен равномерной растягивающей нагрузкой.

2. Приближенное решение получено методом конечных разностей. Дискретные задачи выписаны в явной форме. К решению сеточных уравнений применены эффективные прямой (Холецкого) и итерационный (сопряженных градиентов) методы.

3. Исследовано влияние коэффициентов Пуассона компонент композита на характер зон краевых эффектов.

4. Установлены следующие результаты:

1) краевые эффекты для напряжения  $\tau_{11}$  имеют место только в материале связующего. Зона краевых эффектов имеет форму, близкую к форме эллипса. Граница зоны для величины  $\Delta\nu = |\nu^2 - \nu^1|$ , изменяющейся в интервале  $0 \leq \Delta\nu \leq 0,4$ , определяется аналитически;

2) для касательных напряжений краевые эффекты имеют место в обоих компонентах композита. Одна из ветвей зоны краевого эффекта размещается в теле связующего и по форме, близка к форме эллипса. Максимальная величина протяженности зоны наблюдается в теле связующего при  $\Delta\nu = 0,4$  и равна примерно пяти размерам стороны наполнителя;

3) зоны краевых эффектов для напряжения  $\tau_{22}$  размещаются в теле связующего и в окрестности контактной части наполнителя. Форма зоны краевого эффекта напоминает форму трапеции. При  $0 \leq \Delta\nu \leq 0,4$  величины протяженности в направлении оси  $Ox_1$  изменяются в пределах  $0,7...1,0$ , а в направлении оси  $Ox_2$  максимальная величина протяженности изменяется в интервале  $0,6...0,7$ .

## Резюме

Розглянуто двокомпонентний композит, слабоармований волокнами прямокутного поперечного перерізу і послаблений двома контактними тріщинами, що розташовані симетрично одній з координатних осей. Композит знаходиться в умовах плоскої деформації. На границі прикладено рівномірно розтягуюче навантаження. Досліджується вплив коефіцієнтів Пуассона компонент композита на характер зон крайових ефектів. Наближений розв'язок задачі відшукується за допомогою методу скінченних різниць. Побудовано зони крайових ефектів для компонент напружень у залежності від значень коефіцієнтів Пуассона компонент композита.

1. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Механика композитов. В 12 т. / Под. ред. А. Н. Гузя. Статика материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – Т. 1. – 455 с.
3. Гузь А. Н., Коханенко Ю. В. Краевые эффекты в композитах // Прикл. механика. – 1995. – 31, № 3. – С. 3 – 24.

4. Коханенко Ю. В., Ясинский В. В. Численное решение задач о краевых эффектах в композитах, слабоармированных прямоугольными волокнами при наличии трещины в наполнителе // Там же. – 1997. – **33**, № 5. – С. 60 – 69.
5. Коханенко Ю. В. Об одном способе построения дискретных моделей статических задач теории упругости // Там же. – 1993. – **29**, № 10. – С. 101 – 108.
6. *Kokhanenko Yu. V.* Finite-elements solution of plane problems of the linear elasticity theory of composites // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, No. 10. – P. 987 – 997.

Поступила 26. 09. 2000