УДК 519.1

И.Э. ШУЛИНОК

ПРОБЛЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ ДВУХЦВЕТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОЗАИКИ

Рассматривается задача о построении дискретных образов на линейном поле зрения (линейная мозаика). Показано, что задача сводится к решению системы линейных уравнений в поле вычетов по конечному модулю.

Введение. Эта задача в том или ином виде встречается в различных областях, где используется прямоугольная метрика. Пусть задано прямоугольное поле $\Pi = (\pi_{ij})_{m,n}$, состоящее из $N = mn$ клеток, где n – число клеток в каждой строке, а m – число клеток в каждом столбце. Имеется множество $S = \{s_1, s_2, ..., s_p\}$ из p связных фигур (без повторений), каждая из которых состоит из k_i $(i = 1,2,..., p)$ клеток, число горизонтальных клеток каждой фигуры не превышает n, вертикальных – m. Две клетки считаются связными, если они имеют одну или две общих вершины. Иногда, когда имеется только второе, будем говорить о сильной связности. Каждую фигуру s_i $(i = 1,2,..., p)$ логично представить в виде графа с k_i вершинами, если каждую пару вершин, соответствующих связным клеткам, соединить ребром. Фигура будет связной, если связен соответствующий граф. В дальнейшем S будем называть множеством шаблонов, и не будем ограничивать в общих случаях число копий каждого шаблона. Пусть задано множество целых чисел $Q = \{0,1,..., r-1\}$, которое назовем множеством красок. Каждой клетке шаблона s_i $(i = 1,2,..., p)$ поставлена в соответствие определенная краска $q \neq 0$, или $q \in Q \setminus \{0\}$. Это задается с помощью отражения $f = (f_1, f_2,..., f_p)$, где $f_i : s_i \to Q \setminus \{0\}$.

Первоначально полагаем, что поле Π раскрашено в цвет 0. На поле можно в допустимых пределах последовательно накладывать шаблоны без ограничения на место, порядок и повторение некоторых из них. Окончательный цвет каждой клетки поля будет равен сумме цветов тех клеток всех шаблонов, которые накладывались на данную клетку, по mod r. Задача о построении дискретного образа состоит в следующем: при заданных S, Q и f найти такое семейство шаблонов и разместить их на поле таким образом, чтобы в результате получить заданную раскраску $B = F : \Pi \to Q$, которая называется образом или мозаикой. В зависимости от исходных данных задача может быть неразрешимой.

Постановка задачи. Линейная мозаика. Для математической постановки задачи необходимо определиться с тем, как однозначно фиксировать положение произвольного шаблона на поле. Это тем более необходимо, если учитывать то обстоятельство, что любой шаблон можно размещать на плоскости кроме заданного, еще в трех положениях, которые получаются после поворота шаблона в плоскости на 90°, 180° и 270°. Иногда новые положения можно получить после поворота шаблона вокруг горизонтальной или вертикальной осей. Самый простой выход из этого – считать новое положение шаблона, отличное от заданного, новым типом шаблона. Тогда множество S расширится до $\overline{S} = \{s_1, s_2, ..., s_l\}$, где каждый шаблон имеет уникальный вид независимо от места, которое он занимает на поле. Теперь в каждом шаблоне можно выделить одну постоянную клетку, относительно которой все остальные клетки шаблона определяются однозначно. Назовем такую клетку меткой соответствующего шаблона. Занумеруем все клетки поля по строкам от 1 до N. Тогда любая клетка поля π_{ij} будет иметь номер $l = n(i-1) + j \quad (i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n)$. Если какой-то шаблон расположить на поле таким образом, чтобы его метка совпала с клеткой l, то координаты остальных клеток шаблона определяются однозначно, через l. Рассмотрим пример шаблона из 9 клеток, где его метка заштрихована.

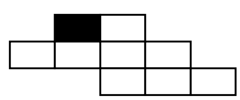

РИС. 1. Шаблон с меткой

Можно записать уравнение шаблона, которое состоит из координат всех его клеток, выраженных через координаты его метки l.

$$s = (l, l+1, l+n-1, l+n, l+n+1, l+n+2, l+2n+1, l+2n+2, l+2n+3). \qquad (1)$$

Двигая горизонтально или вертикально шаблон на поле, можно найти допустимые пределы его положения, которые выразятся в виде ограничений на параметр l: $\alpha \le l \le \beta$ для первой строки, и $\alpha + n\gamma \le l \le \beta + n\gamma \quad (i \le \gamma \le m-3)$ для остальных строк.

Множество положений шаблона s_t на поле определяется множеством координат его меток $X(t) = \left\{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, ..., x_M^{(t)}\right\} \quad (t = 1,2,..., L)$. Каждая координата

$x_i^{(t)} = \lambda \quad (1 \le \lambda \le r-1)$ определяет число экземпляров шаблона s_t, наложенных друг на друга, метки которых имеют эту координату. Заданный образ, который необходимо построить, можно определить как $B = (b_1, b_2, ..., b_N)$, где $b_i \in Q \quad (i = 1,2,...,N)$. Обозначим $\Theta^t(l)$– окрестность клетки l относительно шаблона s_t $(t = 1,2,...,L)$, т. е. подмножество координат $X(t)$, для которых данный шаблон содержит клетку l. Так же, как и уравнение шаблона (1), можно задать его раскраску

$$s_i(q) = \{q_1, q_2, ..., q_{k_i}\} \quad (i = 1,2,...,L), \tag{2}$$

где цвета расположены в том же порядке, что и клетки в (1). Очевидно, что в окрестность клетки l любого шаблона входит и сама клетка l. Для некоторых пар (t,l) множество $\Theta^t(l)$ может быть пустым. Учитывая все обозначения основную задачу можно свести к решению уравнений такого типа:

$$\sum_{t:\Theta^t(l)\neq 0} \sum_{i\in\Theta^t(l)} x_i^{(t)} q_l^{(t)} \equiv b_l (\operatorname{mod} r) \quad (l = 1,2,...,N). \tag{3}$$

Все решения $x_i^{(t)} \neq 0$ определяют положение и количество тех шаблонов, которые в сумме дают заданный образ B. В общем виде эта задача довольно сложная, так как число переменных в ней существенно превышает число уравнений. При этом возникают проблемы с определением ранга системы, что во многом зависит от типов шаблонов и множества красок.

Из всех полей Π самым простым является поле, в котором $m = 1$, представляющее одну строку из n клеток. Тогда любой шаблон состоит из последовательности клеток, окрашенных в цвета $Q \setminus \{0\}$. Задачу с таким полем будем называть задачей о линейной мозаике. Меткой шаблона удобно считать его левую крайнюю клетку. Координаты клеток поля определяются как числа натурального ряда 1, 2, …, n. Координаты меток шаблонов зависят от их размеров. Они представляют также натуральные числа 1, 2, …, $n - k_t+1$, где k_t – размер (длина) шаблона s_t $(t = 1,2,...,L)$. Множество шаблонов можно представлять как множество векторов, например,

$$s_t = \{q_1^{(t)}, q_2^{(t)}, ..., q_{k_t}^{(t)}\}, \text{ где } \quad q_i^{(t)} \in Q \setminus \{0\}.$$

Из всех задач о линейной мозаике самая простая та, где $Q = \{0,1\}$. Тогда окраска шаблонов единственная (цвет 1) и они отличаются друг от друга только размерами. Это позволяет представить множество шаблонов S в виде вектора, компонентами которого служат длины шаблонов. Следует заметить, что они все разные, так как одноцветный шаблон не меняет своего вида после различных преобразований в отличие от плоских шаблонов.

Самым простым образом есть одна окрашенная клетка, т. е. $B = \{b_i = 1, b_j = 0,\ j \neq i\}$. Будем называть такой образ единицей. Если возможно построить такой образ для любой клетки, то комбинируя их, легко построить любой образ на строке.

Определение 1. Базисом системы (1) называется наименьший набор шаблонов, позволяющий построить единицу в любой клетке строки.

Очевидно, что тривиальным базисом будет $S=\{1\}$. Для двух шаблонов s_1 и s_2 базис существует не всегда. Это связано с тем, что если один из них по длине больше, чем $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, то появляются ограничения на передвижение этого шаблона вдоль строки, и некоторые единицы построить невозможно. Поэтому для такого базиса необходимо, чтобы один из них по длине был не больше $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Можно указать несколько простейших базисов такого рода. Один из них имеет вид $S=\{d, d+1\}$, где $1 < d < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. На рис. 2 это показано для $S(4,3)$. На нем шаблон s_1 изображен в первой строке, s_2 – во второй, т. е. поле дублируется для прозрачности построения. Внизу приводится результат сумм по $\operatorname{mod} 2$ раскрасок этих шаблонов, откуда и появляется единица в соответствующей клетке поля.

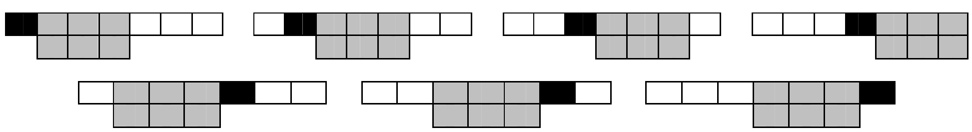

РИС. 2. Базис для шаблонов S(4,3) и $n = 7$

Еще один пример простейшего базиса системы представляет множество $S=\{2, 2k+1\}$, где k – произвольное и $1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$. В этом случае сделать $b_j = 1$ для произвольного j можно неоднозначно с помощью нескольких шаблонов s_1 и одного шаблона s_2. Для этого расположим s_2 так, чтобы он покрывал клетку j, при этом координата его метки (левая крайняя клетка) $l \equiv j (\operatorname{mod} 2)$. Это возможно всегда, так как длина s_2 меньше n, поэтому его можно сдвигать хотя бы на одну позицию вдоль поля. Затем размещаем k экземпляров шаблона s_1 слева и справа от клетки j, чтобы покрыть оставшиеся клетки шаблона s_2.

Для произвольных значений s_1 и s_2 больше 2 такие построения не всегда возможны. Можно сказать, что для каждого n существует пороговое значение длин двух шаблонов, когда существует ровно один базис, а для других значений базис либо не существует, либо их несколько.

В качестве примера рассмотрим два шаблона $s_1 = 5$, $s_2 = 8$ и $n = 11$. Составим систему уравнений типа (1). При заданных параметрах метка первого шаблона, учитывая размеры поля, может принимать значения $x_i^{(1)} = 1$ для $i = 1,2,...,7$. Аналогично, метка второго шаблона может принимать значения $x_j^{(2)} = 1$ для j = 1, 2, 3, 4. Чтобы не иметь дело с верхними индексами, обозначим x_i $(i = 1,2,...,7)$ переменные для первого шаблона, а x_j (j = 8, 9, 10, 11) – переменные для второго шаблона. Тогда система (1) для нашего примера приобретет конкретный вид.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_8 & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_1 & +x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_8 & +x_9 & \cdot & \cdot \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_8 & +x_9 & +x_{10} & \cdot \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_8 & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & \cdot & \cdot & +x_8 & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} \\
 & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & \cdot & +x_8 & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} \\
 & & x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_8 & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} \\
 & & & x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_8 & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} \\
 & & & & x_5 & +x_6 & +x_7 & \cdot & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} \\
 & & & & & x_6 & +x_7 & \cdot & \cdot & +x_{10} & +x_{11} \\
 & & & & & & x_7 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_{11}
\end{array} . \quad (4)$$

Если обозначить матрицу этой системы A, то решение задачи о построении линейной мозаики для двух шаблонов $S = (s_1, s_2)$ сводится к решению системы сравнений с $s_1 + s_2 - 2$ переменными

$$AX \equiv b(\mathrm{mod}\, 2). \quad (5)$$

Матрица A имеет специфическую структуру: она состоит из двух массивов единиц (остальные равны нулю), которые напоминают параллелограммы. Относительно строк и столбцов они имеют такие координаты своих вершин: $[(1,1),(s_1,1),(s_2 - 1, s_1),(s_1, s_2 - 1)]$ и $[(1, s_2),(s_2, s_2),(s_1 - 1, n),(n, n)]$. Эту матрицу можно задать и по-другому

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } j \le i \le j + s_1 - 1 \text{ и } j \le s_2 - 1; \\ 1, \text{если } i \le j \le i + s_1 - 1 \text{ и } j \ge s_2; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $\det A \ne 0(\mathrm{mod}\, 2)$, то решение (4) запишется в виде $X \equiv A^{-1}b(\mathrm{mod}\, 2)$, поэтому необходимо найти A^{-1} из условия $A^{-1}A \equiv E(\mathrm{mod}\, 2)$. Для этого необходимо решить n систем простых уравнений из n неизвестных. Рассмотрим систему уравнений, где неизвестными являются элементы первой строки матрицы A^{-1}. Обозначим их $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Необходимо решить систему

$$A^T y \equiv (1,0,0,\ldots,0)(\mathrm{mod}\,2). \tag{6}$$

Матрица A^T также имеет два массива единиц (остальные элементы равны 0), которые образуют 2 параллелограмма, но уже в транспонированном виде.

Лемма 1. Детерминант матрицы A системы уравнений (4) равен $1(\mathrm{mod}\,2)$ тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель чисел s_1 и s_2 НОД$(s_1,s_2) \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$.

Для доказательства рассмотрим матрицу A для двух шаблонов s_1 и s_2 и обозначим ее $A(s_1,s_2)$. В каждом из первых $s_2 - 1$ ее столбцов находиться по s_1 единиц, а в каждом из оставшихся $s_1 - 1$ столбцов находиться по s_2 единиц. Попытаемся непосредственно вычислить $\det A = |A|$. Для этого разделим матрицу на ее верхние s_1 строк и нижние $n–s_1$. Затем каждую из этих частей разделим на левые s_1 столбцов и правые $n–s_1$ столбцов. Обозначим полученные подматрицы A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22}. Подматрицей A_{11} является треугольной, у которой наддиагональные элементы равны нулю, а остальные равны 1. В подматрице A_{12} все столбцы с единицами равны первым $s_1 - 1$ столбцам подматрицы A_{11}. Вычтем в матрице A из последних $s_1 - 1$ столбцов первые $s_1 - 1$ столбцы. В результате подматрица A_{12} превратиться в нулевую подматрицу, что можно отразить так:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A'_{22} \end{vmatrix} = |A'_{22}|. \tag{7}$$

Это означает, $\det A = \det A_{11} \cdot \det A'_{22} = \det A'_{22}(\mathrm{mod}\,2)$, так как $\det A_{11} \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$. А подматрица A'_{22} имеет размеры $(n - s_1)\times(n - s_1)$. В ней остались $s_2 - 1 - s_1$ столбцов, каждый из которых содержит по s_1 единиц, и $s_1 - 1$ столбцов, каждый из которых содержит по $s_2 - s_1$ единиц. Получается последовательный переход

$\det A(s_1, s_2) = \det A(s'_1, s'_2)$, где $s'_1 = \min\{s_1, s_2 - s_1\}$; $s'_2 = \max\{s_1, s_2 - s_1\}$;

$n' = n - s_1 = s'_1 + s'_2 - 2 = s_2 - 2$.

В виду конечности чисел s_1 и s_2 это в конце концов приведет к образованию одной из матриц $A(1,k)$ или $A(0,k)$. Первая матрица получиться, если НОД$(s_1,s_2) = 1$. Она тождественна E_{k-1}, поэтому $\det A(s_1, s_2) \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$. Вторая – если НОД$(s_1,s_2) = d > 1$. В ней присутствуют столбцы с нулями, поэтому $\det A(s_1, s_2) \equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, что и требовалось доказать. Покажем это на нашем примере.

$$A(5,8) = \left(\begin{array}{ccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(3,5) \to A(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Детерминант последней матрицы равен 1(mod 2), что соответствует соотношению между s_1 и s_2, а именно НОД(5,8) = 1.

Запишем теперь уравнение (6) в виде системы уравнений для нашего примера.

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & +y_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 1 \\ \cdot & y_2 & +y_3 & +y_4 & +y_5 & +y_6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & \cdot & y_3 & +y_4 & +y_5 & +y_6 & +y_7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & y_4 & +y_5 & +y_6 & +y_7 & +y_8 & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_5 & +y_6 & +y_7 & +y_8 & +y_9 & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_6 & +y_7 & +y_8 & +y_9 & +y_{10} & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_7 & +y_8 & +y_9 & +y_{10} & +y_{11} & \equiv 0 \\ y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & +y_5 & +y_6 & +y_7 & +y_8 & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & y_2 & +y_3 & +y_4 & +y_5 & +y_6 & +y_7 & +y_8 & +y_9 & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & \cdot & +y_3 & +y_4 & +y_5 & +y_6 & +y_7 & +y_8 & +y_9 & +y_{10} & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & +y_4 & +y_5 & +y_6 & +y_7 & +y_8 & +y_9 & +y_{10} & +y_{11} & \equiv 0 \end{array}\right\} \mod 2. \tag{9}$$

Для решения этой системы уравнений в общем виде нам понадобится понятие числового графа.

Определение 2. Числовым графом G=(X,U,F) называется математический объект, состоящий из двух множеств $X = (x_1, x_2,..., x_n) \in N$ – множества вершин, $U = (u_1, u_2,..., u_m) \in N$ – множества образующих и порождающей функции F двух аргументов. Две вершины x_i и x_j называются смежными, если $F(x_i, x_j) \in U$.

Числовой граф, у которого $X = N_n$, а $F = |x_i - x_j|$, называется натуральным модульным графом (NM-графом). В матрицы системы (9) множества элементов из единиц также образуют два параллелограмма на первых $s_2 - 1$ строках и $s_1 - 1$ остальных строках. Прибавим по mod 2 (i – 1)-ю к i-й строке ($2 \le i \le s_2 - 1$), затем (j – 1)-ю к j-й строке ($s_2 + 1 \le j \le n$). В результате система уравнений (9) превратится в систему уравнений

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & +y_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 1 \\
y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +y_6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 1 \\
\cdot & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +y_7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\
\cdot & \cdot & y_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +y_8 & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & y_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +y_9 & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +y_{10} & \cdot & \equiv 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +y_{11} & \equiv 0 \\
y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & +y_5 & +y_6 & +y_7 & +y_8 & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\
y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +y_9 & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\
\cdot & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +y_{10} & \cdot & \equiv 0 \\
\cdot & \cdot & y_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +y_{11} & \equiv 0
\end{array}\right\} \bmod 2. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь *NM*-граф $G = (Y,U)$, где $U = (5,8)$, а $n = 11$, изображенный на рис. 3, а. Граф отображает свойство смежности для двух вершин, соответствующих двум переменным, для которых $y_i \equiv y_j (\bmod 2)$ из системы (10).

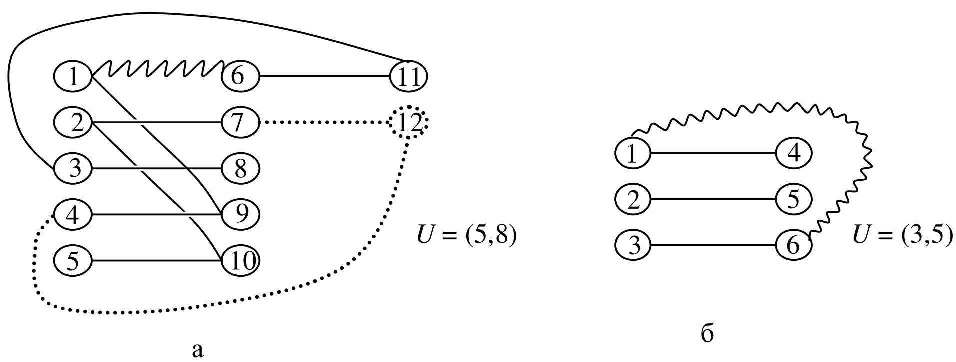

РИС. 3. Числовые графы для системы (10)

Единственное ребро (волнистое) отображает соотношение $y_1 + y_6 \equiv 1(\bmod 2)$ или $y_1 \neq y_6$. В графе 11 вершин ($n = s_1 + s_2 - 2$). Известно, что *NM*-граф связен, если $u_1 + u_2 \leq n + 1$. Но у нас $5 + 8 = 13 > 11 + 1$. Если добавить вершину 12 и соответствующие ей два ребра (на рис. 3 они обозначены пунктиром), то получим связный граф. Это означает, что исходный граф несвязен и состоит из двух компонент. Одна компонента содержит вершину $n + 1 - s_1 = s_2 - 1$ (на рис. 3 это 7), а вторая – вершину $n + 1 - s_2 = s_1 - 1$ (на рис. 3 это 4). Одна из этих компонент разделена волнистым ребром на две части: одна часть соответствует значениям переменных $y_i \equiv 0(\bmod 2)$, а другая часть – переменным $y_j \equiv 1(\bmod 2)$. Определить эти значения можно из первого и s_2-го уравнений системы (10).

$$\sum_{i=1}^{s_1} y_i \equiv 1 \pmod 2; \qquad \sum_{j=1}^{s_2} y_j \equiv 0 \pmod 2. \tag{11}$$

Однако систему (9) можно еще упростить. Если подставить в нее значения из (10), то придем к системе

$$\left.\begin{array}{ccccccc} y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & +y_5 & \cdot & \equiv 1 \\ \cdot & y_2 & +y_3 & +y_4 & +y_5 & +y_6 & \equiv 0 \\ y_1 & +y_2 & +y_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & y_2 & +y_3 & +y_4 & \cdot & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & \cdot & y_3 & +y_4 & +y_5 & \cdot & \equiv 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & y_4 & +y_5 & +y_6 & \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod 2. \tag{12}$$

Если в (12) переместить две верхние строки вниз, то получим систему уравнений типа (9), но для $s_1' = 3$ и $s_2' = 5$. При этом единица в правой части находится в первой строке уравнений для s_2'. Тем самым доказан следующий результат.

Лемма 2. Систему уравнений (9) для образующих $S = (s_1, s_2)$ можно свести к системе уравнений для $S' = (s_1', s_2')$, где $s_1' = \min\{s_1, s_2 - s_1\}$, а $s_2' = \max\{s_1, s_2 - s_1\}$.

Тот факт, что уравнение с единицей в правой части перемещается вниз, мы будем отмечать подчеркиванием второго шаблона, т. е. $S(s_1 s_2) \to S'(s_1', \underline{s_2'})$, или $(s_1 s_2) \to (s_1', \underline{s_2'})$. Если единица после ряда таких переходов возвращается в первую строку, то подчеркивание убираем.

Если в системе (12) сложить две первые строки, затем к i-й строке добавить $(i + 1)$-ю $(3 \le i \le n - 1)$, то получим соотношение: $y_1 \ne y_6$; $y_1 = y_4$; $y_2 = y_5$; $y_3 = y_6$. Этим значениям соответствует *NM*-граф на рис. 3, б. Из первых строк системы (12) получаем:

$$y_1 \ne y_2;\ y_2 = y_3;\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \ \text{или}\ y_1 = 0;\ y_2 = y_3 \equiv 1 \pmod 2.$$

Подставляя эти данные в исходный граф на рис. 3, а, получим решение $Y = (0,1,1,0,1,1,1,1,0,1,1)$.

Таким образом, лемма 2 позволяет понизить размер исходной системы уравнений до такого уровня, когда решение становиться очевидным. Затем это решение подставляем в *NM*-граф исходной системы и получаем полное решение. Так как число указанных переходов конечно, то в результате придем к системе уравнений для таких шаблонов $(2, s_2)$ или $(s_1, s_1 + 1)$. Каждый из этих случаев, в свою очередь, распадается на два в зависимости от наличия подчеркивания второго шаблона. Рассмотрим каждый из них.

$S = (2, s_2)$. Тогда система (9) приобретает вид:

$$y_1 + y_2 \equiv 1(\bmod 2); \quad y_i + y_{i+1} \equiv 0(\bmod 2), (i = 2,3,\ldots,s_2 - 1); \quad \sum_{i=1}^{s_2} y_i \equiv 0(\bmod 2). \quad (13)$$

Очевидно, что s_2 нечетное число, иначе в изначальной системе s_1 и s_2 имели бы общий делитель 2, что невозможно. Поэтому $y_1 \neq y_2(\bmod 2)$, а остальные $y_i = y_2$ $(i > 2)$. Из последнего уравнения следует $y_1 = 0$, а остальные $y_i = 1(i > 2)$.

$S = (2, \underline{s_2})$. Система имеет вид

$$y_i + y_{i+1} \equiv 0(\bmod 2), (i = 1,2,\ldots,s_2 - 1); \quad \sum_{i=1}^{s_2} y_i \equiv 1(\bmod 2). \quad (14)$$

Здесь все $y_i = y_1$ $(i = 2,3,..,s_2)$. А из последнего уравнения получаем $y_i \equiv 1(\bmod 2)$ $(1 \le i \le s_2)$.

$S = (s_1, s_1 + 1)$. Система имеет вид

$$\sum_{i=1}^{s_1} y_i \equiv 1(\bmod 2); \sum_{i=j}^{j+s_1-1} y_i \equiv 0(\bmod 2), (j = 2,3,\ldots,s_1); \sum_{i=j}^{j+s_1} y_i \equiv 0(\bmod 2). \quad (15)$$

Вычитая из уравнений, входящих в третью сумму, уравнения второй суммы, получим решение $y_1 = y_2 = \ldots = y_{s_1-1} \equiv 0(\bmod 2)$. Из первого уравнения получаем $y_{s_1} \equiv 1(\bmod 2)$. Из первого уравнения, входящего во вторую сумму, получаем $y_{s_1+1} \equiv 1(\bmod 2)$. Остальные $y_i \equiv 0(\bmod 2)$, $(i > s_1 + 1)$.

$S = (s_1, \underline{s_1 + 1})$. Система приобретает вид

$$\sum_{i=j}^{j+s_1-1_1} y_i \equiv 0(\bmod 2)(j = 1,2,\ldots,s_1); \sum_{i=1}^{s_1+1} y_i \equiv 1(\bmod 2), (j = 2,3,\ldots,s_1);$$

$$\sum_{i=j}^{j+s_1} y_i \equiv 0(\bmod 2), (j = 2,3,\ldots,s_1 - 1). \quad (16)$$

Если из уравнений, входящих в третью сумму вычесть $s_1 - 1$ нижних уравнений, входящих в первую сумму, то получим решение: $y_1 = 1$; $y_2 = y_3 = = \ldots = y_{s_1-1} \equiv 0(\bmod 2)$. Из первого уравнения следует $y_{s_1} = 1$, а из второго – $y_{s_1+1} = 1$. Остальные $y_i \equiv 0(\bmod 2)$.

Заключение. Рассмотренная задача имеет различные области применения. Это особенно относится к многоцветным мозаикам, а также к плоским мозаикам, о которых речь будет идти в последующих публикациях.

І.Е. Шулінок

ПРОБЛЕМИ ПОБУДОВИ ДВОКОЛЬОРОВОЇ ЛІНІЙНОЇ МОЗАЇКИ

Розглядається задача про побудову дискретних образів на лінійному полі зору (лінійна мозаїка). Показано, що задача зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь у полі лишків за скінченним модулем.

I.E. Shulinok

PROBLEMS WITH BUILDING TWO COLORS LINEAR MOSAIC

A problem of building discrete images on linear visual field (linear mosaic) is considered. This problem may be reduced to solving a system of linear equalities in residue field on finite modulo.

Получено 17.05..2010