

УДК 532.528

МАКСИМІЗАЦІЯ ДАЛЬНОСТІ СУПЕРКАВІТАЦІЙНОГО РУХУ ЗА ІНЕРЦІЄЮ З ФІКСОВАНОЮ ПОЧАТКОВОЮ ГЛИБИНОЮ

І. Г. НЕСТЕРУК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 19.11.2007

Розглянуті задачі максимізації відстані, пройденої осесиметричним суперкавітуючим тілом за інерцією під довільним кутом до горизонту. Початкові швидкість та глибина вважаються заданими. Використовувались дві групи ізопериметричних умов при сталій масі та сталій середній густині тіла. Отримані прості аналітичні залежності для оптимальних форми тіла і радіуса кавітатора у випадках фіксованих довжини, калібру та об'єму тіла. Розраховані максимально можливі значення пройденого шляху. Показано, що у випадку висхідного суперкавітаційного руху можливе різке збільшення дальності та вихід тіла на поверхню при нескінченно малому перевищенні деякого критичного значення початкової швидкості. Розраховані відповідні значення критичних чисел Фруда. Проаналізовано особливості задач оптимізації у випадках тонких кавітаторів та для входу до води з атмосфери. Зроблено оцінки максимальної дальності для осесиметричних тіл, що забезпечують обтікання без відриву прилежого шару та кавітації. Показано, що при достатньо великих числах Рейнольдса вони можуть бути конкурентноспроможними з суперкавітуючими тілами. Наведі аналітичні формули для максимальної дальності рівномірного суперкавітаційного руху.

Рассмотрены задачи максимизации расстояния, пройденного осесимметричным суперкавитирующим телом по инерции под произвольным углом к горизонту. Начальная скорость и глубина предполагаются фиксированными. Использовались две группы изопериметрических условий при постоянной массе и при постоянной средней плотности тела. Получены простые аналитические зависимости для оптимальных формы тела и радиуса кавитатора для случаев фиксированных длины, калибра и объема тела. Рассчитаны максимально возможные значения пройденного пути. Показано, что для восходящего суперкавитационного движения возможно резкое увеличение дальности и выход тела на поверхность при бесконечно малом превышении некоторого критического значения начальной скорости. Рассчитаны соответствующие значение критических чисел Фруда. Проанализированы особенности задач оптимизации в случаях тонких кавитаторов и для входа в воду из атмосферы. Сделаны оценки максимальной дальности для осесимметричных тел, обеспечивающих обтекание без отрыва пограничного слоя и кавитации. Показано, что при достаточно больших числах Рейнольдса они могут быть конкурентноспособными с суперкавитирующими телами. Приведены аналитические формулы для максимальной дальности равномерного суперкавитационного движения.

Maximum range problems are considered for the supercavitating motion of the axisymmetric body on inertia under an arbitrary angle to horizon. The starting velocity and depth are accepted as fixed. Two groups of isoperimetric conditions were used: with the constant body mass and with the constant average body density. Simple analytic relations for the optimal body shapes and the cavitator radius were obtained for the cases of the fixed length, caliber and volume of the body. The maximum possible values of the range are calculated. For the upward supercavitating motion, it was shown that infinite small exceeding of some critical value of the starting velocity can cause a jump of the range and coming to the water surface. The corresponding values of the critical Froude number are calculated. The peculiarities of the optimization problems in the cases of the slender cavitators and the entrance into the water from atmosphere are analysed. The maximum range of axisymmetric bodies, which provide the flow pattern without boundary layer separation and cavitation, is estimated. It is shown that at high Reynolds numbers these bodies can be preferable in comparison with the supercavitating ones. Analytical formulas for the maximum range of the steady supercavitating movement.

ВСТУП

Аналіз задач суперкавітаційного руху за інерцією ускладнюється відсутністю точних розв'язків та нестационарним характером течії. Разом з тим, у деяких випадках високошвидкісного руху існує діапазон квазістационарного обтікання з фіксованим значенням опору тиску, коли можна користуватись відомими співвідношеннями для форми стационарної каверни в невагомій рідині, наприклад [1]. В статтях [2–5] розглянуто низку задач оптимізації пройденого за інерцією шляху в режимі горизонтального суперкавітаційного руху. В роботах [6, 7] вперше проаналізовано випадок негоризонтального руху кавітуючого тіла і було показа-

но, що розв'язок залежить від ізопериметричних умов. Дана стаття присвячена задачам з фіксованою початковою глибиною для високошвидкісного руху тіла у воді під довільним кутом до горизонту.

Обмежимося випадком малих чисел кавітації та великих чисел Фруда:

$$\sigma = \frac{2(p_{\infty} - p_c)}{\rho U^2} \ll 1, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \gg 1, \quad (1)$$

де ρ – густина води; U – поточна швидкість тіла; p_{∞} – тиск у воді далеко від перерізу початку каверни на глибині його руху; p_c – тиск у каверні, який можна вважати сталим через велику різницю у густинах води та газів, що заповнюють каверну; L – довжина каверни.

Рівняння прямолінійного руху тіла за інерцією та умову квазістаціонарності можна записати у вигляді (див., наприклад, [8]):

$$m \frac{dU}{dt} = -\frac{\rho U^2 C_x \pi R_n^2}{2} - mg \sin \gamma, \quad (2)$$

$$\frac{L}{U^2} \left| \frac{dU}{dt} \right| \ll 1, \quad (3)$$

де m – маса тіла; R_n – радіус кавітатора; C_x – коефіцієнт кавітаційного опору; γ – кут руху тіла по відношенню до горизонту ($\gamma > 0$ для руху догори). З рівнянь (2), (3) випливає, що для великих чисел Фруда (при виконанні другого обмеження (1)) течію можна вважати квазістаціонарною, якщо

$$\frac{\rho C_x \pi R_n^2 L}{2 \rho_b V_b} \ll 1, \quad (4)$$

де V_b – об'єм тіла; $\rho_b = m/V_b$ – середня густина тіла. Оскільки $C_x < 1$, величини $\bar{\rho}_b = \rho_b/\rho$ та $V_b/(\pi R_n^2 L)$ в більшості випадків значно перевищують одиницю, то умова (4), як правило, виконується. Для дуже тонких кавітаторів недостатньо великі значення величини $V_b/(\pi R_n^2 L)$ компенсуються меншими величинами опору (наприклад, за отриманою в [9] формулою коефіцієнт опору при нульовому числі кавітації C_{x0} для конічних кавітаторів з кутом при вершині менше 10° не перевищує 0,029). Обмежимося в подальшому випадками, коли умова (4) виконується.

Окрім того, будемо нехтувати впливом сили тяжіння порівняно з силою гідродинамічного опору, тобто вважати число Фруда достатньо великим, щоб виконувалась умова

$$\frac{\text{Fr}^2 \rho C_x \pi R_n^2 L}{2 \rho_b V_b} \gg 1, \quad (5)$$

яку можна отримати з рівняння (2). Тоді, якщо додатково вважати коефіцієнт кавітаційного опору C_x сталим, то рівняння руху (2) легко інтегрується і пройдений тілом шлях S визначається формулою (див. [2–5])

$$S = \frac{2m}{\rho C_x \pi R_n^2} \ln \frac{U_0}{U}, \quad (6)$$

де U_0 – фіксована початкова швидкість тіла; U – кінцева швидкість тіла, при якій відбувається його замивання водою (припинення суперкавітаційного режиму обтікання і зупинка).

Формула (6) дозволяє проаналізувати питання максимізації пройденого шляху для різних ізопериметричних умов. Зокрема, для випадку горизонтального руху деякі з таких задач розглядалися

в [2–5]. В даній роботі сформульовані та розв'язані декілька задач оптимізації за умови, що крім початкової швидкості U_0 фіксованою є початкова глибина h_0 . При цьому найбільш цікавими є п'ять ізопериметричних задач, подібних до розглянутих в [7]. А саме, окрім початкових швидкості та глибини можна вважати також фіксованими:

1. Маса та калібр тіла D_b ;
2. Маса та довжину тіла L_b ;
3. Маса та об'єм тіла V_b або еквіваленту задачу з фіксованими середньою густиною та об'ємом тіла;
4. Середню густиною та калібр тіла;
5. Середню густиною та довжину тіла.

Тоді з формули (6) випливають висновки щодо оптимальної форми тіла (докладний аналіз можна знайти в [7]). Для ізопериметричної задачі 1 калібр оптимального тіла повинен збігатися з максимальним радіусом каверни в момент замивання. Для задачі 2 довжина оптимального тіла повинна збігатися з довжиною каверни в момент замивання. Інших обмежень на форму оптимальних тіл в цих задачах немає, при умові, що вони вписуються в каверну в момент замивання. Приклади оптимальних тіл для задач 1 та 2 наведені в [7]. Для ізопериметричних задач 3–5 форма оптимального тіла збігається з формою каверни в момент замивання. Відповідно об'єм оптимального тіла V_b дорівнює об'єму каверни V в момент замивання. Слід зауважити, що задачу 5 вже розв'язано в [6].

Таким чином, задача максимізації шляху практично зводиться до визначення форми каверни в момент замивання, яка, в свою чергу, залежить від особливостей суперкавітаційного режиму обтікання, аналіз яких у загальному випадку вимагає неабияких зусиль. У даній роботі розглядатимуться лише два важливі для практики випадки:

1. Парова кавітація (без піддуву газу в каверну) з тиском p_c набагато меншим від атмосферного. Додатково будемо вважати, що сила тяжіння мало впливає на форму та розміри каверни, тобто виконується умова $\sigma \text{Fr}^2 \gg 1$ (див. [8]), перетворення якої з врахуванням (1) дає

$$\frac{\rho g L}{2(p_\infty - p_c)} \approx \frac{L}{2(h+10)} \ll 1, \quad (7)$$

де глибина руху кавітатора h та L вимірюються в метрах.

2. Вхід тіла у воду з атмосфери після початкової стадії перетину вільної поверхні. В цьому випадку форма каверни є суттєво нестаціонарною, нехтувати силами тяжіння не можна, та умова (7) не виконується.

В даній роботі зроблено також спробу порівняти максимальні віддалі, що забезпечують тонкі та

нетонкі кавітатори, а також тіла, що обтікаються в безвідривному режимі. Розглянуто також рівномірний суперкавітаційний рух з реактивною тягою.

1. ОПТИМАЛЬНІ ТІЛА З НЕТОНКИМИ КАВІТАТОРАМИ

Будемо вважати, що вимоги (1), (4), (5), (7) виконуються, і скористаємось напівемпіричними закономірностями для стаціонарних видовжених каверн за нетонкими кавітаторами з поточним значенням числа кавітації [1]:

$$\bar{R}^2 = \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{\lambda^2}, \quad (8)$$

$$\lambda = \frac{L}{D} = \sqrt{\frac{-\ln \sigma}{\sigma}}, \quad (9)$$

$$\frac{D}{R_n} = 2\sqrt{\frac{C_x}{\sigma}}, \quad (10)$$

$$\frac{L}{R_n} = \frac{2\sqrt{-C_x \ln \sigma}}{\sigma}, \quad (11)$$

де $\bar{R} = R/L$ – безрозмірний радіус перерізу каверни; $\bar{x} = x/L$ – поздовжня координата; λ – видовження каверни; D – максимальний діаметр каверни; L – довжина каверни.

1.1. Максимальні значення дальності для різних ізопериметричних умов

Рівняння для дальності (6) можна перетворити з використанням (8)–(11) та виразу для числа кавітації

$$\sigma = \frac{2g(h_1 - S \sin \gamma)}{U_0^2 \bar{U}^2}, \quad \bar{U} = \frac{U}{U_0}. \quad (12)$$

Тут і в подальшому початкова глибина h_0 та $h_1 = 10 + h_0$ вимірюються в метрах.

Для ізопериметричних задач 1–5 можна отримати відповідно:

1. Фіксовані маса та калібр тіла $D_b = D$ –

$$\bar{S}(\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma) = -\frac{4}{\pi} \bar{U}^2 \ln \bar{U}, \quad (13)$$

$$\bar{S} = \frac{SD}{U_0} \sqrt{\frac{\rho g}{m}}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1 D}{U_0} \sqrt{\frac{\rho g}{m}}; \quad (14)$$

2. Фіксовані маса та довжина тіла $L_b = L$ –

$$\bar{S}(\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma)^2 = \frac{2}{\pi} \bar{U}^4 \ln \bar{U} \ln \sigma, \quad (15)$$

$$\bar{S} = \frac{S \rho^{1/3} L^{2/3} g^{2/3}}{m^{1/3} U_0^{4/3}}, \quad (16)$$

$$\bar{h}_1 = \frac{h_1 \rho^{1/3} L^{2/3} g^{2/3}}{m^{1/3} U_0^{4/3}};$$

3. Фіксовані маса та об'єм тіла $V_b = V$ або фіксовані середня густина та об'єм тіла –

$$\bar{S}(\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma)^{4/3} = \frac{2\bar{U}^{8/3} \ln \bar{U} (\ln \sigma)^{1/3}}{\pi^{1/3} 3^{2/3}}, \quad (17)$$

$$\bar{S} = \frac{S \rho^{3/7} V^{2/7} g^{4/7}}{m^{3/7} U_0^{8/7}}, \quad (18)$$

$$\bar{h}_1 = \frac{h_1 \rho^{3/7} V^{2/7} g^{4/7}}{m^{3/7} U_0^{8/7}};$$

4. Фіксовані середня густина та калібр тіла –

$$\bar{S}(\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma)^{3/2} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \bar{U}^3 \ln \bar{U} \sqrt{-\ln \sigma}, \quad (19)$$

$$\bar{S} = \frac{S g^{3/5}}{D^{2/5} \bar{\rho}_b^{2/5} U_0^{6/5}}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1 g^{3/5}}{D^{2/5} \bar{\rho}_b^{2/5} U_0^{6/5}}; \quad (20)$$

5. Фіксовані середня густина та довжина тіла –

$$\bar{S}(\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma) = -\frac{4}{\pi} \bar{U}^2 \ln \bar{U}, \quad (21)$$

$$\bar{S} = \frac{S}{U_0} \sqrt{\frac{6g}{\pi L \bar{\rho}_b}}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1}{U_0} \sqrt{\frac{6g}{\pi L \bar{\rho}_b}}. \quad (22)$$

У рівняннях (15), (17), (19) можна замінити величину $\ln \sigma$ на близьке значення $\ln \sigma_0$, де початкове число кавітації задається формулою

$$\sigma_0 = \frac{2gh_1}{U_0^2}.$$

Співвідношення (13), (15), (17), (19), (21) свідчать, що безрозмірна дальність \bar{S} залежить лише від безрозмірних початкової глибини \bar{h}_1 , кінцевої швидкості \bar{U} та кута γ (для задач 2–4 є ще залежність від початкового числа кавітації). При цьому для кожної ізопериметричної задачі безрозмірні дальність та початкова глибина визначаються різними формулами (див. (14), (16), (18), (20), (22)). Рівняння (13) та (21) збігаються за рахунок спеціально підібраних сталих при визначенні безрозмірних величин \bar{S} та \bar{h}_1 у співвідношеннях (22),

тому в подальшому аналізі задачі 1 та 5 можна об'єднувати.

Для визначення максимального пройденого за інерцією шляху продиференціюємо обидві частини рівнянь (13), (15), (17), (19) по \bar{U} . Тоді для зазначених ізопериметричних задач легко отримати:

1 або 5. Фіксовані маса та калібр тіла або фіксовані середня густина та довжина тіла –

$$\bar{S}' [\bar{h}_1 - 2\bar{S} \sin \gamma] = -\frac{4}{\pi} \bar{U} (1 + 2 \ln \bar{U}). \quad (23)$$

2. Фіксовані маса та довжина тіла –

$$\begin{aligned} \bar{S}' (\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma) [\bar{h}_1 - 3\bar{S} \sin \gamma] = \\ = \frac{2 \ln \sigma_0}{\pi} \bar{U}^3 (1 + 4 \ln \bar{U}); \end{aligned} \quad (24)$$

3. Фіксовані маса та об'єм тіла або фіксовані середня густина та об'єм тіла –

$$\begin{aligned} \bar{S}' (\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma)^{1/3} \left[\bar{h}_1 - \frac{7}{3} \bar{S} \sin \gamma \right] = \\ = \frac{2(\ln \sigma_0)^{1/3}}{\pi^{1/3} 3^{2/3}} \bar{U}^{5/3} \left(1 + \frac{8}{3} \ln \bar{U} \right); \end{aligned} \quad (25)$$

4. Фіксовані середня густина та калібр тіла –

$$\begin{aligned} \bar{S}' \sqrt{\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma} \left[\bar{h}_1 - \frac{5}{2} \bar{S} \sin \gamma \right] = \\ = -\frac{\sqrt{-2 \ln \sigma_0}}{3} \bar{U}^2 (1 + 3 \ln \bar{U}). \end{aligned} \quad (26)$$

Для руху донизу ($\gamma \leq 0$) квадратні дужки в лівих частинах рівнянь (23)–(26) завжди додатні. Для руху догори ($\gamma > 0$) вони можуть бути також від'ємними, але розглянемо спочатку випадок великих початкових глибин, достатніх для того, щоб вирази у квадратних дужках у правих частинах рівнянь (23)–(26) були додатними. Тоді максимальна дальність досягатиметься при значеннях кінцевої швидкості \bar{U}^* , що відповідають нулям правих частин цих рівнянь. Отже для задач 1 (або 5) та 2:

$$\bar{U}^* = e^{-0,5}; \quad \bar{U}^* = e^{-0,25} \approx 0,78, \quad (27)$$

а для задач 3 та 4 відповідно:

$$\bar{U}^* = e^{-0,375} \approx 0,68; \quad \bar{U}^* = e^{-1/3} \approx 0,72. \quad (28)$$

Отримані оптимальні значення кінцевої швидкості збігаються або є близькими до відповідних

величин \bar{U}^* для задач з фіксованою кінцевою глибиною [6, 7]. Підстановка виразів (27), (28) у співвідношення (13), (15), (17), (19) дозволяють отримати наступні рівняння для значень максимальної дальності \bar{S}^* для різних ізопериметричних умов:

1 або 5. Фіксовані маса та калібр тіла або фіксовані середня густина та довжина тіла –

$$\bar{S}^* (\bar{h}_1 - \bar{S}^* \sin \gamma) = \frac{2}{e\pi}; \quad (29)$$

2. Фіксовані маса та довжина тіла –

$$\bar{S}^* (\bar{h}_1 - \bar{S}^* \sin \gamma)^2 = -\frac{\ln \sigma_0}{2e\pi}; \quad (30)$$

3. Фіксовані маса та об'єм тіла або фіксовані середня густина та об'єм тіла –

$$\bar{S}^* (\bar{h}_1 - \bar{S}^* \sin \gamma)^{4/3} = -\frac{3^{1/3} (\ln \sigma_0)^{1/3}}{4e\pi^{1/3}}; \quad (31)$$

4. Фіксовані середня густина та калібр тіла –

$$\bar{S}^* (\bar{h}_1 - \bar{S}^* \sin \gamma)^{3/2} = \frac{\sqrt{-2 \ln \sigma_0}}{9e}. \quad (32)$$

Рівняння (29) є квадратним, тому розв'язок задачі 1 або 5 задається формулами:

$$\bar{S}^* = \frac{2}{e\pi \bar{h}_1}, \quad \gamma = 0; \quad (33)$$

$$\bar{S}^* = \frac{\bar{h}_1}{2 \sin \gamma} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8 \sin \gamma}{e\pi \bar{h}_1^2}} \right), \quad \gamma \neq 0. \quad (34)$$

Нелінійні рівняння (30)–(32) можна розв'язати чисельно. Приклади розрахунків за рівняннями (30)–(34) для різних значень кута руху γ наведені на рис. 1–4 суцільними лініями. Видно, що для фіксованої початкової глибини максимальна дальність зростає при збільшенні кута γ від -90° до $+90^\circ$, але для значень безрозмірної початкової глибини $\bar{h}_1 > 1,5$ ці відмінності стають малими. В той час, як для малих значень \bar{h}_1 максимальна дальність горизонтального руху може значно перевищувати відповідні значення при рухові донизу $\gamma < 0$. Слід також відзначити подібний характер залежностей $\bar{S}^* (\bar{h}_1)$ для різних ізопериметричних задач. З рис. 1–4 також видно, що рівняння (29) мають розв'язки і для від'ємних значень параметра \bar{h}_1 . Фізичний зміст таких розв'язків буде обговорюватись у наступних розділах.

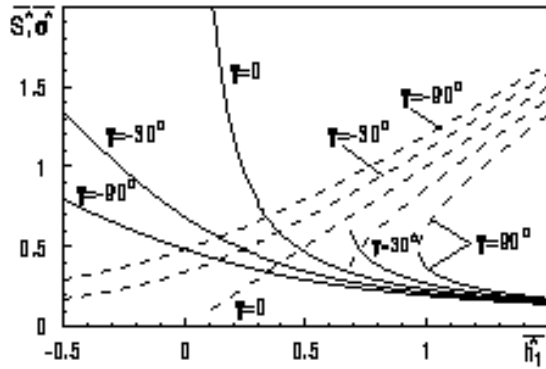


Рис. 1. Залежності максимальної дальності та оптимального числа кавітації для задач 1 (фіксовані маса та калібр тіла) або 5 (фіксовані середня густина та довжина тіла)

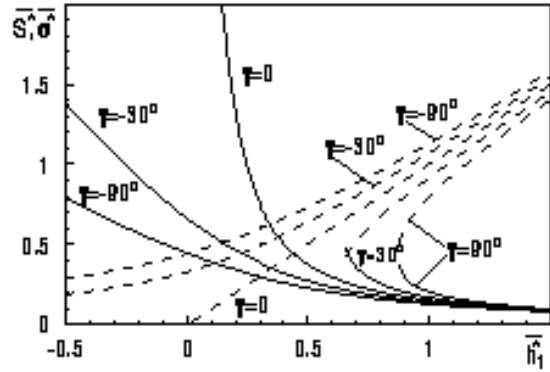


Рис. 3. Залежності максимальної дальності та оптимального числа кавітації для задач 3 (фіксовані маса та об'єм тіла або фіксовані середня густина та об'єм тіла, $\sigma_0 = 0,01$)

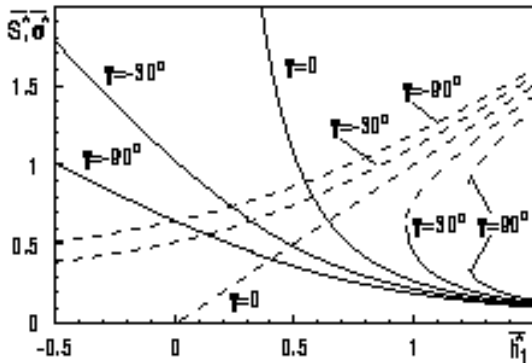


Рис. 2. Залежності максимальної дальності та оптимального числа кавітації для задач 2 (фіксовані маса та довжина тіла, $\sigma_0 = 0,01$)

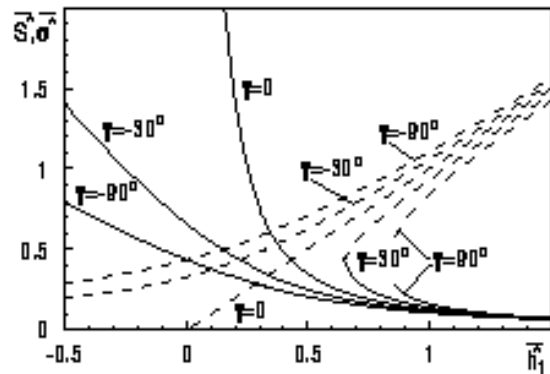


Рис. 4. Залежності максимальної дальності та оптимального числа кавітації для задач 4 (фіксовані середня густина та калібр тіла, $\sigma_0 = 0,01$)

1.2. Оптимальні значення кінцевого числа кавітації та критичні початкові глибини

Оптимальні значення кінцевого числа кавітації σ^* , що визначають форму оптимального тіла, можна знайти за допомогою рівняння (12):

$$\sigma^* = \frac{2g(h_1 - S^* \sin \gamma)}{U_0^2 (\bar{U}^*)^2} \quad (35)$$

Якщо скористатись безрозмірними величинами \bar{S}^* , \bar{h}_1 , що визначаються рівняннями (14), (16), (18), (20), (22), та співвідношеннями (27), (28) для оптимальних значень кінцевої швидкості \bar{U}^* , то рівняння (35) можна записати в інваріантному безрозмірному вигляді

$$\bar{\sigma}^* = \bar{h}_1 - \bar{S}^* \sin \gamma, \quad (36)$$

де безрозмірне оптимальне кінцеве число кавітації

$\bar{\sigma}^*$ для ізопериметричних задач 1–5 обчислюється відповідно до таких формул:

1. Фіксовані маса та калібр тіла –

$$\bar{\sigma}^* = \frac{\sigma^* DU_0}{2} \sqrt{\frac{\rho}{gm}}; \quad (37)$$

2. Фіксовані маса та довжина тіла –

$$\bar{\sigma}^* = \frac{\sigma^* \rho^{1/3} L^{2/3} U_0^{2/3}}{2\sqrt{eg^{1/3} m^{1/3}}}; \quad (38)$$

3. Фіксовані маса та об'єм тіла або фіксовані середня густина та об'єм тіла –

$$\bar{\sigma}^* = \frac{\sigma^* \rho^{3/7} V^{2/7} U_0^{6/7}}{2e^{0,75} m^{3/7} g^{3/7}}; \quad (39)$$

4. Фіксовані середня густина та калібр тіла –

$$\bar{\sigma}^* = \frac{\sigma^* U_0^{4/5}}{2e^{2/3} D^{2/5} \bar{\rho}_b^{2/5} g^{2/5}}; \quad (40)$$

5. Фіксовані середня густина та довжина тіла –

$$\bar{\sigma}^* = \frac{\sqrt{6}\sigma^* U_0}{2e\sqrt{\pi g L \bar{\rho}_b}}. \quad (41)$$

Після визначення безрозмірного кінцевого числа кавітації за універсальним співвідношенням (36) можна за однією з формул (37)–(41), що відповідає заданій ізопериметричній задачі, розрахувати оптимальне значення кінцевого числа кавітації σ^* , а далі за рівняннями (8)–(11) – оптимальні розміри кавітатора, оптимальні габаритні розміри тіла та його оптимальну форму.

Проста залежність (36) для різних ізопериметричних задач та кутів руху тіла по відношенню до горизонту показана на рис. 1–4 штриховими лініями. Видно, що для фіксованої безрозмірної початкової глибини безрозмірні оптимальні числа кавітації зменшуються при збільшенні кута γ від -90° до $+90^\circ$. Слід також відзначити подібний характер залежностей $\bar{\sigma}^*(\bar{h}_1)$ для різних ізопериметричних задач.

Для додатніх значень кута γ (рух тіла догори) розв'язки рівнянь (29)–(32) існують не для всіх \bar{h}_1 , а лише для значень, більших певного критичного, див. рис. 1–4. Ці критичні значення залежать лише від кута γ (для задач 2–4 існує ще слабка залежність від величини $\ln \sigma_0$). Досягнення критичного значення початкової глибини свідчить, що тіло виходить з води в режимі суперкавітації (без замивання). Тому дальність для руху догори з початковими глибинами, меншими критичного значення, практично задається простим геометричним співвідношенням

$$S = \frac{h_0}{\sin \gamma}.$$

Цим фактом пояснюється також дещо особливий характер кривих, що відповідають горизонтальному руху ($\gamma = 0$). Значно більші значення дальності обумовлені неможливістю досягнення поверхні води в цьому випадку.

Зупинимося докладніше на визначенні критичних значень безрозмірної початкової глибини для різних ізопериметричних задач. З рівнянь (23)–(26) видно, що для руху тіла догори ($\gamma > 0$) вирази у квадратних дужках у лівих частинах цих рівнянь можуть прямувати до нуля, що призводить до нескінченних значень похідної \bar{S} , тобто нескінченно великому зростанню дальності при

нескінченно малому зростанні величини \bar{U} . Критичні значення безрозмірної початкової глибини можна знайти шляхом занулення виразів у квадратних дужках рівнянь (23)–(26). Тоді для задач 1 (або 5) та 2:

$$\bar{h}_1 = 2\bar{S} \sin \gamma, \quad \bar{h}_1 = 3\bar{S} \sin \gamma, \quad (42)$$

а для задач 3 та 4:

$$\bar{h}_1 = \frac{7}{3}\bar{S} \sin \gamma, \quad \bar{h}_1 = \frac{5}{2}\bar{S} \sin \gamma. \quad (43)$$

Підстановка співвідношень (42), (43) в (29)–(32) дозволяє визначити критичні значення безрозмірної початкової глибини $\bar{h}_1^{(cr)}$ для оптимальних тіл в різних ізопериметричних задачах:

1 або 5. Фіксовані маса та калібр тіла або фіксовані середня густина та довжина тіла –

$$\bar{h}_1^{(cr)} = \sqrt{\frac{8 \sin \gamma}{e\pi}}; \quad (44)$$

2. Фіксовані маса та довжина тіла –

$$\bar{h}_1^{(cr)} = -\frac{3}{2} \left[\frac{\ln \sigma_0 \sin \gamma}{e\pi} \right]^{1/3}; \quad (45)$$

3. Фіксовані маса та об'єм тіла або фіксовані середня густина та об'єм тіла –

$$\bar{h}_1^{(cr)} = -\frac{7(\sin \gamma)^{3/7} (\ln \sigma_0)^{1/7}}{4e^{3/7} 3^{2/7} \pi^{1/7}}; \quad (46)$$

4. Фіксовані середня густина та калібр тіла –

$$\bar{h}_1^{(cr)} = -\frac{5(\sin \gamma)^{0.4} (\ln \sigma_0)^{0.2}}{3^{1.4} 2^{0.2} e^{0.4}}. \quad (47)$$

Слід зауважити, що формула (44) відповідає отриманому в [6] співвідношенню. Значення $\bar{h}_1^{(cr)}$ для різних ізопериметричних задач та кутів $\gamma = 30^\circ$ та $\gamma = 90^\circ$ можна побачити на рис. 1–4. Існування критичних значень глибини доводять також розрахунки за допомогою комп'ютерної програми SCAV, розробленої в Інституті гідромеханіки НАН України (див. [10, 11]). З формул (44)–(47) випливає, що критичне значення початкової глибини наближається до нуля при прямуванні γ до нуля.

2. МАКСИМАЛЬНА ДАЛЬНІСТЬ ДЛЯ ТОНКИХ КАВІТАТОРІВ

Наведений в попередньому розділі аналіз свідчить, що оптимальні значення дальності та числа кавітації, а також критичні величини для початкової глибини не залежать від форми кавітато-

ра. Отримані формули не містять коефіцієнта опору тиску C_x і є інваріантними для всіх нетонких кавітаторів, для яких справедливі напівемпіричні залежності (8)–(11). Форма кавітатора має значення лише для визначення його оптимального радіуса. При цьому для більших значень C_x слід використовувати менші кавітатори і навпаки – більш тонкі кавітатори мають більші оптимальні розміри (див. рівняння (10), (11)).

У зв'язку з цим виникає питання про ефективність тонких кавітаторів, для яких замість залежностей (8)–(11) можна користуватись наведеними в [8, 9] результатами для форми тонкої каверни в першому наближенні та опору тиску тонкого кавітатора:

$$\frac{R^2}{R_n^2} = \frac{\sigma}{2 \ln \beta} \frac{x^2}{R_n^2} + 2\beta \frac{x}{R_n} + 1, \quad (48)$$

$$C_x \approx C_{x0} = -2\beta^2 [\ln(0, 5\beta) + 1], \quad (49)$$

де β – похідна від радіуса кавітатора в точці початку каверни $x = 0$ (для конічного кавітатора β дорівнює тангенсу напівкута при вершині θ).

Рівняння першого наближення (48) дозволяє визначити максимальний діаметр каверни

$$\frac{D^2}{R_n^2} = 4 \left(1 - \frac{2\beta^2 \ln \beta}{\sigma} \right), \quad (50)$$

а для добутку $C_x R_n^2$, що фігурує у формулі для дальності (6), отримати вираз

$$C_x R_n^2 = -\frac{D^2 \beta^2 [\ln(0, 5\beta) + 1] \sigma}{2(\sigma - 2\beta^2 \ln \beta)}. \quad (51)$$

Якщо обмежитись першою ізопериметричною задачею (фіксовані маса та калібр тіла) і порівняти (51) з виразом $C_x R_n^2 = 0, 25 D^2 \sigma$, що впливає з рівняння (10) для нетонких насадків, то можна дійти висновку, що ефективність тонких кавітаторів порівняно з диском або іншими нетонкими тілами залежить від величини функції

$$F(\beta, \sigma) = \frac{2\beta^2 \ln \beta - \sigma}{2\beta^2 [\ln(0, 5\beta) + 1]}. \quad (52)$$

Якщо значення цієї функції перевищують одиницю, то тонкі конуси забезпечують більшу дальність.

Обчислення функції (52), зроблені для нульового числа кавітації, дають значення в межах 1,15–1,34 для діапазона $0, 1 < \beta < 0, 3$. Для $\sigma > 0$ відповідні значення $F(\beta, \sigma)$ ще більші. Отже, прості оцінки, виконані з використанням рівняння першого наближення для форми каверни свідчать про ефективність тонких кавітаторів.

Для перевірки цього була проведена серія розрахунків у нелінійній постановці за описаною в [12] методикою. В табл. 1 наведені результати обчислень величини $D^2 \sigma / (4 C_x R_n^2)$ для різних значень напівкута θ при вершині конічних кавітаторів. Для товстих насадків відповідно до формули Гарабедяна (10) ця величина дорівнює одиниці.

Видно, що тонкі кавітатори можуть забезпечувати децю більшу дальність порівняно з товстими, але нелінійна теорія дає не такі оптимістичні оцінки ефективності тонких насадків, як рівняння першого наближення. Разом з тим можна зробити висновок, що тонкі кавітатори цілком конкурентоспроможні і можуть використовуватись для організації суперкавітаційного режиму обтікання. Оцінки показують, що подібне можна стверджувати не тільки в розглянутій задачі з фіксованими масою та калібром тіла, а для всіх ізопериметричних умов 1–5, якщо довжину та об'єм кавітатора вважати також корисними (разом з довжиною та об'ємом каверни).

Таблиця 1

σ	0,1	0,05	0,025	0,01
$\theta=15^\circ$	1,115	1,094	1,072	1,031
$\theta=10^\circ$	1,116	1,094	1,078	1,064
$\theta=5^\circ$	1,128	1,107	1,089	1,066
$\theta=3^\circ$	1,113	1,108	1,097	1,079

3. ДАЛЬНІСТЬ РУХУ ЗА ІНЕРЦІЄЮ ДЛЯ БЕЗВІДРИВНИХ ТІЛ

Виникає також питання про ефективність суперкавітаційного режиму порівняно зі стандартними гідродинамічними формами, що обтікаються без відриву примежового шару та кавітації. В статті [13] було показано, що для рівномірного руху суперкавітація може давати менші значення об'ємного коефіцієнта опору

$$C_V = \frac{2X}{\rho U^2 V_b^{2/3}} \quad (53)$$

лише для достатньо малих значень об'ємного числа Рейнольдса $Re_V = UV_b^{1/3} / \nu$ та числа кавітації.

Зробимо порівняння ефективності суперкавітаційного та безвідривного режиму обтікання для зазначених нестационарних ізопериметричних задач руху за інерцією. Для коректності потрібно оцінити дальність тіла, що рухається без відриву примежового шару, при зміні його швидкості від

фіксованої початкової U_0 до кінцевої швидкості замивання U , оптимальні значення якої задаються формулами (27), (28). За цими співвідношеннями величини U_0 та U відрізняються не дуже сильно. До того ж коефіцієнти опору слабо залежать від швидкості. Наприклад, в [14] отримані наступні формули для чисто ламінарного та чисто турбулентного випадків:

$$C_V = \frac{4.708}{\sqrt{\text{Re}_V}} = \frac{4.708}{\sqrt{\text{Re}_D}} \left(\frac{D_b^3}{V_b} \right)^{1/6} = \frac{4.708}{\sqrt{\text{Re}_L}} \left(\frac{L_b^3}{V_b} \right)^{1/6}, \quad (54)$$

$$C_V = \frac{0.073}{\text{Re}_V^{1/7}} \left(\frac{V_b}{L_b^3} \right)^{5/21} = \frac{0.073}{\text{Re}_D^{1/7}} \left(\frac{V_b}{L_b^3} \right)^{5/21} \left(\frac{D_b^3}{V_b} \right)^{1/21}. \quad (55)$$

Отже, достатньо порівняти коефіцієнти опору в момент замивання суперкавітуючого тіла. Більш ефективний режим повинен мати менші значення C_V . Це вже було зроблено в [14] з використанням оцінок (54), (55) та формули роботи [15] для об'ємного коефіцієнта опору товстих кавітаторів. Тому для ізопериметричних задач 3 (з фіксованим об'ємом тіла) суперкавітаційний режим може мати переваги лише при $\text{Re}_V < 10^7$, що для руху у воді в діапазоні швидкостей 500–1000 м/с відповідає дуже малим тілам з об'ємом від 10 до 1 см³. Для більших об'єктів безвідливний режим обтікання може бути цілком конкурентноспроможним.

Для першої ізопериметричної задачі з фіксованими масою та калібром тіла достатньо порівняти добуток $\pi C_x R_n^2$ (або приблизно рівну йому величину $0,25\pi D^2 \sigma$) з

$$C_D D_b^2 = C_V V_b^{2/3} = C_V D_b^2 \left(\frac{V_b}{D_b^3} \right)^{2/3}, \quad (56)$$

Оскільки для оптимального тіла $D = D_b$ та число кавітації в момент замивання з конструктивних міркувань практично не може бути меншим 0,01 (див. [14]), достатньо порівняти величину $C_V (V_b/D_b^3)^{2/3}$ з 0,00785. Оскільки величина V_b/D_b^3 пропорційна видовженню тіла, то оптимальні безвідливні тіла повинні мати мінімальне видовження як при ламінарному, так і при турбулентному обтіканні (див. формули (54)–(56)). Граничний випадок нульового видовження і опору відповідає диску, що обтікається в безвідливному режимі. Подібний результат попри його нефізичність варто

було очікувати, оскільки при безвідливному обтіканні залишається тільки опір тертя, що має мінімальне значення при мінімальній площі поверхні.

Без застосування методів активного управління примежовим шаром (відсмоктування, охолодження тощо) досягти безвідливного режиму обтікання можна лише на тілах особливої форми, зокрема такої, що забезпечує від'ємний градієнт тиску, наприклад, тіло U-1 з роботи [14]. Оцінимо для замкненого тіла U-1с, подібного до U-1 ($V_b/L_b^3 = 0,036$; $V_b/D_b^3 = 1,48$), критичне значення числа Рейнольдса $\text{Re}_D^{(cr)}$, вирахованого з використанням фіксованого міделя тіла, при якому опори (та дальності) однакові для обидвох режимів обтікання. Якщо обмежитись чисто ламінарним безвідливним примежовим шаром, то за допомогою (54) можна знайти $\text{Re}_D^{(cr)} = 5,3 \times 10^5$. Отримане значення відповідає саме ламінарному примежовому шару, тому застосування формули (54) є виправданим. Отже, в діапазоні швидкостей 100–1000 м/с суперкавітаційний режим обтікання варто використовувати лише для тіл з калібром, меншим від 5–0,5 мм. Для більших об'єктів безвідливний режим обтікання може бути цілком конкурентноспроможним.

Для другої ізопериметричної задачі з фіксованими масою та довжиною тіла достатньо порівняти добуток $\pi C_x R_n^2$ (або приблизно рівну йому величину $-0,25\pi L^2 \sigma^2 / \ln \sigma$, див. (9), (10)) з

$$C_L L_b^2 = C_V V_b^{2/3} = C_V L_b^2 \left(\frac{V_b}{L_b^3} \right)^{2/3}. \quad (57)$$

Оскільки для оптимального тіла $L = L_b$ та число кавітації в момент замивання практично не може бути меншим 0,01, то достатньо порівняти величину $C_V (V_b/L_b^3)^{2/3}$ з $1,7 \times 10^{-5}$. Оскільки величина V_b/L_b^3 обернено пропорційна квадрату видовження тіла, то оптимальні безвідливні тіла повинні мати максимальне видовження як при ламінарному, так і при турбулентному обтіканні (див. формули (54), (55), (57)). Якщо важати, що видовження практично не може перевищувати величину 20, і взяти для оцінок форму U-1с, афінно "сплюснуту" до цього видовження (відповідні значення радіуса множаться на коефіцієнт 0,172; а $V_b/L_b^3 = 0,0011$), то за допомогою співвідношень (55), (57) можна отримати $\text{Re}_L^{(cr)} = 4,8 \times 10^7$. Отже, в діапазоні швидкостей 500–1000 м/с для тіл з довжиною, меншою від 10–5 см, варто використовувати суперкавітаційний режим. Для більших об'єктів безвідливна схема обтікання може бути цілком конкурентноспроможною.

Для четвертої ізопериметричної задачі (фіксо-

вані середня густина та калібр тіла) потрібно порівняти величину $\pi C_x R_n^2/V$ (або приблизно рівне йому значення $1,5\sigma^{1,5}/(D\sqrt{-\ln\sigma})$, див. (8)–(11))

з

$$\frac{C_D D_b^2}{V_b} = C_V V_b^{-1/3} = \frac{C_V}{D_b} \left(\frac{D_b^3}{V_b} \right)^{1/3}. \quad (58)$$

Оскільки для оптимального тіла $D = D_b$ та число кавітації практично не може бути меншим 0,01, достатньо порівняти величину $C_V(D_b^3/V_b)^{1/3}$ з 0,0007. Оскільки величина V_b/D_b^3 пропорційна видовженню тіла, то оптимальні безвідривні тіла повинні мати максимальне видовження як при ламінарному, так і при турбулентному обтіканні (див. формули (54), (55), (58)).

Якщо як і раніше вважати, що видовження практично не може перевищувати величину 20, і взяти для оцінок форму U-1с, афінно "сплюснуту" до цього видовження, то за допомогою співвідношень (55), (58) можна отримати $Re_D^{(cr)} = 4,8 \times 10^6$. Отже, в діапазоні швидкостей 500–1000 м/с для тіл з калібром, меншим від 10–5 мм, варто використовувати суперкавітаційний режим обтікання. Для більших об'єктів безвідривні тіла можуть бути цілком конкурентноспроможними.

Децю інша ситуація властива п'ятій ізопериметричній задачі (фіксовані середня густина та довжина тіла), де потрібно порівняти величину $\pi C_x R_n^2/V$ (або приблизно рівне йому значення $1,5\sigma/L$, див. (8)–(11)) з

$$\frac{C_L L_b^2}{V_b} = C_V V_b^{-1/3} = \frac{C_V}{L_b} \left(\frac{L_b^3}{V_b} \right)^{1/3}. \quad (59)$$

Оскільки для оптимального тіла $L = L_b$ та число кавітації в момент замивання практично не може бути меншим 0,01, достатньо порівняти вираз $C_V(L_b^3/V_b)^{1/3}$ з 0,015. Оскільки величина V_b/L_b^3 обернено пропорційна квадрату видовження тіла, то оптимальні безвідривні тіла повинні мати мінімальне видовження як при ламінарному, так і при турбулентному обтіканні (див. формули (54), (55), (59)). Беручи для оцінок приклад замкненої форми U-1с, подібної до безвідривного тіла U-1, можна вирахувати критичне значення числа Рейнольдса $Re_L^{(cr)} = 1,8 \times 10^6$. Отже, в діапазоні швидкостей 100–1000 м/с суперкавітаційний режим варто використовувати лише для тіл з довжиною, меншою від 20–2 мм. Для більших об'єктів безвідривний режим обтікання може бути цілком конкурентноспроможним.

4. ОСОБЛИВОСТІ МАКСИМІЗАЦІЇ ДАЛЬНОСТІ ПРИ ВХОДІ ДО ВОДИ З АТМОСФЕРИ

Для входу тіла до води з атмосфери властиві складні нестационарні процеси на поверхні розділу середовищ та значні ударні навантаження на конструкцію, див., наприклад [16]. Після занурення у воду на деяку глибину опір тиску стабілізується і може вважатись сталим, (див., наприклад [16,17]). Тому формула (6) залишається справедливою, якщо початковою швидкістю U_0 вважати швидкість тіла після стабілізації опору.

Разом з тим форма каверни може бути суттєво нестационарною і навіть незамкненою. Для ілюстрації цього можна скористатись отриманим в [8] розв'язком задачі для вертикального занурення тонкого конічного кавітатора у воду зі сталими швидкістю та тиском у каверні:

$$\frac{R^2}{R_n^2} = \frac{\sigma(t)}{2 \ln \beta} \frac{x^2}{R_n^2} - \frac{1}{Fr_R^2 \ln \beta} \frac{x^3}{R_n^3} + 2\beta \frac{x}{R_n} + 1, \quad (60)$$

де число Фруда Fr_R визначається формулою $Fr_R = U/\sqrt{gR_n}$, а поточне число кавітації такою залежністю:

$$\sigma(t) = \frac{2(p_a - p_c)}{\rho U^2} + \frac{2gt}{U}, \quad (61)$$

де p_a – атмосферний тиск; відлік часу t починається у момент перетину донним зрізом кавітатора незбуреної горизонтальної поверхні води, в якості параметра тонкості системи каверна–кавітатор обране відношення максимального радіуса кавітатора до його довжини β .

Формула (60) свідчить, що квадрат радіуса нестационарної каверни є більшим від відповідного значення для квазістационарного випадку у невагомій рідині на величину $-x^3/(R_n^3 Fr_R^2 \ln \beta)$, а у вагомій – відповідно на $-2x^3/(3R_n^3 Fr_R^2 \ln \beta)$ (див. [8]). Якщо після занурення тіла каверна сполучається з атмосферою і тиск у ній дорівнює атмосферному, то відповідно до формули (61) в нульовий момент часу число кавітації дорівнює нулю і нехтувати зазначеними додками не можна навіть при дуже великих числах Фруда. Якщо тіло рухається з надзвуковою для повітря швидкістю, то ситуація може бути децю відмінною, оскільки тиск у каверні не встигатиме вирівнюватись до атмосферного значення. Зокрема, якщо він буде значно меншим від p_a , то можна користуватись оцінкою (7) і вважати форму каверни квазістационарною, якщо її довжина буде набагато меншою 20 м.

Формулу (60) можна також використовувати для оцінки часу так званого глибинного змикання каверни, коли на деякій глибині утворюється "горловина", мінімальній діаметр якої зменшується до нуля. Після моменту змикання відповідно до рівняння (60) форма каверни стає обмеженою. Але характерна картина з "горловиною" на поверхні каверни може виникати не завжди. Зупинимося коротко на цьому питанні. Глибинне змикання трапиться тоді, коли кубічний многочлен (60) матиме два дійсних рівних корені. Використовуючи властивості таких многочленів (див., наприклад, [18]) можна отримати рівняння для числа кавітації в момент глибинного змикання σ_c :

$$\sigma_c^3 - 2\sigma_c^2 \beta^2 \ln \beta + \frac{36\sigma_c \beta \ln \beta}{Fr_R^2} + \frac{54 \ln \beta}{Fr_R^4} - \frac{64\beta^3 \ln^2 \beta}{Fr_R^2} = 0. \quad (62)$$

Кубічне рівняння (62) можна роз'язувати чисельно або за допомогою наведених в [18] формул. Зокрема, для випадку дуже великих чисел Фруда з (62) можна отримати

$$\sigma_c = \frac{4\sqrt{-2\beta \ln \beta}}{Fr_R}, \quad (63)$$

а для відстані від донного зрізу насадка, на якій відбувається змикання з (60), (63) можна отримати

$$\frac{x_c}{R_n} = Fr_R \sqrt{-2\beta \ln \beta}. \quad (64)$$

Якщо віддаль Ut_c/R_n , яку пройшло тіло до моменту змикання t_c , буде більшою від x_c/R_n , то утвориться "горловина" і глибинне змикання відбудеться. Скориставшись залежністю (61), умову існування глибинного змикання можна записати у вигляді:

$$\frac{(\sigma_c - \alpha_1) Fr_R^2}{2} > \frac{x_c}{R_n}, \quad \alpha_1 = \frac{2(p_a - p_c)}{\rho U^2}. \quad (65)$$

З використанням рівнянь (63), (64) умова (65) дає:

$$2Fr_R \sqrt{-2\beta \ln \beta} - \alpha > Fr_R \sqrt{-2\beta \ln \beta}, \quad (66)$$

$$\alpha = \frac{(p_a - p_c)}{\rho g R_n}.$$

Нерівність (66) свідчить, що наявність глибинного змикання визначається значенням безрозмірного параметра α . Так, у разі однакових тисків у каверні та над поверхнею незбуреної рідини (характерних для невеликих, зокрема, дозвукових швидкостей руху тіл у газі) $\alpha = 0$, тому слід очікувати глибинного змикання. В разі більших, зокрема, надзвукових швидкостей у повітрі

$\alpha \neq 0$, тому глибинного змикання може не відбуватися. Для тонких конусів відповідно до (66) можна визначити критичне значення цього параметра: $\alpha^{(cr)} = Fr_R \sqrt{-2\beta \ln \beta}$.

Якщо скористатись рівняннями (61), (63) та умовою $p_c = p_a$, то для часу глибинного змикання можна отримати

$$t_c = \sqrt{-8\beta \ln \beta} \sqrt{\frac{R_n}{g}}. \quad (67)$$

Отже, рівняння (67) свідчить, що фізичний час глибинного змикання не залежить від швидкості руху, а лише від форми та радіуса кавітатора. Подібні висновки отримано також у статті [19] для дисків у результаті розрахунків з використанням принципу "незалежності" розширення і напівемпіричних співвідношень та для сферичних кавітаторів в експериментальному дослідженні [20].

Варто зауважити, що після глибинного змикання може виконуватись умова квазістаціонарності $\sigma Fr^2 \gg 1$, оскільки за співвідношенням (64) $\sigma_c Fr^2 = \sigma_c Fr_R^2 R_n / x_c = 4$. Коли ця умова стає справедливою, то можна користуватись формулами Гарабедяна (8)-(11) або відповідними співвідношеннями для тонких стаціонарних каверн за тонкими кавітаторами зі статей [8, 9]. Зокрема, якщо течія виходить на квазістаціонарний режим та коефіцієнт опору не залежить від часу, то справедливі всі висновки першого розділу щодо оптимального пройденого шляху та найкращої форми тіла, якщо під початковою швидкістю розуміти швидкість після проходження перших стадій занурення (для яких характерні великі значення опору).

Зокрема, можна користуватись рівняннями (29)-(32), якщо вважати, що

$$h_1 = 10 + h_0 - p_c, \quad (68)$$

де тиск в каверні p_c вимірюється в метрах водного стовпа. Тоді, якщо вважати, що в момент замивання цей тиск дорівнює атмосферному (відповідні свідчення про зміну тиску в каверні для дозвукових рухів у повітрі можна знайти в експериментальній роботі [17]), то з урахуванням того, що $\bar{h}_1 = 0$, формули (29)-(32) та (14), (16), (18), (20), (22) для різних ізопериметричних задач дають:

1. Фіксовані маса та калібр тіла –

$$\bar{S}^* \approx \frac{0,48}{\sqrt{-\sin \gamma}}, \quad S^* \approx \frac{0,48 U_0}{D} \sqrt{-\frac{m}{\rho g \sin \gamma}}; \quad (69)$$

2. Фіксовані маса та довжина тіла –

$$\bar{S}^* \approx \frac{0,65}{(-\sin \gamma)^{2/3}}, \quad (70)$$

$$S^* \approx \frac{0,65m^{1/3}U_0^{4/3}}{(-\sin \gamma)^{2/3}\rho^{1/3}L^{2/3}g^{2/3}};$$

3. Фіксовані маса та об'єм тіла або фіксовані середня густина та об'єм тіла –

$$\bar{S}^* \approx \frac{0,44}{(-\sin \gamma)^{4/7}}, \quad (71)$$

$$S^* \approx \frac{0,44m^{3/7}U_0^{8/7}}{(-\sin \gamma)^{4/7}\rho^{3/7}V^{2/7}g^{4/7}};$$

4. Фіксовані середня густина та калібр тіла–

$$\bar{S}^* \approx \frac{0,43}{(-\sin \gamma)^{3/5}}, \quad (72)$$

$$S^* \approx \frac{0,43D^{2/5}\rho_b^{-2/5}U_0^{6/5}}{(-\sin \gamma)^{3/5}g^{3/5}};$$

5. Фіксовані середня густина та довжина тіла –

$$\bar{S}^* \approx \frac{0,48}{\sqrt{-\sin \gamma}}, \quad S^* \approx \frac{0,48U_0}{\sqrt{-\sin \gamma}} \sqrt{\frac{\pi L \rho_b}{6g}}. \quad (73)$$

Для оцінок (70)–(72) використане значення $\sigma_0 = 0,01$. Безрозмірне оптимальне число кавітації відповідно до співвідношення (36) отримується множенням правих частин перших формул (69)–(73) на величину $-\sin \gamma$, тому розрахунок оптимальних форм тіл у цьому випадку не складає жодних проблем.

Формули (69)–(73) свідчать, що дальність збільшується при зростанні кута руху тіла від -90° (вертикальне занурення) до 0° (вхід до води близький до горизонтального). Нескінченно великі значення дальності для горизонтального руху насправді обмежені з міркувань міцності конструкції і будуть обговорені в наступному розділі. З формул (69)–(73) також випливає, що максимальне заглиблення тіла для всіх ізопериметричних задач досягається при рухові вертикально вниз.

З других рівнянь (69)–(73) видно, що фізична (розмірна) максимальна дальність зростає при збільшенні швидкості занурення (для першої та п'ятої задачі ця залежність лінійна (див. (69), (73)) для інших – нелінійна (див. (70)–(72)). Для перших трьох задач з фіксованою масою фізична максимальна дальність зростає при зменшенні калібру, довжини або об'єму тіла відповідно (див. (69)–(71)). В задачах з фіксованою середньою густиною розмірна максимальна дальність зростає

при збільшенні об'єму, калібру та довжини тіла відповідно (див. (71)–(73)).

Якщо p_c не дорівнює атмосферному, то слід користуватись рівняннями (29)–(32) або графіками 1–4. Цікаво відзначити, що ці рівняння допускають також від'ємні значення параметра h_1 , що відповідає тискові в каверні, більшому від атмосферного. Оскільки максимальна дальність зростає при зменшенні h_1 (див рис. 1–4), то при збільшенні тиску в каверні на останніх стадіях суперкавітаційного руху тіла перед замиванням (наприклад, за рахунок піддуву газу) можна значно збільшити дальність.

5. ОБМЕЖЕННЯ ДАЛЬНОСТІ, ПОВ'ЯЗАНІ З ВИДОВЖЕННЯМ СУПЕРКАВІТУЮЧОГО ТІЛА

Дуже великі значення дальності, що випливають з формул (69)–(73) при малих кутах γ , легко пояснити і усунути, якщо взяти до уваги, що безрозмірні та фізичні оптимальні числа кавітації в цьому випадку прямують до нуля. Як вже не раз зауважувалось, з міркувань міцності конструкції тіла його видовження практично не може перевищувати значення 20, а кінцеве число кавітації, при якому відбувається замивання тіла потоком води та його зупинка, не може бути меншим від 0,01. Даний факт дозволяє оцінити максимально можливі значення дальності \bar{S}^{**} та відповідні фізичні (розмірні) величини S^{**} .

Беручи до уваги формули (29)–(32), а також (36)–(41) та (14), (16), (18), (20), (22) для ізопериметричних задач 1–5 можна отримати:

1. Фіксовані маса та калібр тіла –

$$\bar{S}^{**} \approx \frac{127}{DU_0} \sqrt{\frac{gm}{\rho}}, \quad S^{**} \approx \frac{127m}{\rho D^2}; \quad (74)$$

2. Фіксовані маса та довжина тіла –

$$\bar{S}^{**} \approx \frac{29318g^{2/3}m^{2/3}}{\rho^{2/3}L^{4/3}U_0^{4/3}}, \quad S^{**} \approx \frac{29318m}{\rho L^2}; \quad (75)$$

3. Фіксовані маса та об'єм тіла або фіксовані середня густина та об'єм тіла –

$$\bar{S}^{**} \approx -\frac{479m^{4/7}g^{4/7}}{\rho^{4/7}V^{8/21}U_0^{8/7}}, \quad S^{**} \approx \frac{479m}{\rho V^{2/3}}; \quad (76)$$

4. Фіксовані середня густина та калібр тіла–

$$\bar{S}^{**} \approx \frac{954D^{0,6}\bar{\rho}_b^{0,6}g^{0,6}}{U_0^{1,2}}, \quad S^{**} \approx 954D\bar{\rho}_b; \quad (77)$$

5. Фіксовані середня густина та довжина тіла –

$$\bar{S}^{**} \approx \frac{92,1\sqrt{gL\bar{\rho}_b}}{U_0}, \quad S^{**} \approx 66,7L\bar{\rho}_b. \quad (78)$$

Отже, співвідношення (74)–(78) обмежують значення максимальної дальності. Навіть з використанням піддуву газу в каверну перевищити зазначені величини неможливо. Варто зауважити, що максимально можлива дальність не залежить від кута руху γ , а її фізичні значення не залежать від початкової швидкості. Для висхідного руху ($\gamma > 0$) слід враховувати зазначені в Розділі 1.2 обмеження дальності, пов'язані з критичними початковими глибинами.

Дальність можна збільшити шляхом застосування кавітаторів змінної форми або розмірів. Приклад розрахунку приросту дальності за рахунок використання меншого за розмірами або меншого за коефіцієнтом опору кавітатора на першій стадії руху (коли число кавітації ще достатньо мале) наведений в [6].

Іншим засобом збільшення дальності є використання двигунів. Оцінимо можливий приріст дальності за рахунок двигуна з фіксованою тягою T для оптимальних тіл, розрахованих за неведеною вище методикою. Для цього скористаємось формулою роботи [2]

$$T = Q \frac{\Delta m}{\tau}, \quad (79)$$

де Q – питомий імпульс палива; Δm – його маса; τ – час роботи двигуна. Припустимо також, що з двигуном тіло рухається рівномірно, тобто тяга урівноважує опір. Тоді з формул (2), (79) можна отримати

$$\tau = \frac{2Q\Delta m}{\pi\rho U^2 C_x R_n^2}, \quad (80)$$

а для приросту шляху за час роботи двигуна з (80) випливає

$$\Delta S = U\tau = \frac{2Q\Delta m}{\pi\rho U C_x R_n^2}. \quad (81)$$

Формула (81) свідчить, що дальність рівномірного руху з двигуном обернено пропорційна до швидкості. Тому двигун слід вмикати на останній фазі руху за інерцією, безпосередньо перед моментом замивання. Це збільшує не тільки шлях ΔS ,

але і дозволяє уникнути втрат дальності на ділянці руху за інерцією через зменшення маси тіла внаслідок вигорання палива.

Оцінимо можливі значення приросту дальності для тіла з двигуном. Розглянемо для прикладу рух оптимального тіла з масою 4 кг та калібром 50 мм. Відповідно до формули (74) таке тіло може пройти за інерцією не більше ніж 203 м. Якщо це тіло занурюється до води вертикально вниз та тиск у каверні дорівнює атмосферному, то за другою формулою (69) початкова швидкість такого тіла становить 1047 м/с, а за першим співвідношенням (27) кінцева швидкість дорівнює 635 м/с.

Якщо це оптимальне тіло має ще двигун та запас палива 1 кг з питомим імпульсом 4000 м/с, то формула (81) з врахуванням $\pi C_x R_n^2 = 0,25\pi D^2 \sigma = 0,0025\pi D^2$ дає $\Delta S = 642$ м. Отже, ця віддаль більше, ніж у три рази перевищує шлях, який тіло пододало за інерцією. Правда, для даного рівномірного руху вертикально вниз потрібно підтримувати число кавітації 0,01, що потребує дуже значного підвищення тиску в каверні.

Цікаво оцінити дальність цього ж тіла з двигуном, що рухається рівномірно на швидкості 150 м/с (що дозволяє підтримувати число кавітації 0,01 без піддуву газу при горизонтальному суперкавітаційному рухові на невеликій глибині). З використанням формули (81) отримуємо $\Delta S = 2716$ м. Значне зростання дальності пояснюється меншою швидкістю руху.

Оцінимо також дальність того ж тіла з двигуном, що рухається рівномірно з тією самою швидкістю 150 м/с без відриву примезового шару і кавітації. З використанням формул (55), (56), (81) можна отримати $\Delta S = 5333$ м. Цікаво відзначити, що дальність можна суттєво збільшити, якщо використовувати тіла меншого видовження, подібні до безвідривної форми U-1с. Отже, безвідривний режим обтікання на таких швидкостях має переваги навіть для відносно невеликих тіл.

6. ЗБІЛЬШЕННЯ ДАЛЬНОСТІ ДЛЯ МАЛИХ СТАЛИХ ШВИДКОСТЕЙ РУХУ

Наведений приклад та формула (81) свідчать, що в тих випадках, коли великі швидкості руху не потрібні, можна знехтувати відстанню, що його пройшло тіло за інерцією, і вважати, що вся дальність описується рівнянням (81). Оскільки це співвідношення не містить маси тіла, доцільно розглянути три ізопериметричні задачі, в яких поряд зі швидкістю фіксовані калібр або довжина або об'єм тіла. Повторюючи наведені в [7] прості міркуван-

ня, можна дійти висновку, що оптимальна форма суперкавітуючого тіла повинна бути вписана у форму каверни, і калібр, довжина та об'єм тіла повинні збігатись відповідно з калібром, довжиною та об'ємом каверни. Для трьох згаданих ізопериметричних задач з врахуванням формул (8)–(11) та (81) отримуємо відповідно:

$$\Delta S = \frac{8Q\Delta m}{\pi\rho UD^2\sigma}, \quad (82)$$

$$\Delta S = -\frac{8Q\Delta m \ln \sigma}{\pi\rho UL^2\sigma^2}, \quad (83)$$

$$\Delta S = \frac{8Q\Delta m(-\ln \sigma)^{1/3}}{\pi^{1/3}6^{2/3}\rho UV^{2/3}\sigma^{4/3}}. \quad (84)$$

Формули (82)–(84) свідчать, що максимальна дальність досягається при найменшому числі кавітації. Беручи, як і раніше, в якості мінімального значення $\sigma = 0,01$, отримуємо формули для максимальних дальностей в зазначених трьох ізопериметричних задачах:

$$\Delta S^* \approx \frac{255Q\Delta m}{\rho UD^2}, \quad (85)$$

$$\Delta S^* \approx \frac{1,17 \cdot 10^5 Q\Delta m}{\rho UL^2}, \quad (86)$$

$$\Delta S^* \approx \frac{1277Q\Delta m}{\rho UV^{2/3}}. \quad (87)$$

Для описаного в попередньому розділі тіла з двигуном, швидкістю 10 м/с та калібром 50 мм (воно буде оптимальним для першої ізопериметричної задачі, якщо буде вписаним в каверну при $\sigma = 0,01$) з формули (85) отримуємо $\Delta S^* \approx 40,8$ км. Отже, за рахунок зменшення швидкості можна суттєво збільшити дальність. Але досягти цього можна лише з використанням піддуву газу в каверну для забезпечення $\sigma = 0.01$.

Цікаво відзначити, що для зазначеного тіла з цією та меншими швидкостями доцільно використовувати саме суперкавітаційний режим обтікання, оскільки відповідне число Рейнольдса буде меншим від розрахованого у розділі 3 критичного значення $Re_D^{(cr)}$. Наведені в цьому розділі критичні значення числа Рейнольдса для ізопериметричних задач 1–3 з фіксованою масою можна використовувати для оцінок ефективності рівномірного суперкавітаційного руху зі сталою тягою.

Формули (82)–(87) отримані для випадку фіксованої маси палива. Якщо вважати, що паливо з фіксованою щільністю ρ_p може займати тільки певну фіксовану частину об'єму тіла K_p (див. [21]),

то оптимальне суперкавітуюче тіло повинно мати форму, максимально наближену до форми каверни, а рівняння (82)–(84) можна записати у вигляді

$$\Delta S = \frac{4Q\rho_p K_p D \sqrt{-\ln \sigma}}{3\rho U \sigma^{1,5}}, \quad (88)$$

$$\Delta S = \frac{4Q\rho_p K_p L}{3\rho U \sigma}, \quad (89)$$

$$\Delta S = \frac{46^{1/3} Q\rho_p K_p V^{1/3}}{3\pi^{1/3} \rho U \sigma^{4/3}}. \quad (90)$$

Співвідношення (89) збігається з відповідним рівнянням роботи [21]. З формул (89)–(91) випливає, що для всіх ізопериметричних задач (з фіксованими калібром, довжиною або об'ємом) максимальна дальність досягається при найменшому числі кавітації. Беручи, як і раніше, в якості мінімального значення $\sigma = 0,01$, отримуємо формули для максимальних дальностей в зазначених трьох ізопериметричних задачах

$$\Delta S^* \approx \frac{2861Q\rho_p K_p D}{\rho U}, \quad \Delta S^* \approx \frac{133Q\rho_p K_p L}{\rho U},$$

$$\Delta S^* \approx \frac{769Q\rho_p K_p V^{1/3}}{\rho U}.$$

ВИСНОВКИ

Розглянуті задачі максимізації відстані, пройденої осесиметричним суперкавітуючим тілом за інерцією під довільним кутом до горизонту. Отримані аналітичні співвідношення дозволяють легко оцінити гранично можливу дальність та знайти оптимальні форму тіла та радіус кавітатора для різних ізопериметричних умов з фіксованими початковими швидкістю та глибиною, в тому числі і для входу до води з атмосфери.

Показано, що у випадку висхідного суперкавітаційного руху можливе різке збільшення дальності та вихід тіла на поверхню при нескінченно малому перевищенні деякого критичного значення початкової швидкості. Розраховані відповідні значення критичних чисел Фруда.

Показано, що тонкі кавітатори є цілком конкурентноспроможними порівняно з дисками та іншими товстими кавітаторами. Оцінки максимальної дальності для осесиметричних тіл, що забезпечують обтікання без відриву примезового шару та кавітації, показали, що при достатньо великих числах Рейнольдса такі тіла мають переваги.

Для збільшення дальності на малих швидкостях доцільно використовувати рівномірний суперкавітаційний рух. Наведені аналітичні формули дозволяють легко оцінити максимальну дальність для задач з фіксованими калібром, довжиною та об'ємом.

1. *Garabedian P.R.* Calculation of axially symmetric cavities and jets // *Pac. J. Math.*– 1956.– Vol. 6, No. 4.– P. 611-684.
2. *Путилин С. И.* Некоторые особенности динамики суперкавитирующих моделей // *Прикладна гідромеханіка.*– 2000.– Т. 2 (74), N 3.– С. 65-74.
3. *Gieseke T.J.* Toward an optimal weapon system utilizing supercavitating projectiles. Int. Conference on Cavitation "Cav2001", 2001. Pasadena, USA.
4. *Serebryakov V.V.* The models of the supercavitation prediction for high speed motion in water. Int. Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics". 2002, Cheboksary, Russia.– С.71-92.
5. *Нестерук І. Г., Семенов В.М.* Задачі оптимізації для суперкавітаційного руху осесиметричних тіл за інерцією // *Прикладна гідромеханіка.*– 2006.– Т. 8 (80), N 1.– С. 51-59.
6. *Нестерук І. Г., Савченко Ю.М., Семенов В.М.* Оптимізація дальності для суперкавітаційного руху за інерцією // *Доповіді НАН України.*– 2006.– N 8.– С. 57-66.
7. *Нестерук І. Г., Семенов В.М.* Задачі оптимізації дальності суперкавітаційного руху за інерцією з фіксованою кінцевою глибиною // *Прикладна гідромеханіка.*– 2006.– Т. 8 (80), N 4.– С. 33-42.
8. *Нестерук И.Г.* О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны // *Изв. АН СССР, МЖГ.*– 1980.– N 4.– С. 38-47.
9. *Нестерук И.Г.* Некоторые задачи осесимметричных кавитационных течений // *Изв. АН СССР, МЖГ.*– 1982.– N 1.– С. 28-34.
10. *Savchenko Yu.N., Semenenko V.N., Putilin S.I. and others.* Designing the high-speed supercavitating vehicles. Int. Conf. on Fast Sea Transportation "FAST'2005", June 2005. St. Petersburg, Russia.
11. *Семенов В.Н.* Компьютерное моделирование динамики суперкавитирующих тел // *Прикладна гідромеханіка.*– 2000.– Т. 2(77), N 1.– С. 64-69.
12. *Нестерук І. Г.* Моделирование осесимметричных плоских вільних поверхонь за допомогою джерел та стоків // *Прикладна гідромеханіка.*– 2003.– Т. 5 (77), N 2.– С. 37-44.
13. *Нестерук І. Г.* Часткова кавітація на видовжених тілах // *Прикладна гідромеханіка.*–2004.– Т. 6 (78), N 3.– С. 64-75.
14. *Nesteruk I.* The Problems of Drag Reduction in High Speed Hydrodynamics // International Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics".– June 16-23, 2002.– Cheboksary, Russia.– P. 351- 359.
15. *Нестерук І. Г.* Розрахунок опору тонких конусів з використанням другого наближення для форми утворених ними каверн // *Прикладна гідромеханіка.*– 2003.– Т. 5 (77), N 1.– С. 42-46.
16. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами.– Киев: Наукова думка, 1969.– 208 с.
17. *Abelson H. I.* Pressure measurements in water-entry cavity // *J. Fluid Mech.*– 1970.– vol.44, part 1.– P. 129-144.
18. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М.: Наука, 1974.– 832 с.
19. *Журавлев Ю. Ф.* Методы возмущений в пространственных струйных течениях // *Труды ЦАГИ.*– 1973.– Вып. 1532.– С. 3-24.
20. *Gilbarg D., Anderson R. A.* Influence of Atmospheric Pressure on the Phenomena Accompanying the Entry of Spheres into Water // *J. Appl. Phys.*– 1948.– vol.19.– С. 127-138.
21. *Савченко Ю. Н.* Исследования суперкавитационных течений // *Прикладна гідромеханіка.*– 2007.– Т. 9 (81), N 2-3.– С. 150-158.