

## Энергетический вариант теории ползучести материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию

Л. А. Золочевская<sup>а</sup>, А. Н. Склепус<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Харьковский государственный университет, Харьков, Украина

<sup>б</sup> Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, Украина

*Предложен энергетический вариант теории ползучести начально изотропных материалов, содержащих плоские параллельные микротрещины. Получены определяющие уравнения ползучести и кинетическое уравнение накопления поврежденности. Рассмотрены базовые эксперименты по определению параметров материала согласно описанной теории. Теоретические данные сопоставлены с экспериментальными для легкого сплава, разносопротивляющегося растяжению и сжатию.*

Процесс разрушения материалов машиностроительных конструкций в условиях повышенных температур является достаточно сложным и состоит из нескольких стадий. Первая стадия – рассеянное накопление повреждений (микродефектов) типа микротрещин или пор с течением времени. Очевидно, что процессы ползучести и повреждаемости – сопутствующие и влияющие друг на друга. При росте дефектов в материале возникает деформационная анизотропия характеристик ползучести, что приводит к изменению типа симметрии материала. Даже начально изотропные материалы приобретают анизотропию свойств вследствие роста их поврежденности при ползучести. Рост дефектов в материале носит направленный характер, зависящий от вида нагружения. В случае одноосного растяжения наблюдается развитие микротрещин, ориентированных перпендикулярно растягивающему усилию, в то время как при одноосном сжатии – закрытие нормальных к направлению сжатия микротрещин и их рост в направлении сжимающего усилия.

В работе изложен энергетический вариант теории ползучести начально изотропных материалов с дефектами типа плоских микротрещин одинаковой ориентации. Выбор указанной системы дефектов обусловлен тем, что, как правило, информация о действительном распределении дефектов в материале отсутствует. В связи с этим основная задача заключалась в построении феноменологической теории, описывающей основные особенности ползучести исследуемого поврежденного материала. Характерная особенность ползучести повреждающихся сред – их неодинаковая сопротивляемость растяжению и сжатию [1, 2].

Рассмотрим начально изотропный материал, содержащий семейство плоских параллельных микротрещин. Пусть вектор  $\vec{n}$  определяет ориентацию этих микротрещин. Примем существование потенциала ползучести

$$F = \sigma_e^2 \quad (1)$$

и ассоциированный закон

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}, \quad (2)$$

где  $\sigma_e$  – так называемое эквивалентное напряжение, устанавливающее эквивалентность одноосного и сложного напряженного состояния;  $\dot{\varepsilon}_{kl}$  – компоненты тензора деформаций ползучести; точка над символом обозначает производную по времени  $t$ ;  $\sigma_{kl}$  – компоненты тензора напряжений;  $\lambda$  – скалярный множитель, подлежащий определению.

Пусть анизотропия, обусловленная поврежденностью при ползучести, определяется симметричным тензором  $\Omega_{kl} = n_k n_l$ . Тогда эквивалентное напряжение должно быть функцией тензора напряжений и тензора  $\Omega_{kl}$ :

$$\sigma_e = \sigma_e(\sigma_{kl}, \Omega_{kl}). \quad (3)$$

Система базовых инвариантов двух рассматриваемых выше тензоров включает:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{kl} \delta_{kl}; \\ I_2 = \sigma_{kl} \sigma_{kl}; \\ I_3 = \sigma_{kl} \sigma_{lm} \sigma_{mk}; \\ I_4 = n_k \sigma_{kl} n_l; \\ I_5 = n_k \sigma_{kl} \sigma_{lm} n_m, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера. Пренебрегая влиянием третьего инварианта тензора напряжений, используем квадратичную

$$\sigma_2^2 = AI_1^2 + BI_2 \quad (5)$$

и кубическую

$$\sigma_3^3 = CI_4 I_5 \quad (6)$$

скалярные функции инвариантов, где  $A, B, C$  – параметры материала.

Введем эквивалентное напряжение в виде

$$\sigma_e = \sigma_2 + \alpha \sigma_3, \quad (7)$$

где  $\alpha$  – некоторый числовой коэффициент, учитывающий удельный вес кубической функции в представлении (7).

Выполняя дифференцирование согласно формуле (2) с использованием зависимостей (1), (4)–(7), получаем уравнение

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = 2\lambda \sigma_e \left[ \frac{AI_1 \delta_{kl} + B\sigma_{kl}}{\sigma_2} + \alpha C \frac{I_4(n_k \sigma_{lm} n_m + n_m \sigma_{mk} n_l) + I_5 n_k n_l}{3\sigma_3^2} \right]. \quad (8)$$

Теперь перейдем к определению скалярного множителя  $\lambda$ . Для этого введем по определению эквивалентную скорость  $\dot{\varepsilon}_e$  деформации ползучести как величину, которая, будучи умноженной на эквивалентное напряжение, равняется удельной мощности рассеяния:

$$W = \sigma_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (9)$$

т.е.

$$\sigma_e \dot{\varepsilon}_e = W. \quad (10)$$

Умножив левую и правую части уравнения (8) на  $\sigma_{kl}$  с последующим суммированием по повторяющимся индексам, приходим к равенству

$$W = 2\lambda\sigma_e^2. \quad (11)$$

В результате сравнения формул (10) и (11) получаем

$$2\lambda\sigma_e = \dot{\varepsilon}_e. \quad (12)$$

Уравнение ползучести (8) преобразуется к виду

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_e \left[ \frac{AI_1 \delta_{kl} + B\sigma_{kl}}{\sigma_2} + \alpha C \frac{I_4(n_k \sigma_{lm} n_m + n_m \sigma_{mk} n_l) + I_5 n_k n_l}{3\sigma_3^2} \right]. \quad (13)$$

Опишем процесс поврежденности материала при ползучести. За меру поврежденности примем величину удельной энергии рассеяния  $\omega = \int W dt$ ,  $\omega \in [0, \omega^*]$ . Тогда

$$\dot{\omega} = W. \quad (14)$$

В начальный момент времени  $\omega = 0$ , в момент разрушения  $\omega = \omega^*$ . Таким образом, процессы ползучести и, как следствие, поврежденности определяются уравнениями (13), (14). Для использования зависимостей (13), (14) необходимо задать эквивалентную скорость  $\dot{\varepsilon}_e$  деформации ползучести, обобщая результаты базовых экспериментов на случай сложного напряженного состояния. Так, для неупрочняющихся материалов можно принять зависимость

$$\dot{\varepsilon}_e = \nu(\sigma_e) \left( 1 - \frac{\omega}{\omega^*} \right)^{-m}. \quad (15)$$

Функция  $\nu(\sigma_e)$  может быть задана как степенная зависимость

$$\nu(\sigma_e) = \sigma_e^k. \quad (16)$$

Между предложенным параметром поврежденности и параметром поврежденности Работнова  $\varphi \in [0, 1]$  [3] существует следующая связь:

$$\varphi = \frac{\omega}{\omega_*}. \quad (17)$$

Следовательно, зависимость (15) является обобщением предложения Работнова [3] на случай повреждающихся сред, разносопротивляющихся растяжению и сжатию.

Таким образом, уравнения (10), (13)–(16) описывают процессы ползучести и поврежденности рассматриваемых начально изотропных материалов.

Перейдем к нахождению трех параметров материала, входящих в выражение для эквивалентного напряжения, которое определяется соотношениями (4)–(7). Для этого рассмотрим серию базовых экспериментов на одноосное растяжение, одноосное сжатие и чистое кручение образцов из исследуемого материала.

Пусть в случае одноосного растяжения ( $\sigma_{11} > 0$ ) получаем зависимости

$$\dot{\varepsilon}_{11} = K_+ \sigma_{11}^k \left(1 - \frac{\omega}{\omega_*}\right)^{-m}; \quad \dot{\omega} = \sigma_{11} \dot{\varepsilon}_{11}, \quad (18)$$

при одноосном сжатии ( $\sigma_{11} < 0$ ) –

$$\dot{\varepsilon}_{11} = -K_- |\sigma_{11}|^k \left(1 - \frac{\omega}{\omega_*}\right)^{-m}; \quad \dot{\omega} = \sigma_{11} \dot{\varepsilon}_{11}, \quad (19)$$

при чистом кручении ( $\sigma_{12} \neq 0$ ) –

$$2\dot{\varepsilon}_{12} = K_0 \sigma_{12}^k \left(1 - \frac{\omega}{\omega_*}\right)^{-m}, \quad \dot{\omega} = 2\sigma_{12} \dot{\varepsilon}_{12}, \quad (20)$$

где  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_0$ ,  $k$  и  $m$  – некоторые константы материала.

Теперь можно воспользоваться полученными ранее уравнениями (13), (14) вместе с соотношениями (4)–(7), (10), (15), (16). Предположим, что ориентация микротрещин в материале всегда соответствует направлению наибольшего главного напряжения, и запишем зависимости (13), (14) для рассмотренных выше базовых экспериментов.

В случае одноосного растяжения микротрещины перпендикулярны растягивающему усилию, поэтому  $\vec{n} = [1, 0, 0]^T$ . Тогда уравнения (13), (14) имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_{11} = (\sqrt{A+B} + \alpha \sqrt[3]{C})^{k+1} \sigma_{11}^k \left(1 - \frac{\omega}{\omega_*}\right)^{-m}, \quad \dot{\omega} = \sigma_{11} \dot{\varepsilon}_{11}. \quad (21)$$

При одноосном сжатии микротрещины ориентированы в направлении сжимающего усилия, поэтому  $\vec{n} = [0, 1, 0]^T$ , и зависимости (13), (14) записываются так:

$$\dot{\varepsilon}_{11} = -(\sqrt{A+B})^{k+1} |\sigma_{11}|^k \left(1 - \frac{\omega}{\omega_*}\right)^{-m}, \quad \dot{\omega} = \sigma_{11} \dot{\varepsilon}_{11}. \quad (22)$$

Ориентация микротрещин в случае чистого кручения определяется вектором  $\vec{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^T$ . При этом уравнения (13), (14) принимают следующий вид:

$$2\dot{\varepsilon}_{12} = (\sqrt{2B} + \alpha \sqrt[3]{C})^{k+1} \sigma_{12}^k \left(1 - \frac{\omega}{\omega_*}\right)^{-m}, \quad \dot{\omega} = 2\sigma_{12} \dot{\varepsilon}_{12}. \quad (23)$$

Сравнивая попарно зависимости (18) и (21), (19) и (22), (20) и (23), легко найти параметры материала:

$$\begin{cases} \alpha \sqrt[3]{C} = K_+^{1/(k+1)} - K_-^{1/(k+1)}, \\ B = \frac{1}{2} (K_0^{1/(k+1)} - \alpha \sqrt[3]{C})^2; \\ A = K_-^{2/(k+1)} - B. \end{cases} \quad (24)$$

Определяющие уравнения ползучести (13) записываются в достаточно общем виде и включают в себя как частный случай ряд физических зависимостей.

1. Пусть константы материала, определенные по данным базовых экспериментов, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$K_- = K_+, \quad K_0 = 3^{(k+1)/2} K_+. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), получаем

$$B = \frac{3}{2} K_+^{2/(k+1)}, \quad \alpha = 0 \quad \text{и} \quad A = -\frac{1}{3} B. \quad (26)$$

С учетом (26) получаем выражение для эквивалентного напряжения на основе интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}} = \sqrt{\frac{3}{2} I_2 - \frac{1}{2} I_1^2},$$

где  $S_{kl}$  – компоненты девиатора напряжений,  $S_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{kl}$ , т.е.

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{2}{3}} B \sigma_i, \quad (27)$$

и определяющие уравнения ползучести

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{3}{2} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} B \right)^{k+1} \sigma_i^{k-1} \left( 1 - \frac{\omega}{\omega^*} \right)^{-m} S_{kl} \quad (28)$$

для традиционных повреждающихся изотропных материалов, нечувствительных к виду нагружения. При этом равенства (25) обеспечивают условия для использования зависимостей (28).

2. Предположим, что согласно данным базовых экспериментов

$$K_- = K_+, \quad K_0 \neq 3^{(k+1)/2} K_+. \quad (29)$$

С учетом (29) в (24) получаем  $\alpha = 0$ . Поэтому из (7) следует  $\sigma_e = \sigma_2$ . Тогда определяющее уравнение (13) записывается так:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \sigma_e^k \left( 1 - \frac{\omega}{\omega^*} \right)^{-m} \left( \frac{A I_1 \delta_{kl} + B \sigma_{kl}}{\sigma_2} \right). \quad (30)$$

Следовательно, для описания ползучести рассматриваемых повреждающихся материалов на основе (30) необходимо использовать характеристики материала при растяжении и кручении.

3. Пусть константы материала удовлетворяют соотношениям

$$K_+ \neq K_-, \quad K_0 = [(\sqrt{3} - 1) K_-^{1/(k+1)} + K_+^{1/(k+1)}]^{k+1}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (24), получаем следующие равенства:

$$B = \frac{3}{2} K_-^{2/(k+1)}, \quad A = -\frac{1}{3} B, \quad \alpha \sqrt[3]{C} = K_+^{1/(k+1)} - K_-^{1/(k+1)}. \quad (32)$$

Учитывая последние в соотношениях (5)–(7), приходим к выражению для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{2}{3}} B \sigma_i + \alpha \sqrt[3]{C I_4 I_5}. \quad (33)$$

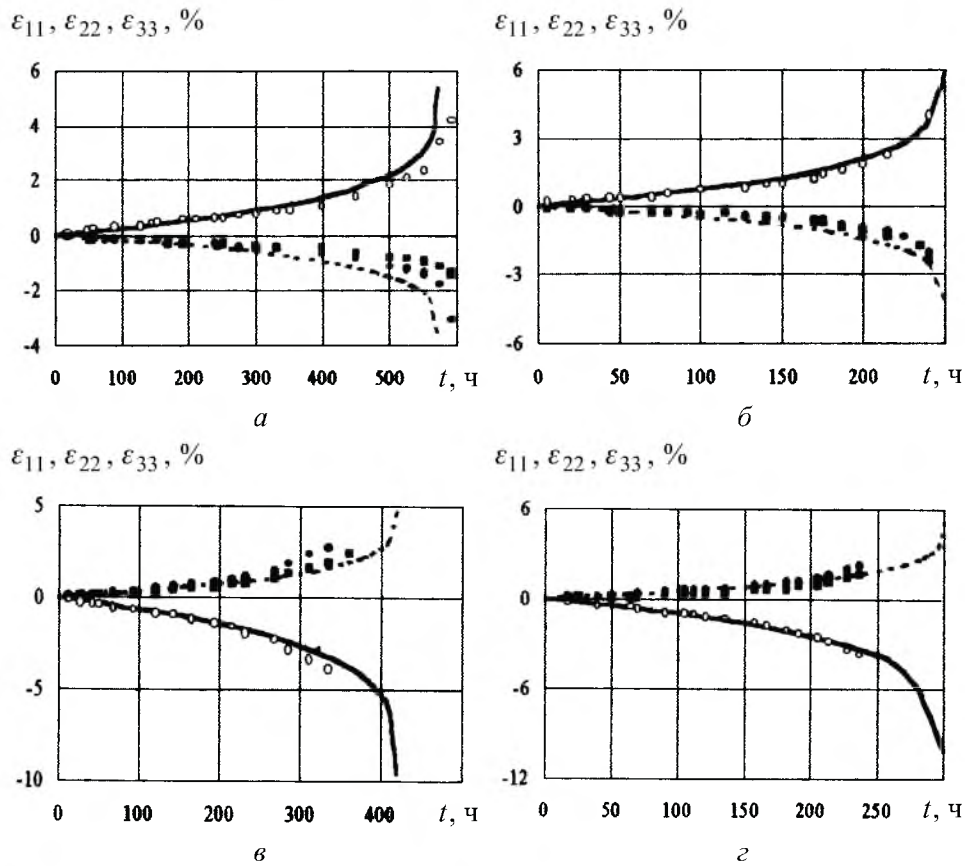
При этом определяющие уравнения (13) принимают вид

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{\sigma_e^k}{\left(1 - \frac{\omega}{\omega^*}\right)^m} \left[ \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} B S_{kl}}{\sigma_i} + \alpha C \frac{I_4(n_k \sigma_{lm} n_m + n_m \sigma_{mk} n_l) + I_5 n_k n_l}{3\sigma_3^2} \right]. \quad (34)$$

4. Если в базовых экспериментах установлено

$$K_+ \neq K_-, \quad K_0 \neq [(\sqrt{3} - 1)K_-^{1/(k+1)} + K_+^{1/(k+1)}]^{k+1}, \quad (35)$$

то ползучесть исследуемого начально изотропного материала определяется независимыми законами при одноосном растяжении, одноосном сжатии и чистом кручении. Следовательно, условия (35) соответствуют наиболее общему случаю поведения материала, описываемому уравнениями (13) с параметрами (24).



Экспериментальные – точки (○ –  $\varepsilon_{11}$ ; ● –  $\varepsilon_{22}$ ; ■ –  $\varepsilon_{33}$ ) и рассчитанные – линии (сплошные –  $\varepsilon_{11}$ , штриховые –  $\varepsilon_{22}$ ) по зависимостям (13), (14) кривые ползучести алюминиевого сплава АК4-1Т при одноосном растяжении для  $\sigma_{11} = 160$  МПа (а) и  $\sigma_{11} = 180$  МПа (б) и одноосном сжатии для  $\sigma_{11} = -200$  МПа (в) и  $\sigma_{11} = -210$  МПа (г).

В качестве примера рассмотрим алюминиевый сплав АК4-1Т при температуре 473 К [4]. Константы материала:  $K_+ = 5,5 \cdot 10^{-23} \text{ МПа}^{-k} \cdot \text{ч}^{-1}$ ;  $K_- = 2,25 \cdot 10^{-23} \text{ МПа}^{-k} \cdot \text{ч}^{-1}$ ;  $K_0 = 11,36 \cdot 10^{-21} \text{ МПа}^{-k} \cdot \text{ч}^{-1}$ ;  $k = 8$ ;  $m = 3$ . Критическое значение параметра повреждаемости определяется равенством  $\omega^* = \sigma_i^2(a - bI_1)$ , где  $a = 4 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$ ;  $b = 4 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-2}$ . Легко установить справедливость условий (35) и сделать вывод о том, что исследуемый материал относится к наиболее общему случаю 4.

Рисунок иллюстрирует кривые ползучести алюминиевого сплава вплоть до разрушения при одноосном растяжении и одноосном сжатии. Учитывая естественный для ползучести разброс экспериментальных данных, согласование теоретических и экспериментальных результатов можно считать удовлетворительным.

## Резюме

Запропоновано енергетичний варіант теорії повзучості початково ізотропних матеріалів із плоскими паралельними мікротріщинами. Одержано критеріальні залежності повзучості та кінетичне рівняння накопичення пошкоженості. Розглянуто базові експерименти щодо визначення параметрів матеріалу згідно із запропонованою теорією. Відзначено задовільну збіжність розрахункових та експериментальних даних для легкого сплаву з різним опором розтягуванню та стискуванню.

1. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1979. – № 4. – С. 121 – 128.
2. Золочевский А. А. Об учете разносопротивляемости в теории ползучести изотропных и анизотропных материалов // Там же. – 1982. – № 4. – С. 140 – 144.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
4. Рубанов В. В. Экспериментальное обоснование определяющих уравнений ползучести металлических материалов с различными свойствами на растяжение и сжатие: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1987. – 14 с.

Поступила 28. 07. 99