

Вариант критерия разрушения на базе энергетической теории прочности

Э. С. Сибгатуллин

Камский политехнический институт, Набережные Челны, Татарстан, Россия

В энергетическом критерии прочности переход с пространства напряжений в пространство коэффициентов интенсивности напряжений осуществлен таким образом, что полученный критерий разрушения содержит все K_{Ic} ($i = I, II, III$) – характеристики трещиностойкости материала и $r_(\theta)$, $\tau_*(\theta)$ – размеры области деструкции материала в окрестности вершины трещины при различных видах нагружения ее берегов. Предложены варианты аппроксимации точного, в рамках рассматриваемой модели, критерия разрушения. Теоретические результаты сопоставлены с некоторыми известными экспериментальными. Приведен пример расчета элемента конструкции с макротрещиной.*

Обозначения

K_{Ic}	– характеристики трещиностойкости материала
u_f	– удельная потенциальная энергия изменения формы
u_{f*}	– предельное значение этой энергии
r, θ	– полярные координаты
σ_{ij} ($i, j = x, y, z$)	– компоненты тензора напряжений
K_I, K_{II}, K_{III}	– коэффициенты интенсивности напряжений
ν	– коэффициент Пуассона
E	– модуль Юнга
a_{11}, a_{12}, a_{22}	– коэффициенты
σ_*	– предельное значение напряжений растяжения
$\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$	– напряжения в полярной системе координат
a_{11}^I, a_{22}^{II}	– частные значения коэффициентов a_{11}, a_{22}
F_I, F_{II}	– коэффициенты
p	– параметр нагрузки
α, l, b, h	– параметры трещины и пластины
p_*	– предельное значение параметра нагрузки
θ_*	– направление роста трещины
σ_1, σ_2	– главные напряжения

В некоторые общеизвестные критерии распространения трещины в изотропных телах при комбинированном нагружении ее берегов входит только величина K_{Ic} (характеристика трещиностойкости материала при нормальном отрыве берегов трещины) [1]. В работе [2], опубликованной в

порядке дискуссии, K_{IIc} , K_{IIIc} (характеристики трещиностойкости при поперечном и продольном сдвигах соответственно) выражены через K_{Ic} . В настоящей работе принята точка зрения, согласно которой K_{Ic} , K_{IIc} , K_{IIIc} являются самостоятельными характеристиками трещиностойкости материала. Следовательно, они на равных правах могут войти в критерий разрушения.

Следуя концепции Sih [3], примем, что трещина получает возможность роста по достижении следующего равенства:

$$u_f = u_{f*}, \quad (1)$$

где u_f – удельная потенциальная энергия изменения формы; u_{f*} – предельное значение этой энергии. Граница области деструкции материала у вершины трещины, где выполняется условие (1), в предельном состоянии определяется линией $r = r_*(\theta)$, где r, θ – полярные координаты (полюс системы совпадает с вершиной трещины).

С использованием известной зависимости u_f от напряжений σ_{ij} ($i, j = x, y, z$) [4], а также известных зависимостей σ_{ij} от коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) K_I, K_{II}, K_{III} [1] предельное условие (1) можно записать в виде

$$\frac{1+\nu}{12\pi E r_*} (a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 + 6K_{III}^2) = u_{f*}, \quad (2)$$

где ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга;

$$\begin{cases} a_{11} = 1,5 \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta); \\ a_{12} = \sin \theta [3 \cos \theta - (1 - 2\nu)^2]; \\ a_{22} = 1,5 + 4,5 \cos^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 - \cos \theta). \end{cases} \quad (3)$$

Формулы (3) справедливы для случая плоской деформации; для плоского напряженного состояния ($\sigma_{zz} \equiv 0$) в них следует формально положить $\nu = 0$.

При отличии от нуля только одного из КИН K_I, K_{II}, K_{III} рост трещины назовем простым разрушением, в противном случае разрушение назовем сложным. Записывая предельное условие (2) для разных случаев простого разрушения, получим следующие равенства:

$$\frac{a_{11} K_{Ic}^2}{r_{I*}} = \frac{a_{22} K_{IIc}^2}{r_{II*}} = \frac{6K_{IIIc}^2}{r_{III*}} = \frac{12\pi E}{1+\nu} u_{f*}, \quad (4)$$

где $r_{i*}(\theta)$ ($i = I, II, III$) – границы областей деструкции материала в окрестности вершины трещины при простых разрушениях. Для изотропного мате-

риала u_{f*} является характеристикой, не зависящей от вида напряженного состояния, и ее можно определить, например, по результатам испытаний тела без трещины на одноосное растяжение по известной формуле

$$u_{f*} = \frac{(1 + \nu)\sigma_*^2}{3E}, \quad (5)$$

где σ_* – предельное значение нормальных напряжений. С помощью выражений (5) и (4) можно вычислить $r_{i*}(\theta)$ ($i = I, II, III$).

Разделив обе части равенства (2) на u_{f*} , с учетом соотношения (4) получим

$$\frac{K_I^2}{K_{Ic}^2} r_{I*} + \frac{2a_{12}K_I K_{II}}{\sqrt{a_{11}a_{22}} K_{Ic} K_{IIc}} \sqrt{r_{I*} r_{II*}} + \frac{K_{II}^2}{K_{IIc}^2} r_{II*} + \frac{K_{III}^2}{K_{IIIc}^2} r_{III*} = r_*. \quad (6)$$

Обозначим критерий разрушения (6) как S_e^f -критерий. Направление развития трещины определим как направление с координатой $\theta = \theta_*$, в котором достигается минимум функции $r_*(\theta)$, определяемой из (6); окружающие нормальные напряжения σ_θ в этом направлении являются растягивающими. Поскольку для данного материала u_{f*} – величина постоянная, то направлению с $\min r_*(\theta)$ соответствует минимальное значение выражения, записанного в скобках в левой части предельного условия (2). По сути, предлагаемый критерий определения направления роста трещины совпадает с соответствующим критерием, построенным по концепции Sih, и приводит к определению направления с $\max \sigma_\theta$, так как напряжения в окрестности вершины трещины имеют особенность типа $1/\sqrt{r}$.

Предельная нагрузка для тела с трещиной, определяемая по критерию (6), не зависит от значения угла θ .

Рассмотрим другой вариант преобразования энергетического критерия прочности с пространства напряжений в пространство КИН. Записывая условие (2) для соответствующих критических направлений при простых разрушениях и следуя схеме, которая была использована при выводе (6), получаем

$$\frac{a_{11}}{a_{11}^I} \frac{K_I^2}{K_{Ic}^2} r_{I*} + \frac{2a_{12}K_I K_{II}}{\sqrt{a_{11}^I a_{22}^I} K_{Ic} K_{IIc}} \sqrt{r_{I*} r_{II*}} + \frac{a_{22}}{a_{22}^II} \frac{K_{II}^2}{K_{IIc}^2} r_{II*} + \frac{K_{III}^2}{K_{IIIc}^2} r_{III*} = r_*, \quad (7)$$

где a_{11}^I, r_{I*} определяются для критического направления с $\theta = \theta_{I*} = 0$; a_{22}^II, r_{II*} – для критического направления с $\theta = \theta_{II*} = \arccos[(1 - 2\nu)^2 / 9]$; $a_{11}, a_{12}, a_{22}, r_*$ – для критического направления с $\theta = \theta_*$ при сложном разрушении. Из соотношений (4) следует, что критерий (7) является другой формой записи S_e^f -критерия.

Далее, согласно работе Бу [5], примем, что критический размер области деструкции материала в окрестности вершины трещины не зависит от вида напряженного состояния. Исходя из этого в (7) полагаем

$$r_{I^*} = r_{II^*} = r_{III^*} = r^*. \quad (8)$$

В результате получим следующую аппроксимацию S_e^f -критерия:

$$\frac{a_{11}}{a_{11}^I} \frac{K_I^2}{K_{Ic}^2} + \frac{2a_{12}}{\sqrt{a_{11}^I a_{22}^I}} \frac{K_I K_{II}}{K_{Ic} K_{IIc}} + \frac{a_{22}}{a_{22}^I} \frac{K_{II}^2}{K_{IIc}^2} + \frac{K_{III}^2}{K_{IIIc}^2} = 1. \quad (9)$$

Аналогично, используя в (6) равенства (8), запишем

$$\frac{K_I^2}{K_{Ic}^2} + \frac{2a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \frac{K_I K_{II}}{K_{Ic} K_{IIc}} + \frac{K_{II}^2}{K_{IIc}^2} + \frac{K_{III}^2}{K_{IIIc}^2} = 1. \quad (10)$$

Аппроксимацию S_e^f -критерия в виде (10) можно обобщить следующим образом:

$$\frac{K_I^{2m}}{K_{Ic}^{2m}} + \frac{2a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \frac{K_I^m K_{II}^m}{K_{Ic}^m K_{IIc}^m} + \frac{K_{II}^{2m}}{K_{IIc}^{2m}} + \frac{K_{III}^{2m}}{K_{IIIc}^{2m}} = 1, \quad (11)$$

где параметр m выбирается исходя из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных результатов. Если КИН могут иметь отрицательные значения, то m следует округлять до ближайшего целого значения. В (10) и (11) коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} определяются для критического направления с $\theta = \theta_*$.

Из S_e^f -критерия, записанного в форме (6) или (7), и его аппроксимаций в виде (9)–(11) следуют критерии разрушения для всех случаев простого разрушения ($K_i = K_{ic}$, $i = I, II, III$) – рис. 1.

Коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} (3) вычислены при $\nu = 0$. Можно показать, что при $m \rightarrow \infty$ кривые, построенные согласно (11), могут быть сколь угодно близки к ломаной линии ABC . На рис. 1 также приведены некоторые экспериментальные данные, взятые из работы [1] (условные обозначения соответствуют принятым в [1]). Как видно, приближенный критерий разрушения (10) вполне удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные результаты.

Рассмотрим задачу о несущей способности прямоугольной пластины с центральной наклонной трещиной, находящейся под действием равномерно распределенных одноосных растягивающих сил p (рис. 2). Материал пластины – алюминиевый сплав 2024-T4 с характеристиками $K_{Ic} = 34,7 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, $K_{IIc} = 51,8 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ [6], $\sigma_* = 490 \text{ МПа}$. Геометрические характеристики пластины и трещины таковы: $\alpha = 45^\circ$; $l/b = 0,4$; $h/b = 2$; $l = 5 \text{ см}$. Для данной задачи имеют место следующие формулы [7]:

$$K_I = F_I p \sqrt{\pi l}; \quad K_{II} = F_{II} p \sqrt{\pi l}.$$

В нашем случае $F_I = 0,572$; $F_{II} = 0,529$; $K_{II} / K_I = 0,925$; $\theta_* = -51,5^\circ$. В соответствии с предельным условием (10), предельная нагрузка p_* равна 145,3 МПа. Согласно же S_d -критерию [1], который также основан на энергетическом критерии прочности, предельная нагрузка для рассматриваемой пластины составляет 103,2 МПа.

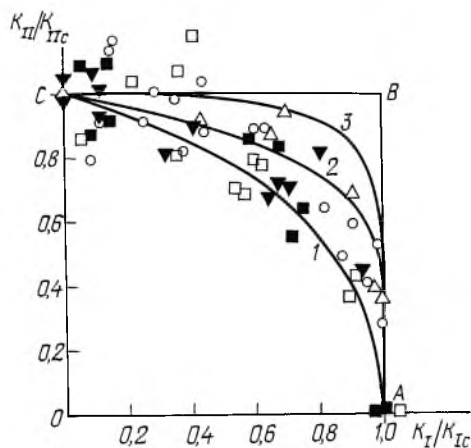


Рис. 1. Предельные кривые, построенные по (9) – 1, (10) – 2 и (11) – 3 при $m = 2$. (Экспериментальные данные взяты из [1].)

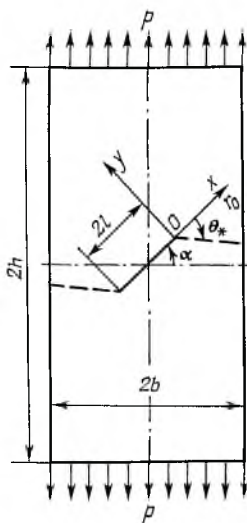


Рис. 2. Прямоугольная пластина с центральной наклонной трещиной длиной $2l$, подвергнутая одноосному равномерному растяжению (θ_* – направление роста трещины).

На рис. 3 для исследуемой пластины приведен график функции $r_*(\theta)$ в окрестности вершины трещины, построенный согласно уравнению (6) для $p_* = 145,3$ МПа. Функция $r_*(\theta)$ имеет экстремумы в точках A, B, C, D , в том числе глобальный минимум – в точке B и локальный минимум – в точке C . Напряжения в точке B таковы: $\sigma_\theta = -309,3$ МПа, $\sigma_r = -76,5$ МПа,

$\tau_{r\theta} = -232,7$ МПа; напряжения в точке C : $\sigma_\theta = 565,5$ МПа, $\sigma_r = 296,7$ МПа, $\tau_{r\theta} = 2,87$ МПа, $\sigma_1 = 565,6$ МПа, $\sigma_2 = 296,6$ МПа, где σ_1, σ_2 – главные напряжения, удовлетворяющие условию

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_*^2, \quad (12)$$

которое следует из равенства (1). Согласно (12) максимальное значение σ_1 в данном случае равно 565,8 МПа.

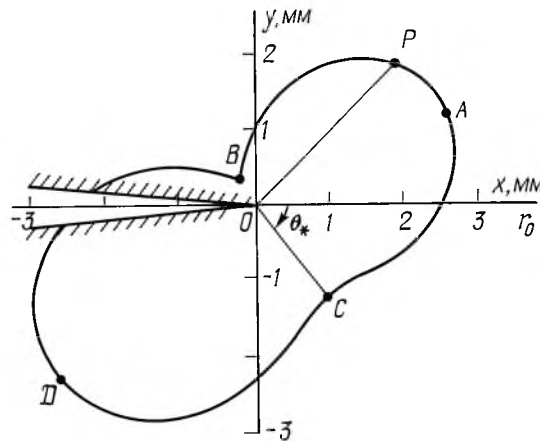


Рис. 3. Граница области деструкции материала в окрестности вершины трещины при $K_{II} / K_I = 0,925$ (OP – направление равномерных растягивающих напряжений, OC – направление роста трещины).

Как видно, направление роста трещины OC почти перпендикулярно к направлению растягивающих внешних сил OP (угол между этими линиями равен $96,5^\circ$).

Выводы

1. Использование равенств (4) в предельном условии (2) дало возможность записать критерий разрушения в виде (6), из которого как частные случаи следуют критерии разрушения для всех видов простого нагружения берегов трещины и который позволяет определить границу области деструкции материала в окрестности вершины трещины с упругой областью в общем случае сложного нагружения ее берегов, что, в частности, дает возможность исследовать напряженно-деформированное состояние материала на этой границе.

2. Присутствие K_{IIc} в критерии разрушения позволило, в частности, так обработать полученные для разных материалов экспериментальные данные, чтобы их разброс уменьшился.

3. Предлагаемый способ аппроксимации “точного” критерия разрушения путем введения в рассмотрение параметра m позволяет удовлетворительно описывать широкий спектр экспериментальных данных.

Резюме

В энергетичному критерії міцності перехід від простору напружень до простору коефіцієнтів інтенсивності напружень виконано таким чином, що отриманий критерій руйнування вміщує всі K_{ic} ($i=I, II, III$) – характеристики тріщиностійкості матеріалу і $r_{i*}(\theta)$, $r_*(\theta)$ – розміри області деструкції матеріалу в околі вістря тріщини при різних видах навантаження її берегів. Запропоновано варіанти апроксимації точного, в рамках досліджуваної моделі, критерію руйнування. Теоретичні результати порівнюються з деякими відомими експериментальними. Наведено приклад розрахунку елемента конструкції з макротріщиною.

1. *Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка – Т. 1: Основы механики разрушения / Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с.*
2. *Орьяк И. В., Торон В. М. Двухкритериальная оценка предельного состояния тела с трещиной при несимметричном нагружении // Пробл. прочности. – 1991. – № 11. – С. 32 – 38.*
3. *Sih G. C. Some basic problems in fracture mechanics and new concepts // Eng. Fract. Mech. – 1973. – N 5. – P. 365 – 377.*
4. *Писаренко Г. С., Агарев В. А., Квитка А. Л. и др. Сопротивление материалов. 5-е изд. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.*
5. *Ву Е. Прочность и разрушение композитов // Композиционные материалы: В 8 т. / Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. – Т. 5: Разрушение и усталость. – М.: Мир, 1978. – С. 206 – 266.*
6. *Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 3: Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения / Ковчик С. Е., Морозов Е. М. – Киев: Наук. думка, 1988. – 436 с.*
7. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.*

Поступила 01. 04. 99