

Об определении напряженного состояния при растяжении с кручением сплошного цилиндра

В. К. Бердин, Р. М. Кашаев

Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа, Россия

Получено решение задачи по определению напряженного состояния в рамках теории течения с изотропным упрочнением при растяжении с одновременным кручением сплошного цилиндрического образца из материала, чувствительного к скорости деформации в условиях пропорционального нагружения. Проведен анализ полученных выражений. По данным испытаний на растяжение с одновременным кручением в условиях сверхпластичности построена диаграмма деформирования титанового сплава ВТ9 с использованием выражений для интенсивности напряжений.

Традиционным экспериментальным методом изучения не одноосного и сложного нагружения являются испытания тонкостенных трубчатых образцов, нагружаемых осевой силой и крутящим моментом [1]. Поскольку толщина образца по сравнению с его радиусом достаточно мала, неоднородностью распределения напряжений и деформаций по толщине образца пренебрегают, что позволяет построить зависимость напряжение – степень деформации по экспериментальным данным. Однако этот метод имеет существенные недостатки: невозможность (вследствие потери устойчивости) получения больших деформаций; трудоемкость изготовления образцов; большая относительная погрешность регистрации силовых параметров ввиду их низкого значения при высокотемпературных испытаниях.

Метод, основанный на использовании сплошных цилиндрических образцов, свободен от этих недостатков, но в этом случае неоднородность распределения напряжений и деформаций в поперечном сечении образца настолько велика, что ею уже невозможно пренебрегать. Учет этой неоднородности составляет основную трудность при расшифровке результатов эксперимента, так как регистрируемые в опыте осевая сила и крутящий момент, являясь интегральными характеристиками напряженного состояния, не позволяют без дополнительных гипотез полностью восстановить распределение напряжений.

В данной работе решена задача по определению напряженного состояния при растяжении с одновременным кручением сплошного цилиндрического образца, изготовленного из материала, чувствительного к скорости и степени деформации, а также проведена экспериментальная проверка справедливости принятых гипотез при сверхпластической деформации титанового сплава ВТ9. Предлагаемая методика является обобщением экспериментальной методики построения диаграммы сдвига по данным испытаний на кручение материала, чувствительного к скорости и степени деформации [2].

Процесс пропорционального деформирования задается двумя компонентами тензора скорости деформаций, для каждого момента времени вычисляются интенсивность напряжений или значения компонент тензора напряжений на поверхности образца.

Рассмотрим сплошной цилиндрический образец радиусом R и длиной L , который деформируется с осевой скоростью v и одновременно со скоростью вращения ω таким образом, чтобы выполнялись условия: $\frac{v}{L} = \text{const}$ и $\frac{\omega \cdot R}{\sqrt{3} \cdot L} = \text{const}$, где v – осевая скорость деформирования; ω – скорость кручения; L и R – соответственно текущая длина и текущий радиус образца. В этом случае деформирование является простым, а интенсивность скорости деформаций $\xi_e = \sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega R}{L}\right)^2}$ – постоянной. В

процессе испытания в каждый момент времени регистрируются абсолютное удлинение ΔL , угол закручивания φ , осевая сила P и крутящий момент M .

Выберем цилиндрические координаты r, φ, z с осью z по оси цилиндра. Полагаем материал образца несжимаемым, а деформацию по его длине – однородной. Тогда тензор скоростей деформации совпадает со своим девиатором и имеет следующий, справедливый и для конечных деформаций, вид [3]:

$$\xi_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v}{2L} & \frac{\omega r}{2L} \\ 0 & \frac{\omega r}{2L} & \frac{v}{L} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

а интенсивность скорости деформаций

$$\xi_e = \sqrt{\frac{v^2}{L^2} + \frac{\omega^2 r^2}{3L^2}} = \frac{v}{L} \sqrt{1 + \left(q \frac{r}{R}\right)^2}, \quad (2)$$

где q – безразмерный параметр, характеризующий отношение скорости кручения к осевой скорости на поверхности образца, $q = \frac{\omega R}{\sqrt{3} v}$.

Для изотропного материала тензор и девиатор напряжений выглядят следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi z} \\ 0 & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad S_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_{zz}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_{zz}}{3} & \sigma_{\varphi z} \\ 0 & \sigma_{z\varphi} & \frac{2\sigma_{zz}}{3} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

а интенсивность напряжений

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\sigma_{z\varphi}^2}. \quad (4)$$

Согласно условию равновесия, ненулевые компоненты тензора напряжений σ_{zz} и $\sigma_{z\varphi}$ удовлетворяют двум интегральным уравнениям, включающим величины регистрируемых в эксперименте силовых параметров P и M :

$$P = \iint_S \sigma_{zz} dS = 2\pi \int_0^R \sigma_{zz} r dr; \quad (5)$$

$$M = \iint_S \sigma_{z\varphi} r dS = 2\pi \int_0^R \sigma_{z\varphi} r^2 dr. \quad (6)$$

Силовые параметры P и M зависят от кинематических параметров v и ω . Анализ напряженного состояния проводим на базе гипотезы о пропорциональности девиаторов напряжений и скорости деформаций.

Пропорциональность компонентов девиаторов напряжений (3) и скоростей деформаций (1) запишем следующим образом:

$$\sigma_{z\varphi} = \psi \frac{\omega r}{2L}; \quad \frac{2\sigma_{zz}}{3} = \psi \frac{v}{L}, \quad (7)$$

где ψ – коэффициент пропорциональности.

Решая совместно уравнения (4) и (7), получаем выражения для компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{1 + \left(q \frac{r}{R}\right)^2}}; \quad \sigma_{z\varphi} = \frac{\sigma_e q \left(\frac{r}{R}\right)}{\sqrt{3} \sqrt{1 + \left(q \frac{r}{R}\right)^2}}. \quad (8)$$

Связь между интенсивностью напряжений, с одной стороны, и интенсивностью скоростей деформаций и накопленной степенью деформации, с другой – в каждой точке образца представим так:

$$\sigma_e = \sigma_e(R) \left(\frac{\xi_e}{\xi_e(R)} \right)^m \left(\frac{e}{e(R)} \right)^n, \quad (9)$$

где $\sigma_e(R)$ – интенсивность напряжений; $\xi_e(R)$ – интенсивность скоростей деформации; $e(R)$ – накопленная степень деформации на поверхности образца; m и n – соответственно коэффициенты скоростного и деформационного упрочнения.

Накопленная степень деформации e для материальной частицы в общем случае может быть найдена путем интегрирования выражения (2) по времени t . В нашем случае $\dot{\xi}_e = \text{const}$, тогда $e = \xi_e t$, и выражение (9) с учетом (2) принимает вид:

$$\sigma_e = \sigma_e(R) \left(\frac{\xi_e}{\xi_e(R)} \right)^{m+n} = \sigma_e(R) \left[\frac{1 + \left(q \frac{r}{R} \right)^2}{1 + q^2} \right]^{\frac{m+n}{2}}. \quad (10)$$

Подставляя (10) соответственно в (8), получаем закон распределения компонент тензора напряжений по поперечному сечению сплошного образца:

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_e(R) \left[1 + \left(q \frac{r}{R} \right)^2 \right]^{\frac{m+n-1}{2}}}{(1 + q^2)^{(m+n)/2}}; \quad \sigma_{z\varphi} = \frac{\sigma_e(R) q \frac{r}{R} \left[1 + \left(q \frac{r}{R} \right)^2 \right]^{\frac{m+n-1}{2}}}{\sqrt{3} (1 + q^2)^{(m+n)/2}}. \quad (11)$$

При этом значения ненулевых компонент тензора напряжений на поверхности образца будут выражаться следующим образом:

$$\sigma_{zz}(R) = \frac{\sigma_e(R)}{\sqrt{1 + q^2}}; \quad \sigma_{z\varphi}(R) = \frac{\sigma_e(R) q}{\sqrt{3} \sqrt{1 + q^2}}.$$

Распределение относительных значений $\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_e(R)}$ и $\frac{\sigma_{z\varphi}}{\sigma_e(R)}$ по сечению образца вдоль относительного радиуса $\frac{r}{R}$ при $q=1$ и $n=0$ показано на рис. 1.

Подставляя уравнения (11) соответственно в (5) и (6), после интегрирования получаем формулы для определения интенсивности напряжений для материальной частицы, расположенной на поверхности образца $\sigma_e(R)$, выраженные через осевое усилие P и крутящий момент M :

$$\sigma_e(R) = \frac{P(m+n+1)q^2(1+q^2)^{(m+n)/2}}{2\pi R^2[(1+q^2)^{(m+n+1)/2} - 1]}; \quad (12)$$

$$\sigma_e(R) = \frac{\sqrt{3}M(m+n+3)(m+n+1)q^3(1+q^2)^{(m+n)/2}}{2\pi R^3[(m+n+1)(1+q^2)^{(m+n+3)/2} - (m+n+3)(1+q^2)^{(m+n+1)/2} + 2]}. \quad (13)$$

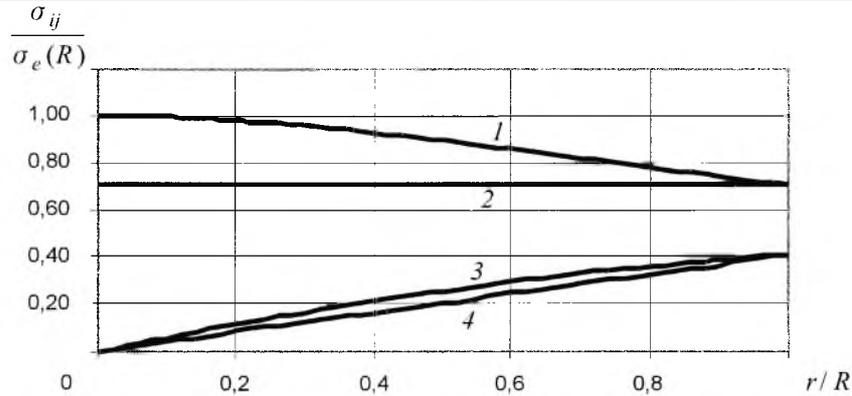


Рис. 1. Распределение (эюра) относительных значений $\frac{\sigma_{\pm}}{\sigma_e(R)}$ (1, 2) и $\frac{\sigma_{\pm\varphi}}{\sigma_e(R)}$ (3, 4) по сечению образца вдоль относительного радиуса r/R при $q=1$ и $n=0$ для $m=0$ – идеально пластическая среда (1, 3) и $m=1$ – ньютоновская вязкая жидкость (2, 4).

Из выражения (12), учитывая, что $q = \frac{\omega R}{\sqrt{3} \nu}$, при $\omega \rightarrow 0$ имеем

$$\sigma_e(R) = \frac{P}{\pi R^2},$$

а при $\nu \rightarrow 0$ из (13) получим

$$\sigma_e(R) = \frac{\sqrt{3} M(m+n+3)}{2\pi R^3},$$

т.е. выражения для определения интенсивности напряжений при чистом растяжении и чистом кручении [2].

Формулы (12) и (13) требуют для определения $\sigma_e(R)$ в каждом отдельном случае сравнительно много арифметических подсчетов. Поэтому удобнее пользоваться следующими формулами:

$$\sigma_e(R) = \frac{P}{\pi R^2} A; \quad \sigma_e(R) = \frac{3\sqrt{3} M}{2\pi R^3} B, \quad (14)$$

где

$$A = \frac{(m+n+1)q^2(1+q^2)^{(m+n)/2}}{2[(1+q^2)^{(m+n+1)/2} - 1]}; \quad (15)$$

$$B = \frac{(m+n+1)(m+n+3)q^3(1+q^2)^{(m+n)/2}}{3[(m+n+1)(1+q^2)^{(m+n+3)/2} - (m+n+3)(1+q^2)^{(m+n+1)/2} + 2]}$$

можно определить из соответствующих графиков.

Рассмотрим изменение множителей A и B в формулах для определения интенсивности напряжений (14) при изменении параметра q и констант материала. Результаты расчета для некоторых частных случаев, проведенные в соответствии с выражениями (15) при $n=0$, представлены на рис. 2.

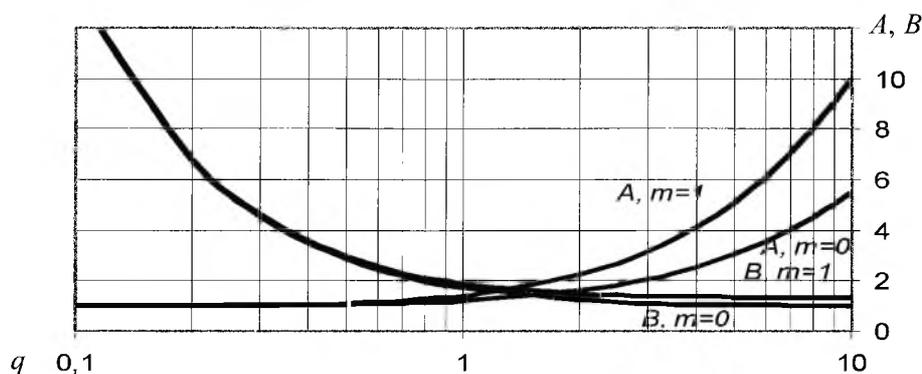


Рис. 2. Изменение значений множителей A и B в зависимости от кинематического параметра q , вычисленных в соответствии с выражениями (15) при $n=0$ для $m=0$ и 1.

Знание характера изменения A и B полезно при оценке точности определения $\sigma_e(R)$ в зависимости от точности q и m и выборе той или иной формулы для определения $\sigma_e(R)$. Например, из графиков (рис. 2) следует, что при $q > 10$ практически $B = \text{const}$, а при $q < 0,2$ $A = 1$, и при $q < 0,5$ величина m не оказывает влияния на изменение A и B .

Таким образом, интенсивность напряжений при растяжении с одновременным кручением сплошного цилиндрического образца можно определить и через осевое усилие и через крутящий момент. Дело в том, что P и M – зависимые друг от друга параметры. Эту связь можно установить, приравняв правые части уравнений (12) и (13):

$$Q = \frac{\sqrt{3} M}{PR} = \frac{(m+n+1)(1+q^2)^{(m+n+3)/2} - (m+n+3)(1+q^2)^{(m+n+1)/2} + 2}{(m+n+3)q[(1+q^2)^{(m+n+1)/2} - 1]}, \quad (16)$$

$Q = \frac{\sqrt{3} M}{PR}$ – безразмерный параметр, характеризующий соотношение крутящего момента и осевого усилия на поверхности образца, если q характеризует соотношение кинематических параметров процесса растяжения с одновременным кручением, то Q – силовых параметров.

С другой стороны, если значения $\sigma_e(R)$, определенные по формулам (12) и (13), существенно отличаются, то принятая нами модель неверна по векторным свойствам, т.е. не выполняется условие пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций.

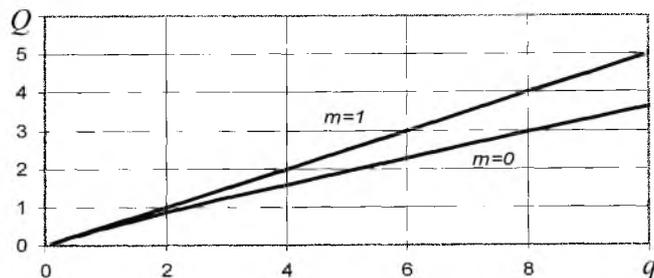


Рис. 3. Влияние кинематического параметра $q = \frac{\omega R}{\sqrt{3}v}$ на силовой параметр $Q = \frac{\sqrt{3}M}{PR}$ при $n = 0$.

Рассмотрим влияние параметра q на Q . Результаты расчета при $n = 0$ в соответствии с теоретическим выражением (16) представлены на рис. 3.

Если перемножить Q и q между собой, то получим

$$\frac{M\omega}{Pv} = \frac{(m+n+1)(1+q^2)^{(m+n+3)/2} - (m+n+3)(1+q^2)^{(m+n+1)/2} + 2}{(m+n+3)[(1+q^2)^{(m+n+1)/2} - 1]}. \quad (17)$$

Левая часть уравнения (17) представляет собой отношение мощности кручения к мощности растяжения (полная вводимая мощность равна $N = Pv + M\omega$).

Рассмотрим влияние коэффициента скоростной чувствительности материала m на изменение соотношения мощностей $M\omega / Pv$ при $n = 0$ и постоянном значении q . Результаты расчета по формуле (17) при $q = 10$ приведены на рис. 4.

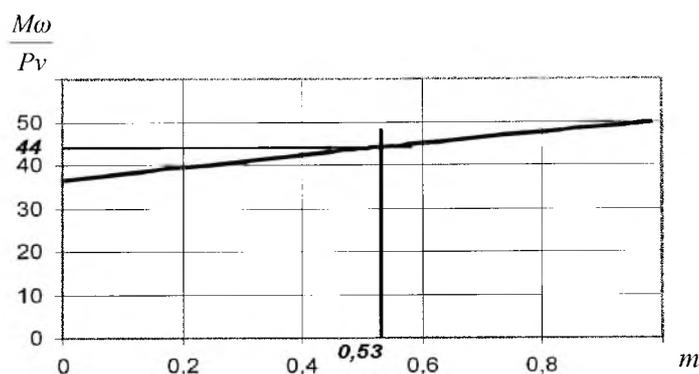


Рис. 4. Влияние коэффициента скоростной чувствительности материала m на соотношение мощностей $\frac{M\omega}{Pv}$ при $n = 0$ и $q = 10$.

При $m = 1$ зависимость между q и Q прямо пропорциональная: $Q = 0,5q$, а между q и $M\omega / Pv$ – квадратичная: $\frac{M\omega}{Pv} = 0,5q^2$. При постоянном q , чем величина m ниже, тем Q и $M\omega / Pv$ меньше, т.е. доля

крутящего момента уменьшается, а осевого усилия увеличивается. Для идеально пластического материала ($m = 0$) эта доля минимальна, что, однако, становится заметным только при $q > 1$. Отсюда следует, что при достаточно больших q на основании регистрируемых параметров эксперимента на растяжение с одновременным кручением сплошного цилиндрического образца можно оценить коэффициент скоростной чувствительности материала m . На рис. 4 показано, что при $q = 10$, например, для $(M\omega / Pv) = 44$ $m = 0,53$.

Предлагаемая методика была использована при определении интенсивности напряжений в эксперименте на растяжение с одновременным кручением двухфазного ($\alpha + \beta$)-титанового сплава ВТ9 (Ti+6,6%Al+3,5%Mo+1,7%Zr+0,27%Si).

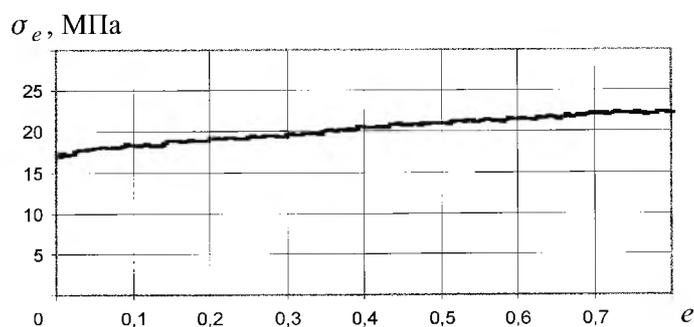


Рис. 5. Зависимость интенсивности напряжений (напряжения течения) от степени деформации при растяжении титанового сплава ВТ9 при $\xi_e = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ и $T = 950^\circ\text{C}$.

На основе ранее проведенных испытаний на одноосное растяжение данного материала определен температурно-скоростной режим сверхпластической деформации: температура $T = 950^\circ\text{C}$, скорость деформации $\xi_e = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, коэффициент скоростной чувствительности $m = 0,55$, коэффициент деформационного упрочнения $n = 0,05$. Как для испытаний на растяжение, так и на растяжение с кручением использовали одинаковые образцы с диаметром рабочей части $R_0 = 10 \text{ мм}$ и длиной рабочей части $L_0 = 35 \text{ мм}$. Диаграмма растяжения при $T = 950^\circ\text{C}$ и $\xi_e = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ приведена на рис. 5. Напряжение определяли как $\sigma = \frac{P}{\pi R^2}$, где P – текущее усилие; $R = R_0 \sqrt{L_0 / L}$, R_0 – соответственно текущий и начальный радиус образца; L_0 и L – соответственно начальная и текущая длина образца. Деформацию вычисляли по формуле

$$e = \ln(L / L_0).$$

Растяжение с одновременным кручением реализовали на установке сложного нагружения СНТ-10БД, разработанной и изготовленной в СКТБ с ОП Института проблем прочности НАН Украины и модернизированной в Институте проблем сверхпластичности материалов РАН. Температура ис-

пытания $T = (950 \pm 3)^\circ\text{C}$. В процессе испытания осевую скорость v и скорость вращения ω корректировали таким образом, чтобы выполнялись условия $\frac{v}{L} = \frac{\omega R}{\sqrt{3}L} = \text{const}$ или $q=1$ и $\xi_e = 2 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$. Точность поддержания

этих условий составляла 10%. Параметры испытания регистрировали в цифровом виде. В процессе испытания в каждый момент времени регистрировали следующие параметры: текущее время t , абсолютное удлинение ΔL , угол закручивания φ , осевое усилие P , крутящий момент M . Количество записей в минуту – 60. Полученные данные обрабатывали с помощью программного пакета “Microsoft Excel”. Интенсивность напряжений вычисляли по формулам (12) и (13). Для уточнения параметра $q = \frac{\omega R}{\sqrt{3}v}$ в каждый момент времени определяли $v = \frac{dL}{dt}$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ и

$R = R_0 \sqrt{\frac{L_0}{L_0 + \Delta L_i}}$. Следует заметить, что влияние коэффициента скоростной чувствительности m (как и параметра деформационного упрочнения n) при $q=1$ незначительное (рис. 2), т.е. значимость m в точности определения $\sigma_e(R)$ также незначительна. Степень деформации определяли путем интегрирования интенсивности скорости деформации по времени:

$$e = \int_0^t \xi_e dt, \text{ что позволило учесть ошибку поддержания } \xi_e = \text{const}.$$

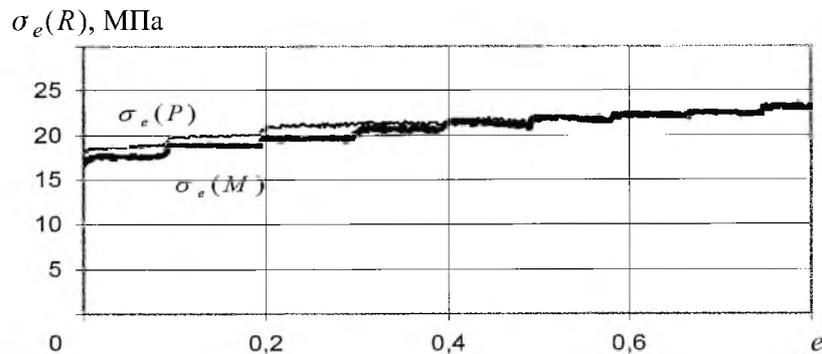


Рис. 6. Зависимость интенсивности напряжений от степени деформации при растяжении с кручением образца из титанового сплава ВТ9 при $q=1$, $\xi_e = 2 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$ и $T = 950^\circ\text{C}$: $\sigma_e(P)$, $\sigma_e(M)$ — диаграммы деформирования, полученные соответственно по выражениям (12) и (13).

Зависимость интенсивности напряжений от степени деформации на поверхности сплошного цилиндрического образца при растяжении с одновременным кручением представлена на рис. 6. Ступенчатый, с незначительными скачками, характер диаграмм связан с коррекцией осевой скорости v и скорости вращения ω для выполнения условий нагружения. Значения $\sigma_e(R)$, полученные с использованием значений осевого усилия по формуле (12) и значений крутящего момента по формуле (13), близки между

собой и практически в рамках разброса эксперимента соответствуют диаграмме растяжения. Это свидетельствует о том, что допущения, принятые при выводе этих формул, достаточно корректно отражают поведение титанового сплава ВТ9 при растяжении с одновременным кручением в режиме сверхпластической деформации.

Авторы признательны Р. А. Васину и А. И. Пшеничнюку за ценные замечания при подготовке статьи.

Резюме

Отримано розв'язок задачі щодо визначення напруженого стану в рамках теорії текучості з ізотропним зміцненням при розтязі з одночасним крученням суцільного циліндричного зразка з матеріалу, чутливого до швидкості та степеня деформації в умовах пропорційного навантаження. Проаналізовано отримані вирази. За даними випробувань на розтяг з одночасним крученням в умовах надпластичності побудовано діаграму деформування титанового сплаву ВТ9 з використанням виразів для інтенсивності напружень.

1. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
2. *Fulor S., Cadien K. C., Luton M. J., and McQueen H. J.* A servo-controlled hydraulic hot-torsion machine for hot working studies // *J. Test. Eval.* – 1977. – 5, N 6. – P. 419 – 426.
3. *Еникеев Ф. У.* Кинематика процесса растяжения с кручением однородного цилиндрического стержня из сверхпластичного материала // *Металлы.* – 1998. – № 2. – С. 89 – 98.

Поступила 09. 12. 99