

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.3

О физической достоверности в теории пластичности

К. Ш. Бабамуратов, Р. А. Абиров

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М. Т. Уразбаева АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

Предложен метод анализа физической достоверности решений задач пластичности и оценена физическая достоверность простейших вариантов теории пластичности для некоторых плоских процессов сложного нагружения. Показано, что учет геометрии процесса нагружения приводит к значительным погрешностям в расчетах по теориям. Даны рекомендации по предпочтительному использованию классических теорий для некоторых металлов при различных видах нагружения.

При постановке и решении прочностных задач в теории пластичности уравнения состояния тел описываются на основе феноменологических подходов с использованием упрощенных моделей структуры и свойств материала. Поэтому в общем случае строгая математическая постановка соответствующей краевой задачи в рамках теоремы о простом нагружении Ильюшина нереальна, так как известные уравнения связи между напряжениями и деформациями являются лишь более или менее удачными приближениями. К ним относятся, в частности, широко используемые на практике дифференциально-линейные соотношения.

В рамках общей математической теории пластичности исследованы соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ для некоторых частных классов процессов, характерных для практических задач расчета конструкций. Однако для многих проблем инвариантные функции или функционалы еще не найдены, поэтому они не имеют надежного теоретического решения [1]. Путь к их решению дает метод СН-ЭВМ Ильюшина [2, 3] и его важнейшее следствие – метод оценки точности (физической достоверности) решения задачи пластичности, получившие достаточно полное развитие в работах [3–8].

В данной статье приведен анализ физической достоверности часто используемых на практике простейших вариантов теории пластичности для некоторых частных классов плоских и пространственных процессов сложного нагружения тел.

1. Методика анализа. Суть метода оценки физической достоверности состоит [3] в том, что обычные расчеты конструкций, выполненные на основе выбранного варианта определяющего соотношения, дополняются построением теоретических (расчетных) траекторий напряжений $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(x_k, \lambda)$ и деформаций $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(x_k, \lambda)$ и набором траекторий, построенных

при испытаниях на сложное нагружение по программе $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(x_k, \lambda)$ или $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(x_k, \lambda)$. С использованием этих данных по заданному критерию оценивается степень точности теоретического решения (λ – параметр последовательности состояний, монотонно возрастающий по t ; x_k – произвольно заданная точка внутри тела конструкции).

В настоящей работе численные и эксперименты на сложное нагружение (СН) проводятся в рамках известной классификации плоских траекторий [4, 9]. Рассмотрим плоское напряженное состояние. При этом будем исходить из условия компланарности векторов $\hat{\sigma}$, $d\hat{\sigma}$ и $d\hat{\varepsilon}$, которое записывается в виде соотношений [10, 11]

$$d\hat{\sigma} = Nd\hat{\varepsilon} - (N - P) \frac{\hat{\sigma}d\hat{\varepsilon}}{\sigma^2} \hat{\sigma}, \quad (1)$$

$$d\hat{\varepsilon} = \frac{1}{N} d\hat{\sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{\hat{\sigma}d\hat{\sigma}}{\sigma^2} \hat{\sigma}, \quad (2)$$

где N и P – функционалы по длине дуги от кривизны траектории. Путем определенного выбора N и P [3, 9] к виду (1) или (2) приводятся многие известные варианты теории пластичности. Важно отметить, что в дифференциально-линейных теориях течения N и P считаются независимыми от угла наклона ϑ вектора напряжений к касательной к траектории деформаций, что приводит, как показывают расчеты, к существенному (~30...40%) отклонению теоретических решений от эксперимента.

2. Описание алгоритма.

2.1. Рассмотрим процесс сложного нагружения однородного цилиндрического образца, представленного в виде траектории $\hat{\sigma} = \hat{\varphi}_0(\lambda)$. Тогда для выбранных $N = N_0$ и $P = P_0$ в (1) и (2) и заданных граничных и начальных условиях из решения (2) строится траектория $\hat{\varepsilon} = \hat{\psi}(\lambda)$. Эксперименты на испытательной установке СН по программе $\hat{\varepsilon} = \hat{\psi}(\lambda)$ позволяют получить траекторию $\hat{\sigma}^* = \hat{\varphi}^*(\lambda)$. При сопоставлении последней с траекторией $\hat{\sigma} = \hat{\varphi}_0(\lambda)$ по критерию

$$(2|\varphi^* - \varphi_0|/|\varphi^* + \varphi_0|) \leq \delta_\sigma \quad (3)$$

можно решить вопрос о физической достоверности выбранного варианта теории (N_0, P_0) для описания возникающего в теле образца процесса.

Если процесс нагружения задан в пространстве вектора деформации $\hat{\varepsilon} = \hat{\psi}_0(\lambda)$, то траектория $\hat{\sigma} = \hat{\varphi}(\lambda)$ находится из решения уравнения (1), а для построения экспериментальной траектории используется машина СН динамического типа. В остальном алгоритм тот же, что и при задании $\hat{\sigma} = \hat{\varphi}_0(\lambda)$.

Функция $\sigma = \Phi(\varepsilon)$ в (1) или (2) и ее производная $\sigma' = \Phi'(\varepsilon)$ обычно определяются по данным испытаний на простое растяжение или чистый сдвиг. При нагружении тел по двухзвенным процессам эта функция реализуется на установке СН по траектории с углом излома $\theta = \pi / 2$ [3, 5].

2.2. Пусть теперь известно решение произвольной краевой задачи, полученное при заданном законе нагружения тела на основе деформационной теории: $N_0 = \sigma / \varepsilon$, $P_0 = d\sigma / d\varepsilon$, т.е. определены напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} в любой точке (сечении) тела x_k . По формулам преобразования находятся компоненты векторов σ_k, ε_k . Опыты на СН проводятся по программе $\hat{\sigma}_k = \hat{\sigma}_k(x_k, \lambda)$. Полученная в эксперименте траектория $\hat{\sigma}_k^* = \hat{\sigma}_k^*(x_k, \lambda)$ сопоставляется с расчетной траекторией $\hat{\sigma}_k = \hat{\sigma}_k(x_k, \lambda)$ по критерию типа (3). Методика постановки и проведения эксперимента на СН описана в [3, 12].

В общем случае плоского напряженного состояния (или плоской деформации) трехмерный вектор с компонентами $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ (или $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3$) описывает пространственную траекторию. Такие процессы при выполнении условия малости выхода вектора $\hat{\sigma}$ из соприкасающейся плоскости Френе [3]

$$\frac{\left| \frac{1}{\chi v^3} \varepsilon_{ijk} \dot{\varepsilon}_i \ddot{\varepsilon}_j \sigma_k \right|}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{ij}}} \leq \delta_\sigma \quad (4)$$

путем приближенного упрощения по формулам

$$\varepsilon_1(s) = \int_0^s \cos \psi ds, \quad \varepsilon_3(s) = \int_0^s \sin \psi ds \quad (5)$$

приводятся к плоскости $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, где

$$\sigma_k = \sqrt{2} \beta_{ijk} \tilde{\sigma}_{ij}; \quad \varepsilon_k = \sqrt{2} \beta_{ijk} \tilde{\varepsilon}_{ij};$$

$$v = ds / dt = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}}; \quad \chi = \frac{1}{v^3} \sqrt{v^2 \dot{v}_{ij} \dot{v}_{ij} - (v_{ij} \dot{v}_{ij})^2};$$

ε_{ijk} – компоненты тензора Леви–Чивита; β_{ijk} – матрица перехода от компонентов девиаторов $\tilde{\sigma}_{ij}(\lambda), \tilde{\varepsilon}_{ij}(\lambda)$ к соответствующим компонентам векторов $\sigma_n(\lambda)$ и $\varepsilon_n(\lambda)$; δ_σ – задаваемая величина точности; $\psi = \int \chi ds + C$ – угол наклона касательной к траектории $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_3$ в ее произвольной точке; χ – кривизна траектории; C – произвольная постоянная.

Возможны и другие, упрощенные варианты соотношений [3], вытекающих из (1), которые будут использованы ниже при проведении вычислительных и СН-экспериментов.

3. Установим физическую достоверность некоторых частных вариантов теории пластичности с использованием данных экспериментов в *P-p*- и *P-M*-опытах.

3.1. Процессы нагружения тел в виде траекторий с углом излома $\theta \leq \pi / 2$.

A. P-p-опыты (опыты В. П. Дегтярева). Рассмотрены три программы нагружения. Материал – сталь 30ХГСА.

1-я программа: образец сначала деформировался до $\varepsilon_i = 0,5\%$. Затем внутренним давлением нагружался при постоянной осевой деформации. Опыты проводили при значениях $m = \sigma_1 / \sigma_2 = \infty; 3, 1; 0,75; 0,33$.

2-я программа: образец нагружался до точки излома при $m = \sigma_1 / \sigma_2 = 2$, далее при значениях $\varepsilon_i = 0,21; 0,5; 0,7; 0,9; 1,25\%$ осуществлялся второй этап нагружения. Угол излома $\theta = 63^\circ$ (пространство деформаций) оставался неизменным.

3-я программа: образец нагружался по траекториям в виде двухзвенной ломаной (пространство напряжений) с углом излома $26,6^\circ$. Варьировалась величина участка предварительного нагружения внутренним давлением.

Сравнение данных экспериментов с расчетами по теориям приводит к следующим результатам. При $\theta = 90^\circ$ (1-я программа) максимальное отклонение расчетных величин интенсивности напряжений от соответствующих экспериментальных значений в окрестности излома траектории по деформационной теории составляет 12%, по теории Прагера – 16% и по теории идеальной пластичности – 7%. Отклонение расчетных значений $\cos \vartheta$ (ϑ – угол сближения) от экспериментальных по теориям течения составляет порядка 120% и по деформационной теории – порядка 45%. Для значений $m = 3; 0,1; 0$ отклонение расчетных (по теории Прагера и по деформационной теории) величин интенсивности напряжений от экспериментальных составляет не более 6%. По векторным свойствам отклонение порядка 60%. Для значений $m = 0,75$ и $0,33$ расчеты по всем названным теориям имеют отклонения от экспериментов по векторным свойствам не более 6,5%.

При $m = 2$ и $\varepsilon_i = 1,25\%$ (2-я программа) отклонение расчетных величин по напряжениям составляет от 11 (деформационная теория) до 14% (теория Прагера). Для всех остальных значений ε_i эти отклонения не превышают 6...8%. По векторным свойствам соответствующие отклонения составляют от 25 (деформационная теория) до 50% (теории течения). Наконец, при $m = 0,5$ (3-я программа, $\theta = 26,6^\circ$) результаты расчетов по теории Прагера практически совпадали с экспериментальными. Максимальные отклонения по скалярным и векторным свойствам составляют соответственно 2,5 и 7,5%.

Б. Р-М-опыты [13]. Сталь 30ХГСА. Программа нагружения в виде двухзвенных ломаных с углом излома $\theta = 90^\circ$. Сначала образец нагружался растягивающей силой до достижения значения $\sigma = 400,43$ МПа, что соответствует примерно пределу текучести материала. Затем при постоянной силе P образец догружался в пластическую область крутящим моментом M . Наилучшее совпадение с опытом дали расчеты по теории Прагера. Максимальное отклонение расчетных величин от экспериментальных не превышает 10,5% по σ и 5,3% по ϑ .

В. Р-М-опыты (опыты Ленского). Сталь 45. Программа нагружения в виде двухзвенных ломаных с углом излома $\theta = 23,05; 46,10$ и 90° в пределах площадки текучести и в зоне упрочнения (пространство деформаций). При изломе в зоне площадки текучести теории течения лучше согласуются с данными экспериментов. Для области упрочнения отклонение расчетных данных от экспериментальных растет, особенно при расчетах по деформационной теории. Для углов излома $\theta < 90^\circ$ расчеты по всем теориям хорошо согласуются с экспериментом.

Г. *P-M-опыты*. Сталь Ст. 3. Программа нагружения в виде двухзвенных ломаных с углом излома $\theta = 90^\circ$ (пространство деформаций). До излома образец нагружался растягивающей силой до значений $S_0 = 3,39\varepsilon_s; 5,6\varepsilon_s; 6,04\varepsilon_s$ (предварительное нагружение). Далее при фиксированном значении растягивающей силы прикладывался крутящий момент. Испытания проводились до падения нормального нагружения до нуля. В результате эксперимента рассмотрен характер локального разупрочнения материала и его векторные свойства в зависимости от истории нагружения. Расчеты проводились по деформационной теории, теории Кадашевича–Новожилова и теории двухзвенных ломаных. Из графиков, представленных на рис. 1, *a*, видно, что ни одна теория не учитывает “нырка” на диаграмме $\sigma \sim s$ после излома. Если для $\theta = \pi/6$ это существенно не влияет на расчеты, то при $\theta = \pi/2$ имеют место значительные расхождения между расчетными и экспериментальными значениями. Из рис. 1, *б* следует, что векторные свойства материала удачнее описываются теориями Кадашевича–Новожилова и двухзвенных ломаных, чего нельзя сказать в отношении деформационной теории. Максимальное отклонение расчетных кривых $\vartheta \sim s$ от экспериментальных увеличивается с ростом s .

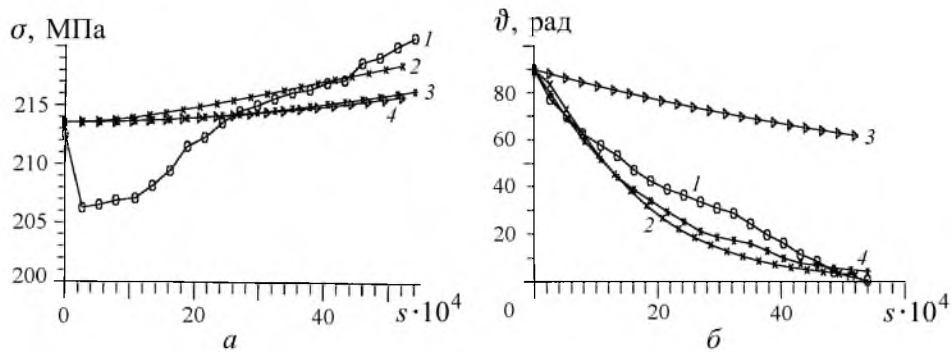


Рис. 1. Характеристики скалярных (*a*) и векторных (*б*) свойств стали Ст. 3 при $s_0 = 6,04\varepsilon_s$: 1 – эксперимент; 2 – теория двухзвенных ломаных; 3 – деформационная теория; 4 – теория Кадашевича–Новожилова.

Д. Рассмотрим двухпараметрическое нагружение (рис. 2), в котором для первого участка нагружения имеем $s \leq \vartheta_0$; $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_3 s$; $\chi = 0$; $\vartheta = 0$, для второго участка – $s > \vartheta_0$; $s - s_0 = \vartheta_0 \varphi$; $\vartheta_1 = \vartheta_0 \sin \varphi$; $\vartheta_3 = \vartheta_0 \cos \varphi$; $\chi = -1/\vartheta_0$; φ – полярный угол.

Пусть $\vartheta_0 = k\varepsilon_s$, где $k > 1$ – параметр, показывающий степень развития пластических деформаций. Тогда из закона синуса для теории идеальной пластичности получим

$$\frac{d\vartheta}{1 - k \sin \vartheta} = d\varphi,$$

и при начальных условиях $\varphi = 0$ и $\vartheta = \pi/2$ найдем

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \ln \left[\frac{\operatorname{tg}(\vartheta/2) - k - \sqrt{k^2 - 1}}{\operatorname{tg}(\vartheta/2) - k + \sqrt{k^2 - 1}} \frac{1 - k + \sqrt{k^2 - 1}}{1 - k - \sqrt{k^2 - 1}} \right].$$

Выразив величину угла сближения ϑ через полярный угол φ , получим

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{F(\varphi)(k-l) - k - l}{F(\varphi) - 1}, \quad (6)$$

где

$$F(\varphi) = e^{l\varphi} \frac{1-k-l}{1-k+l} - 1; \quad l = \sqrt{k^2 - 1}.$$

Для вычисления компонент вектора напряжений находим

$$\sigma_i = \sigma_s \left(\cos \vartheta \frac{d\vartheta_i}{ds} + \vartheta_0 \sin \vartheta \frac{d^2 \vartheta_i}{ds^2} \right), \quad i = 1, 3. \quad (7)$$

Таким образом, в теоретических расчетах заданы длина дуги траектории деформации s , ϑ_0 и угол φ . По этим данным вычисляются угол сближения по (6) и σ_k по (7).

Для других вариантов теории величины N и P определяются на основе известных соотношений, а ϑ и σ – численно из закона синуса. Для оценки физической достоверности теоретических расчетов проведены эксперименты на слабоупрочняющемся материале (сталь Ст. 3) с диаграммой (векторное пространство)

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} 2Gs & \text{при } s < \vartheta_s, \\ 2Gs(1 - \omega) & \text{при } s \geq \vartheta_s, \end{cases} \quad \omega = \lambda(1 - \vartheta_s / s), \quad (8)$$

где $\lambda = 0,97$; $G = 77499$ МПа; $\vartheta_s = 12,59e - 4$, и на материале (латунь ЛС-59) с диаграммой (векторное пространство)

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} 2Gs & \text{при } s < \vartheta_s, \\ G(-49s^2 + 0,275s + 25,64e - 4) & \text{при } \vartheta_s \leq s \leq 2\vartheta_s, \\ G(0,078s + 27,27e - 4) & \text{при } s \geq 2\vartheta_s, \end{cases} \quad (9)$$

где $G = 41202$ МПа; $\vartheta_s = 14,27e - 4$.

Программа нагружения, показанная на рис. 2, характерна тем, что на втором участке нагружение проводили при постоянной величине интенсивности деформаций.

По данным экспериментов векторные и скалярные величины определяются по формулам

$$(\sin \vartheta)_{\text{exp}} = \frac{\sigma_1 \sin \varphi + \sigma_3 \cos \varphi}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}}; \quad \sigma_{\text{exp}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}.$$

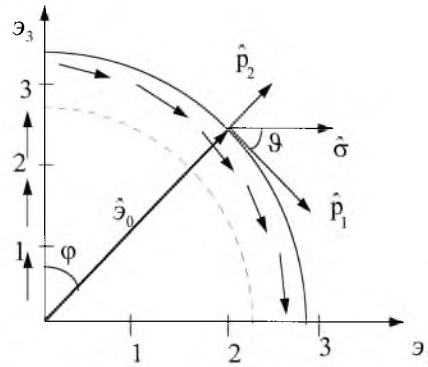


Рис. 2. Двухпараметрическое нагружение образца.

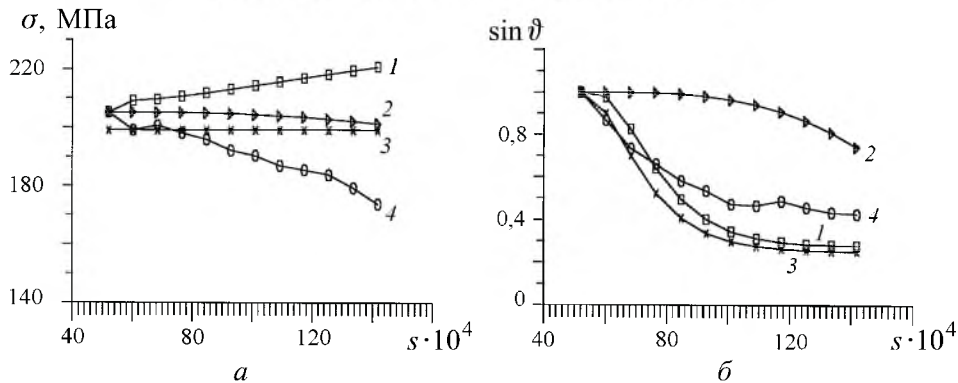


Рис. 3. Характеристики скалярных (а) и векторных (б) свойств стали Ст. 3 при $k = 3,5$: 1 – деформационная теория; 2 – теория Прагера; 3 – теория идеальной пластичности; 4 – эксперимент.

Экспериментальные и теоретические значения с учетом (8) и (9) сравнивались по критерию (3).

Проведена серия экспериментов и расчетов по теории идеальной пластичности при различных значениях k . Рис. 3 иллюстрирует характерные графики, отражающие скалярные и векторные свойства материала. Анализ результатов экспериментов и расчетов показывает, что данный процесс (рис. 2) хорошо описывается (скалярные свойства) теорией идеальной пластичности. Отклонение от эксперимента по этой теории не превышает 10% для стали Ст. 3 при $1 < k < 3,5$ и для латуни ЛС-59 при $1 < k < 2,5$. Расчеты по другим теориям дают значительное расхождение (деформационная теория до 90%, теория Прагера до 30%), причем, как видно из рис. 3,а, деформационная теория в данном случае не отражает качественной картины (векторные свойства) поведения материала, в то время как в расчетах по теориям течения такая картина согласуется с экспериментом. В экспериментах при поддержании постоянной величины интенсивности деформаций падает интенсивность напряжений, а в расчетах, наоборот.

3.2. Процессы нагружения тел в виде траекторий с углом излома $\theta > 90^\circ$ (пространство деформаций). Расчеты выполнялись по теориям Кадашевича Новожилова, Прагера и малых упругопластических деформаций.

Эксперименты проводились на установке СН по методике, описанной в [3]. При таком нагружении происходит частичная разгрузка и повторные пластические деформации. В области разгрузки полагалось, что приращения напряжений и деформаций изменяются согласно закону Гука. Поверхность текучести в пространстве деформаций рассматривалась в виде трансляционно-изотропно упрочняющейся гиперсферы с радиусом $r = \Sigma_0 / 2G$, где Σ_0 – модуль вектора напряжений, при котором происходит излом. При расчетах по теории Кадашевича–Новожилова $r = \sigma_s / 2G$.

Р-М-опыты. Латунь ЛС-59 ($E = 113796$ МПа, $G = 41202$ МПа, $\sigma_s = 144$ МПа). Диаграмма $\sigma = F(s)$ строилась в экспериментах на чистое кручение и аппроксимировалась в виде (9). Нагружение осуществлялось по траекториям с углом излома $\theta = 105; 122$ и 142° . Эксперименты на образцах из стали Ст. 3 проводились по траекториям с углом излома $\theta = 110; 125$ и 150° . Диаграмма для стали Ст. 3 использована в виде (8).

Анализ расчетов для рассмотренных материалов показывает, что с увеличением угла излома отличие теоретических расчетов от экспериментальных данных увеличивается, но при этом величина частичной разгрузки лучше описывается теориями с ростом угла излома.

Результаты, приведенные на рис. 4, свидетельствуют о том, что наибольшие отклонения теоретических данных от экспериментальных наблюдаются в окрестности точки излома. Отклонения увеличиваются также с ростом интенсивности пластических деформаций. Модуль упрочнения уменьшается с увеличением угла излома. Наиболее близко скалярные свойства отражают теории Прагера и Ильюшина. Векторные свойства лучше отражают теории течения. Так, с ростом s угол сближения стремится к нулю, но по деформационной теории это происходит медленнее, чем в эксперименте, а по теориям течения, наоборот.

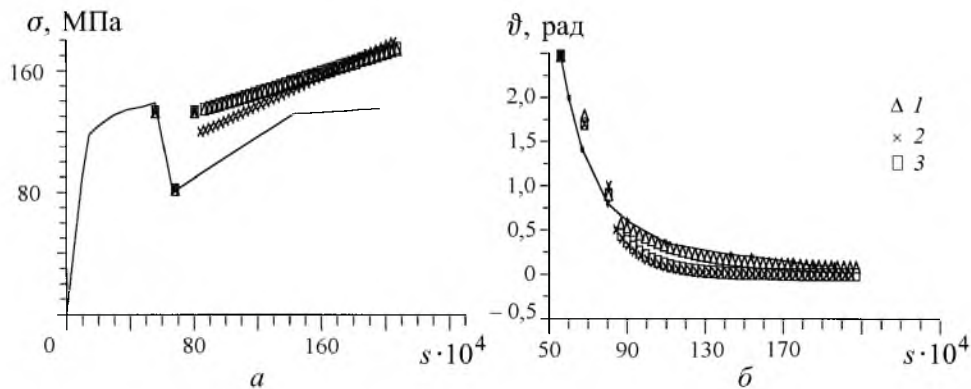


Рис. 4. Характеристики скалярных (а) и векторных (б) свойств латуни ЛС-59 при $\theta = 142^\circ$: 1 – деформационная теория; 2 – теория Кадашевича–Новожилова; 3 – теория Прагера; сплошные линии – результаты обработки экспериментов.

Максимальные отклонения расчетов по теориям представлены в таблице, где над чертой показаны данные для латуни ЛС-59, а под чертой – для стали Ст. 3. Данные для экспериментов 1–3 соответствуют приведенным выше углам излома для указанных материалов.

Максимальные отклонения (%) расчетов по теориям от данных экспериментов на СН

Теория	Зависимость	Эксперимент		
		1	2	3
Деформационная	δ_σ	$\frac{11,8}{117,7}$	$\frac{17,3}{122,7}$	$\frac{23,0}{138,0}$
	δ_ϑ	$\frac{12,0}{42,0}$	$\frac{14,0}{44,0}$	$\frac{17,0}{48,0}$
Кадашевича–Новожилова	δ_σ	$\frac{11,8}{116,3}$	$\frac{17,3}{122,8}$	$\frac{23,0}{138,6}$
	δ_ϑ	$\frac{6,0}{29,0}$	$\frac{9,0}{31,0}$	$\frac{11,0}{35,0}$
Прагера	δ_σ	$\frac{11,8}{117,7}$	$\frac{17,3}{122,7}$	$\frac{23,0}{138,0}$
	δ_ϑ	$\frac{7,0}{32,0}$	$\frac{10,0}{36,0}$	$\frac{13,0}{42,0}$

Заключение. Ни один из вариантов теории, основанный на ассоциированном законе течения, не учитывает “нырка” после излома траектории. Погрешность расчетов по этим теориям составляет 20% и более.

С увеличением длины дуги траектории до точки излома расчеты по теориям Прагера и Прандтля–Рейсса лучше согласуются с экспериментом, чем по деформационной теории.

Для процессов в виде двухзвенных ломаных при активном нагружении и процессов в виде траектории средней кривизны при расчетах инженерных конструкций как традиционными методами, так и методом СН-ЭВМ для упрочняющихся материалов предпочтительно использовать теорию Прагера.

Максимальное отклонение результатов расчетов по различным теориям пластичности от экспериментов имеет место в окрестности излома траектории. При этом расчеты целесообразно вести:

- по теории Прагера, когда излом имеет место в пределах площадки текучести;
- по теории Кадашевича–Новожилова для слабоупрочняющихся материалов (сталь Ст. 3);
- по теории Ильюшина для упрочняющихся материалов.

При $\theta > 90^\circ$ (частичная разгрузка и повторное пластическое деформирование) величина локального разупрочнения увеличивается с ростом θ , а при исчерпании следа запаздывания λ_ε кривая $\sigma \sim \varepsilon$ имеет меньшее упрочнение, чем универсальная кривая. Для описания таких процессов предпочтительна теория Прагера.

При двухпараметрическом нагружении с постоянной интенсивностью деформаций после излома происходит падение интенсивности напряжений. Такой процесс наилучшим образом описывается теорией идеальной пластичности.

Резюме

Запропоновано метод аналізу фізичної достовірності розв'язку задач пластичності й оцінено фізичну достовірність найпростіших варіантів теорії пластичності для деяких плоских процесів складного навантаження. Показано, що неврахування геометрії процесу навантаження приводить до значних похибок у розрахунках за теоріями. Зроблено рекомендації щодо кращого використання класичних теорій для деяких металів за різних видів навантаження.

1. *Ленский В. С.* Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Упругость и неупругость. – 1978. – Вып. 5. – С. 65 – 96.
2. *Ильюшин А. А.* Метод СН-ЭВМ в теории пластичности // Прикл. математика и механика. – 1971. – 35, Вып. 1. – С. 166 – 178.
3. *Бабамуратов К. Ш., Ильюшин А. А., Кабулов В. К.* Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности. – Ташкент: Фан, 1987. – 288 с.
4. *Бабамуратов К. Ш., Сафаев Р. Ш.* Классификация и отбор траекторий деформаций и напряжений в краевых задачах пластичности // Вопр. вычислительной и прикладной математики. – 1987. – № 8. – С. 50 – 60.
5. *Бабамуратов К. Ш., Джумаев Х. Д., Ходжиметов А. И.* Об области применимости некоторых теорий пластичности при сложных нагружениях для траекторий в виде двузвенных ломаных // Изв. АН Уз. ССР. СТН. – 1988. – № 6. – С. 28 – 32.
6. *Бабамуратов К. Ш., Джумаев Х. Д., Ходжиметов А. И.* Моделирование уравнений состояния в теории пластичности // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. – Алма-Ата: Гылым. – 1992. – Ч. 1. – С. 106 – 118.
7. *Бабамуратов К. Ш., Абиров Р. А.* Метод СН-ЭВМ в плоских задачах теории пластичности // Узбек. журн. пробл. механики. – 1996. – № 3. – С. 11 – 17.
8. *Бабамуратов К. Ш., Абиров Р. А., Арифджанов А. З., Каршиев И. М.* Краевые задачи пластичности и физическая достоверность решений // Там же. – 1998. – № 1. – С. 7 – 12.
9. *Васин Р. А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – С. 59 – 126.
10. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
11. *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1959. – 371 с.
12. *Лебедев А. А.* Методы механических испытаний материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1976. – 148 с.
13. *Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г.* Физические уравнения термовязкопластичности. – Киев: Наук. думка, 1982. – 238 с.

Поступила 28. 02. 2000