

УДК 532.542.4

МЕТОДИКА ГІДРАВЛІЧНОГО РОЗРАХУНКУ КОРОТКОЇ ТРУБКИ, ЯКА СПОЛУЧАЄ ДВА ПРОТИЛЕЖНО СПРЯМОВАНІ НАПІРНІ ПОТОКИ РІДИНИ

С. І. КРІЛЬ*, Ю. А. ЛЕВЧАК**

*Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

**Ужгородський державний національний університет

Одержано 20.11.2007

Наведені результати теоретичних і експериментальних досліджень витрати рідини в короткій трубці, яка сполучає два протилежно спрямовані напірні потоки рідини. Розроблена методика розрахунку витрати в залежності від різниці тисків у місцях сполучення потоків, густини і в'язкості рідини, діаметрів труб, швидкісних напорів і транзитних витрат в основних трубах. Показано, що суттєвий вплив на величину витрати має, за інших однакових умов, діаметр короткої трубки. Одержані результати досліджень можуть бути використані, зокрема, у медицині при оперативному лікуванні глибоких венозних тромбозів у випадку, коли операція доповнюється формуванням артеріо-венозної фістули.

Приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований расхода жидкости в короткой трубке, соединяющей два противоположно направленные напорные потока жидкости. Разработана методика расчета расхода в зависимости от разности давлений в точках соединения потоков, плотности и вязкости жидкости, диаметров труб, скоростных напорів и транзитных расходов в основных трубах. Показано, что существенное влияние на величину расхода имеет, при прочих одинаковых условиях, диаметр короткой трубки. Полученные результаты исследований могут быть использованы, в частности, в медицине при операционном лечении глубоких венозных тромбозов в случае, когда операция дополняется формированием артерио-венозной фистулы.

Results of theoretical and experimental studies are presented describing fluid flow in a short tube which connects two oppositely directed pressured flows. Our method of calculation of this fluid flow includes the effects of pressure difference, density variations, viscosity, the tube diameters, the velocity head and the transit flow rates in the supply pipelines. In particular, it was established that the connecting tube diameter has an essential effect on the fluid flow. These results can be widely used, for example, in operations on the venous thrombus when the surgery involves an artery-venous fistula.

ВСТУП

В даній роботі розглядаються два протилежно спрямовані напірні потоки рідини в трубах, сполучених між собою короткою трубкою. Під дією різниці тисків у місцях сполучення здійснюється перетікання рідини із однієї труби в іншу. Основна задача роботи – визначити витрату рідини в короткій трубці для заданих: різниці тисків, транзитних витрат у трубах, діаметрів труб, густини і в'язкості рідини тощо. Для вирішення цієї задачі нами виконані спеціальні теоретичні і експериментальні дослідження. В основу методики гідравлічного розрахунку короткої трубки покладено теорію затопленого витікання рідини через насадку. При цьому додатково враховуються швидкісні напори в основних трубах і вплив транзитних витрат на коефіцієнти місцевих гідравлічних опорів у точках сполучення потоків.

Одержані результати досліджень можуть бути використані, зокрема, у медицині при оперативному лікуванні глибоких венозних тромбозів у випадку, коли операція доповнюється формуванням артеріо-венозної нориці. Тромбектомія із формуванням тимчасової артеріо-венозної нориці є, як

відомо, одним із ефективних способів лікування, позаяк прискорення венозного кровотоку знижує ризик повторного тромбозу і сприяє відновленню ендотелію венозної стінки [1]. Тут доречно відмітити, що досить цікаві результати гідродинамічних досліджень кровотоку в крупних судинах одержані в роботах [2-4]. Так, в [2] використовується гідравлічний підхід до вивчення ступеня впливу локального звуження кровоносної судини на розповсюдження пульсового тиску крові. В [3] гідродинаміка розгалуженої мережі судин моделюється на основі диференціальних рівнянь у частинних похідних, звичайних диференціальних рівнянь, а також на основі систем із зосередженими параметрами. Корисна інформація щодо гідродинаміки крупних судин міститься в [4].

1. ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

У зв'язку з перетіканням рідини доцільно виділити в даній системі труб окремі області I, II, III, IV (рис. 1), потоки в яких характеризуються своїми середніми швидкостями і витратами. Цифри I і II відносяться до повних, а III і IV – до транзитних

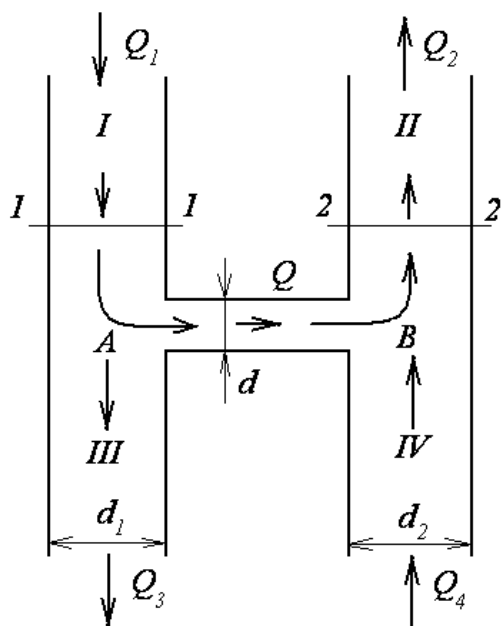


Рис. 1. Схема руху рідини в системі сполучених між собою труб

потоків. Тому далі аналогічними індексами позначаються середні швидкості і витрати у відповідних областях потоку.

Для визначення витрати Q проведемо перерізи 1-1 і 2-2 (рис. 1) і запишемо для них рівняння Бернуллі у формі напорів, при цьому площину порівняння виберемо на рівні осі короткої трубки:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\beta_1 v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\beta_2 v_2^2}{2g} + h_1 + h_2, \quad (1)$$

де ρ – густина рідини; g – прискорення вільного падіння; v_1 і β_1 – середня швидкість і коефіцієнт Коріоліса в перерізі 1-1; v_2 і β_2 – те ж саме в перерізі 2-2; h_1 і h_2 – місцеві втрати гідродинамічного напору на вході в коротку трубку і, відповідно, на виході із неї, зумовлені різкою зміною місцевих швидкостей як за величиною, так і за напрямком.

Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = h_1 + h_2 + \frac{\beta_2 v_2^2}{2g} - \frac{\beta_1 v_1^2}{2g}. \quad (2)$$

Аби одержати на основі рівняння (2) формулу для визначення витрати Q , потрібно насамперед виразити усі доданки в правій частині цього рівняння через середню швидкість руху рідини в короткій трубці v . Для цього використаємо балансові рівняння витрат:

$$Q_1 = Q + Q_3, \quad (3)$$

$$Q_2 = Q + Q_4. \quad (4)$$

Поділимо обидві частини рівняння (3) на площу поперечного перерізу першої труби ω_1 , а обидві частини рівняння (4) – на площу поперечного перерізу другої труби ω_2 . Враховуючи при цьому, що $v_1 = Q_1/\omega_1$, $v_2 = Q_2/\omega_2$ і $v = Q/\omega$, маємо

$$v_1 = \frac{\omega}{\omega_1} \left(1 + \frac{Q_3}{Q} \right) = \left(\frac{d}{d_1} \right)^2 \left(\frac{Q_1}{Q} \right) v, \quad (5)$$

$$v_2 = \frac{\omega}{\omega_2} \left(1 + \frac{Q_4}{Q} \right) = \left(\frac{d}{d_2} \right)^2 \left(\frac{Q_2}{Q} \right) v. \quad (6)$$

Місцеві втрати напору h_1 і h_2 відповідно дорівнюють

$$h_1 = \zeta_1 \frac{v^2}{2g}, \quad (7)$$

$$h_2 = \zeta_2 \frac{v^2}{2g}, \quad (8)$$

де ζ_1 і ζ_2 – коефіцієнти місцевих гідравлічних опорів.

Враховуючи вирази (5)–(8), перетворимо рівняння (2) до вигляду

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \left[\zeta_1 + \zeta_2 + \left(\beta_2 \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 - \beta_1 \left(\frac{d}{d_1} \right)^4 \right) \left(\frac{Q_1}{Q} \right)^2 \right] \frac{v^2}{2g},$$

звідки

$$v = \frac{\sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}}}{\sqrt{\zeta_1 + \zeta_2 + \left[\beta_2 \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 - \beta_1 \left(\frac{d}{d_1} \right)^4 \right] \left(\frac{Q_1}{Q} \right)^2}}. \quad (9)$$

Витрату рідини в короткій трубці знаходимо за формулою

$$Q = v\omega. \quad (10)$$

Підставивши замість v його вираз (9), одержимо

$$Q = \omega \frac{\sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}}}{\sqrt{\zeta_1 + \zeta_2 + \left[\beta_2 \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 - \beta_1 \left(\frac{d}{d_1} \right)^4 \right] \left(\frac{Q_1}{Q} \right)^2}}. \quad (11)$$

Введемо позначення

$$\mu = \quad (12)$$

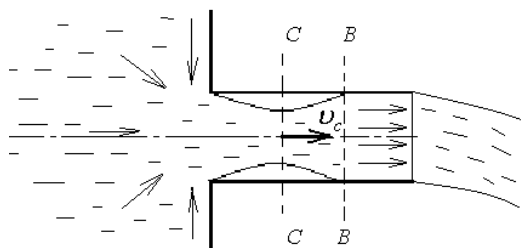


Рис. 2. Схема течії рідини в зовнішній циліндричній насадці

$$= \frac{1}{\sqrt{\zeta_1 + \zeta_2 + \left[\beta_2 \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 - \beta_1 \left(\frac{d}{d_1} \right)^4 \right] \left(\frac{Q_1}{Q} \right)^2}}$$

де μ – коефіцієнт витрати.

Тоді вираз для витрати набуває спрощеного вигляду

$$Q = \mu \omega \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}}. \quad (13)$$

Якщо позначити через H_p різницю п'єзометричних напорів

$$H_p = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g}, \quad (14)$$

то вираз (13) можна переписати так

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_p}. \quad (15)$$

Тепер переходимо до визначення коефіцієнтів місцевих гідравлічних опорів ζ_1 і ζ_2 .

Коефіцієнт ζ_1 визначимо аналогічно випадку витікання рідини під сталим геометричним напором H через зовнішню циліндричну насадку [5, 6]. При вході в коротку трубку, яка є аналогом насадки, потік обтікає її крайку і на початку самої трубки утворює стиснуту струмину, яка далі розширюється і заповнює увесь поперечний переріз трубки, тоді як навколо стиснутої струмини утворюється водовертна зона (рис. 2). Повна втрата напору h_1 на усьому шляху руху рідини від крайки до перерізу В-В, в якому струмина уже повністю заповнює поперечний переріз трубки, складається із двох видів:

1) на ділянці від крайки до найбільш стиснутого перерізу струмини С-С діє опір крайки $h_{1(окр)}$, аналогічний опору при витіканні рідини в атмосферу через малий круглий отвір у плоскій тонкій стінці, коли струмина дотикається лише крайки отвору [5]:

$$h_{1(окр)} = \zeta_0 \frac{v_c^2}{2g},$$

де ζ_0 – коефіцієнт опору крайки отвору; v_c – середня швидкість руху рідини в стиснутому перерізі С-С;

2) на ділянці від стиснутого перерізу С-С до перерізу В-В діє опір $h_{1(роз)}$, аналогічний опору раптового розширення труби [5]:

$$h_{1(роз)} = \frac{(v_c - v)^2}{2g}.$$

Тому повна втрата напору h_1 дорівнює:

$$h_1 = \zeta_0 \frac{v_c^2}{2g} + \frac{(v_c - v)^2}{2g}. \quad (16)$$

Швидкість v_c визначимо із гідравлічного рівняння нерозривності

$$Q = v\omega = v_c\omega_c = v_c\varepsilon\omega, \quad (17)$$

де ω_c – площа найбільш стиснутого перерізу струмини; $\varepsilon = \omega_c/\omega$ – коефіцієнт стиску струмини. Із (17) одержуємо вираз $v_c = v/\varepsilon$, з врахуванням якого рівняння (16) набуває вигляду:

$$h_1 = \frac{1}{\varepsilon^2} [\zeta_0 + (1 - \varepsilon)^2] \frac{v^2}{2g}. \quad (18)$$

Порівнявши між собою вирази (7) і (18), одержимо

$$\zeta_1 = \frac{1}{\varepsilon^2} [\zeta_0 + (1 - \varepsilon)^2]. \quad (19)$$

Коефіцієнт стиску ε , який входить до (19), відноситься до так званого повного досконалого стиску струмини, коли краї плоскої тонкої стінки, в якій міститься малий круглий отвір, не впливають на процес витікання.

В даному випадку величина ε , а також коефіцієнт швидкості витікання φ залежать лише від числа Рейнольдса

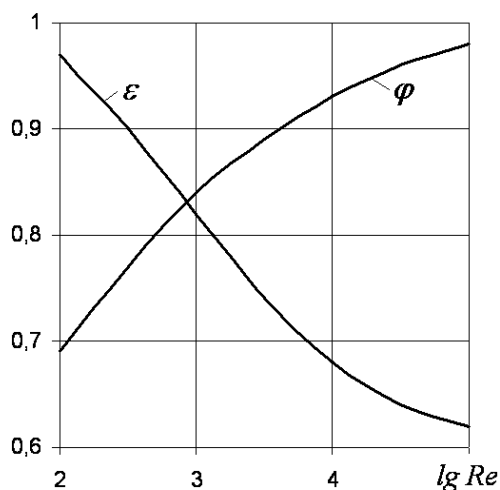
$$Re = \frac{d\sqrt{2gH}}{\nu}, \quad (20)$$

де ν – кінематична в'язкість рідини.

На рис. 3 наведені графіки, запозичені із [5], де даються значення коефіцієнтів ε і φ в залежності від $\lg Re$. Для заданого числа Re коефіцієнт ε визначається безпосередньо із відповідного графіка, тоді як коефіцієнт опору крайки отвору ζ_0 визначається через величину φ [5]:

$$\zeta_0 = \frac{1}{\varphi^2} - 1. \quad (21)$$

Однак у випадку, коли круглий отвір, до якого прилаштовано коротку трубку, розташований у

Рис. 3. Залежності параметрів ε і φ від $\lg Re$

стіни круглої труби і транзитна витрата $Q_3 \neq 0$, формулу (19) слід переписати у вигляді

$$\zeta_1 = \frac{1}{\varepsilon^2} [\zeta_0 + (1 - \varepsilon)^2] \psi, \quad (22)$$

де ψ – поправочний коефіцієнт, який визначається експериментально і враховує вплив транзитної витрати Q_3 та діаметрів d і d_1 на величину ζ_1 .

Що стосується коефіцієнта місцевого гідравлічного опору ζ_2 , то його можна визначити по аналогії з відповідним коефіцієнтом опору для так званого витяжного трійника. Рекомендації щодо визначення коефіцієнтів опору витяжних трійників наведені, зокрема, в [7]. Скориставшись ними, можемо написати

$$\zeta_2 = a \left[1 + \left(\frac{Q}{Q_2} \right)^2 \left(\frac{d_2}{d} \right)^4 - 2 \left(1 - \frac{Q}{Q_2} \right)^2 \right] \times \left(\frac{Q_2}{Q} \right)^2 \cdot \left(\frac{d}{d_2} \right)^4, \quad (23)$$

де a – емпіричний коефіцієнт, величина якого залежить від Q/Q_2 та d/d_2 . Зокрема, для $(d/d_2)^2 \leq 0.3$ і $(Q/Q_2) \leq 1$, коефіцієнт $a = 1$ [7].

Маючи загальні вирази для коефіцієнтів ζ_1 і ζ_2 , розглянемо три окремі випадки. У першому випадку друга труба відсутня, а з першої рідина витікає через коротку трубку в атмосферу при сталому геометричному напорі H_1 . В даному випадку коефіцієнт ζ_2 у формулі (12) потрібно прийняти рівним нулю, а величину $\beta_2 (d/d_2)^4 (Q_2/Q_1)^2$ замінити одиницею. Якщо, окрім цього, вважати, що транзитна витрата Q_3 відсутня і, отже,

$(Q_1/Q) = 1$, то формула (12) набуває, з врахуванням виразу (22), вигляду

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2} [\zeta_0 + (1 - \varepsilon)^2] \psi_1 - \beta_1 \left(\frac{d}{d_1} \right)^4}} \quad (24)$$

і в даному разі поправочний коефіцієнт ψ_1 враховує вплив лише стінок труби на величину ζ_1 .

Другий випадок є аналогічним першому, однак додатково враховується наявність транзитної витрати Q_3 в процесі витікання із труби в атмосферу. У такому випадку коефіцієнт витрати μ визначається за формулою:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2} [\zeta_0 + (1 - \varepsilon)^2] \psi - \beta_1 \left(\frac{d}{d_1} \right)^4 \left(\frac{Q_1}{Q} \right)^2}}, \quad (25)$$

в якій коефіцієнт ψ враховує вплив транзитної витрати та діаметрів основної труби і короткої трубки на величину ζ_1 .

У третьому випадку розглядається процес затопленого перетікання рідини із першої труби в другу при сталій різниці геометричних напорів $H = H_1 - H_2$ та при відсутності транзитних витрат Q_3 і Q_4 . В даному випадку $Q_1 = Q = Q_2$, тому формула (12) набуває, з врахуванням (22) і (23), вигляду:

$$\mu = \left(\frac{1}{\varepsilon^2} [\zeta_0 + (1 - \varepsilon)^2] \psi_1 + \right. \quad (26)$$

$$\left. + \left[1 + \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 \right] + \left[\beta_2 \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 - \beta_1 \left(\frac{d}{d_1} \right)^4 \right] \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Формули (24) – (26) далі використовуються для обробки експериментальних даних.

2. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Досліди проводилися на лабораторній установці, схема якої зображена на рис. 4.

Установка складається із двох вертикальних полівінілових прозорих труб 1 і 2 з круглими отворами у стінках; короткої трубки 3, яка прилаштована до отворів і сполучає труби 1 і 2; крана 4, за допомогою якого регулюється транзитна витрата Q_3 . Нижній кінець труби 2 закритий. Короткою трубкою були металеві трубки діаметрами 0.088, 0.206 і 0.325 см та довжиною від 3 до 5 їхніх діаметрів, тому ці трубки працюють як зовнішня циліндрична насадка.

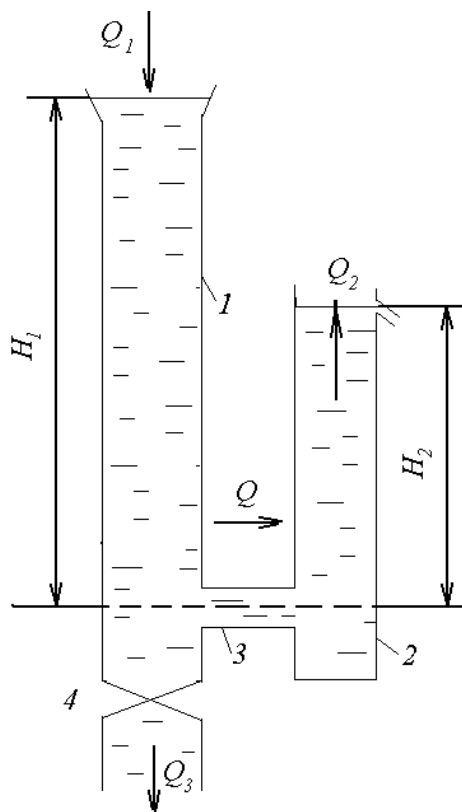


Рис. 4. Схема лабораторної установки

Здійснені три серії дослідів. Перша серія стосується дослідження процесу витікання через коротку трубку в атмосферу при сталому геометричному напорі H_1 та при закритому крані 4. У другій серії досліджено аналогічний процес витікання, однак при відкритому крані 4, тобто при наявності транзитної витрати. Третя серія присвячена вивченню процесу затопленого перетікання рідини із першої труби в другу при сталій різниці геометричних напорів $H = H_1 - H_2$.

Метою проведення першої і другої серій дослідів є визначення ступеня впливу стінок труби і, відповідно, транзитної витрати Q_3 на величину місцевого гідравлічного опору ζ_1 , тобто мова йде про визначення поправочних коефіцієнтів ψ_1 і ψ . Третя серія дослідів передбачує встановлення достовірності формули (26), яка стосується окремого випадку, коли відбувається перетікання при відсутності транзитної витрати Q_3 . У випадку перетікання при наявності транзитної витрати експериментально дослідити на даній установці коефіцієнт витрати нам не вдалося.

При проведенні першої серії дослідів полівінілова труба 2 була знятою з установки, а труба 1 діаметром $d_1 = 0.6$ см повністю наповнювала-

ся водою при закритому вільному кінці короткої трубки. В процесі витікання води при відкритому вільному кінці короткої трубки сталість напору H_1 забезпечувалася неперервним надходженням води в полівінілову трубу 1 з витратою, рівною витраті витікання. В досліді вимірювалися об'єм води W , яка витікає із короткої трубки протягом довільного фіксованого часу t , та температура води T . Витрата витікання Q визначалася за виразом $Q = W/t$, а в'язкість води, в залежності від T , – за довідниковими даними. Вимірювання витрати Q проводилися для кожної із коротких трубок при трьох геометричних напорах H_1 : 50, 150 і 300 см. В кожному конкретному випадку досліди повторювалися декілька разів, після чого визначалося середнє арифметичне значення Q . Дослідне значення коефіцієнта витрати μ визначалося за формулою:

$$\mu = \frac{Q}{\omega \sqrt{2gH_p}}, \quad (27)$$

де H_p – п'езометричний напір у точці сполучення короткої трубки з полівініловою трубою.

При русі води в полівініловій трубі частина кінетичної енергії потоку витрачається на подолання гідравлічного опору тертя по довжині труби H_{mp} , тому величина H_p дорівнює

$$H_p = H_1 - H_{mp}, \quad (28)$$

$$H_{mp} = \lambda_1 \frac{H_1 v_1^2}{d_1 2g}, \quad (29)$$

де λ_1 – коефіцієнт гідравлічного тертя; $v_1 = Q_1/\omega_1$ – середня швидкість руху води в трубі 1. У випадку турбулентного руху величина λ_1 визначається за формулою Блазіуса для гідравлічно гладких труб [5]:

$$\lambda_1 = \frac{0.3164}{Re_1^{0.25}}, \quad (30)$$

де число Рейнольдса $Re_1 = (d_1 v_1/\nu) > 2000$, тоді як для ламінарного руху – за формулою Пуазейля

$$\lambda_1 = \frac{64}{Re_1} \quad (31)$$

при $Re_1 < 2000$.

Поправочний коефіцієнт ψ_1 , який, власне, цікавить нас, визначається за формулою

$$\psi_1 = \frac{\frac{1}{\mu^2} + \beta_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 - 1}{\frac{1}{\varepsilon^2} [\zeta_0 + (1 - \varepsilon)^2]}, \quad (32)$$

яка впливає із (24). При цьому величини ε і ζ_0 визначаються в залежності від числа Рейнольдса

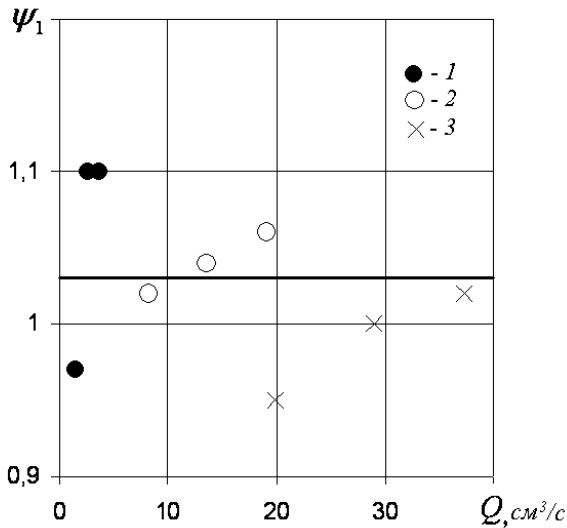


Рис. 5. Залежність поправочного коефіцієнта ψ_1 від Q : 1 – $d=0.088$ см; 2 – $d=0.206$ см; 3 – $d=0.325$ см

Ре = $d\sqrt{2gH_p}/\nu$ способом, аналогічним сказаному в попередньому пункті 1, а для визначення коефіцієнта Кориоліса β_1 використана формула [5]:

$$\beta_1 = 1 + 2.65\lambda_1. \quad (33)$$

На рис. 5 наведені у вигляді точок експериментальні значення коефіцієнта ψ_1 в залежності від витрати витікання Q , а у вигляді суцільної лінії – середні значення цього коефіцієнта. Точки типу 1, 2, 3 відносяться до діаметрів коротких трубок 0.088, 0.206 і 0.325 см відповідно. Видно, що для кожного діаметра трубки величина ψ_1 трошки зростає із збільшенням витрати Q , однак середнє для усіх трьох діаметрів значення ψ_1 дорівнює 1.03. Отже, при $(\omega/\omega_1) = (d/d_1)^2 < 0.3$ ступінь впливу стінок основної труби на коефіцієнт місцевого опору ζ_1 незначний, і тому далі будемо вважати, що $\psi_1 = 1$.

У другій серії дослідів виконувалися аналогічно як в першій, однак додатково вимірювалася, одночасно з Q , транзитна витрата Q_3 , після чого визначалася повна витрата $Q_1 = Q + Q_3$.

Поправочний коефіцієнт ψ визначався у даному випадку за формулою

$$\psi = \frac{\frac{1}{\mu^2} + \left(\frac{Q_1}{Q}\right)^2 \beta_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 - 1}{\frac{1}{\varepsilon^2} [\zeta_0 + (1 - \varepsilon)^2]}, \quad (34)$$

яка впливає із (25). В результаті обробки дослідних даних установлено, що величина ψ залежить

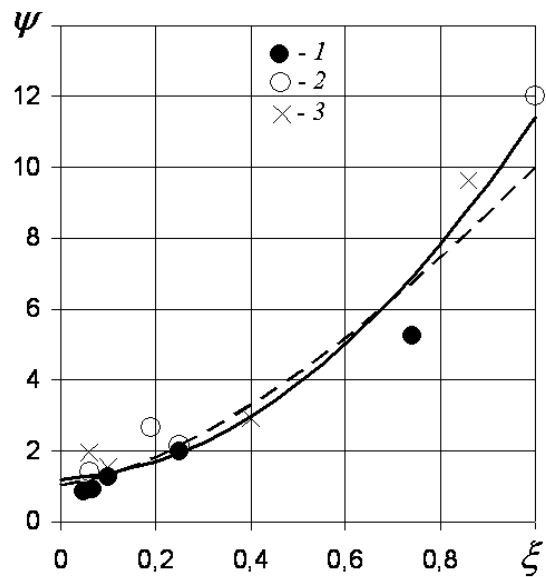


Рис. 6. Залежність поправочного коефіцієнта ψ від ξ : 1 – $d=0.088$ см; 2 – $d=0.206$ см; 3 – $d=0.325$ см; суцільна і пунктирна лінії – розрахунок за (36) і (37) відповідно

від параметра

$$\xi = \frac{Q_3}{Q} \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 = \left(\frac{Q_1}{Q} - 1\right) \left(\frac{d}{d_1}\right)^2. \quad (35)$$

Ця залежність показана на рис. 6, де точками зображені експериментальні значення коефіцієнта ψ , суцільною лінією – розрахунок за поліномом

$$\psi = 9.71\xi^2 + 0.52\xi + 1.2, \quad (36)$$

який апроксимує експериментальні дані і одержаний методом найменших квадратів. Однак, цей поліном потребує своєї корекції, позаяк при $\xi = 0$ він дає значення $\psi = 1.2$ замість $\psi = 1$. Тому розрахункова за поліномом крива додатково апроксимується залежністю:

$$\psi = 1 + 9\xi^{\frac{3}{2}}, \quad (37)$$

якій відповідає штрихова лінія на рис.6. Видно, що штрихова і суцільна лінії цілком добре узгоджуються між собою. Отже, згідно з рис.6, транзитна витрата взагалі-то впливає на величину ζ_1 , що й потрібно враховувати при гідравлічному розрахунку короткої трубки.

Досліди в третій серії проводилися на системі двох полівінілових труб, сполучених між собою короткою трубкою. При цьому кран 4 та нижній кінець другої труби діаметром 0.8 см були закриті, тому вода перетікала з однаковою витратою

із першої труби в другу. Діаметри першої труби дорівнювали 0.6; 0.8 і 1.0 см. Для кожної короткої трубки геометричний напір H_1 змінювався від 100 до 300 см при сталому геометричному напорі $H_2 = 43$ см.

Для вимірювання об'єму води W , яка перетікає із першої труби в другу протягом довільного фіксованого часу t , відбір води здійснювався через злив в околиці вільної поверхні другої труби. Витрата води визначалася аналогічно, як і в першій серії дослідів, а коефіцієнт витрати μ – за формулою (27). При цьому різниця п'єзометричних напорів визначалася за виразом

$$H_p = H - H_{mp},$$

де $H = H_1 - H_2$ – різниця геометричних напорів; H_{mp} – сумарна втрата напору на тертя в обидвох трубах:

$$H_{mp} = \lambda_1 \frac{H_1 v_1^2}{d_1 2g} + \lambda_2 \frac{H_2 v_2^2}{d_2 2g}. \quad (38)$$

За відповідних умов, для яких були визначені дослідні значення коефіцієнта витрати μ_d , обчислювалися за формулою (26) розрахункові значення коефіцієнта витрати μ , потім порівнювалися одна з одною величини μ_d і μ . При обчисленні величини μ коефіцієнт Кориоліса β_2 визначався за формулою, аналогічною формулі (33), а коефіцієнт гідравлічного тертя λ_2 – за формулами, аналогічними (30), (31).

В результаті виконаних досліджень виявилось, що відносне відхилення розрахункових величин μ від дослідних μ_d складає в середньому 1.8% і знаходиться в межах похибок вимірювання витрати Q . Це й свідчить про достовірність формули (26). Наведені вище результати теоретичних і експериментальних досліджень у сукупності дають можливість розробити методику гідравлічного розрахунку короткої трубки.

3. МЕТОДИКА ГІДРАВЛІЧНОГО РОЗРАХУНКУ КОРОТКОЇ ТРУБКИ

Будемо вважати, що заданими є параметри: перепад тиску на кінцях короткої труби Δp ; діаметри короткої трубки d , першої труби d_1 і другої – d_2 ; повна витрата рідини в першій трубці Q_1 ; транзитна витрата рідини в другій трубці Q_4 ; густина ρ і кінематична в'язкість рідини ν . Гідравлічний розрахунок короткої трубки полягає у визначенні витрати Q в цій трубці.

В основу методики гідравлічного розрахунку короткої трубки покладено вираз (15). В даному

разі коефіцієнт витрати μ визначається за формулою (12), а величини ζ_1 і ζ_2 , які входять до (12), – за формулою (22), з урахуванням (37), і за формулою (23), при $a = 1$, відповідно.

Поділимо обидві частини рівняння (15) на μQ_1 . В результаті одержимо

$$\frac{1}{\mu} \frac{Q}{Q_1} = \frac{\omega \sqrt{2gH_p}}{Q_1}$$

або, позначивши через $\bar{Q} = Q/Q_1$ безрозмірну витрату в короткій трубці,

$$\frac{1}{\mu} \bar{Q} = \frac{\omega \sqrt{2gH_p}}{Q_1}. \quad (39)$$

Підставимо в (39) замість μ його вираз (12), при цьому врахуємо формули (22) і (23) для визначення відповідних коефіцієнтів ζ_1 і ζ_2 , які входять до (12), а також замінимо величину Q_2 на суму (4). Потім піднесемо обидві частини одержаного рівняння до квадрату і виконаємо низку елементарних математичних перетворень. В результаті одержимо безрозмірне алгебраїчне рівняння для \bar{Q} :

$$\left[1 + A \left(1 + 9 \left(\frac{d}{d_1} \right)^3 \left(\frac{1}{\bar{Q}} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \bar{Q}^2 +$$

$$+ (1 + \beta_2 \bar{Q})(\bar{Q} + \bar{Q}_4)^2 \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 - \beta_1 \left(\frac{d}{d_1} \right)^4 \bar{Q} = B; \quad (40)$$

$$A = \frac{1}{\varepsilon^2} [\zeta_0 + (1 - \varepsilon)^2], \quad (41)$$

$$B = \frac{2gH_p \omega^2}{Q_1^2} + 2\bar{Q}_4^2 \left(\frac{d}{d_2} \right)^4, \quad (42)$$

де $\bar{Q}_4 = Q_4/Q_1$ – безрозмірна транзитна витрата в другій трубці.

Для вищезазначених вихідних параметрів величини A і B є сталими.

Позначимо ліву частину рівняння (40) через $Y(\bar{Q})$:

$$Y(\bar{Q}) = \left[1 + A \left(1 + 9 \left(\frac{d}{d_1} \right)^3 \left(\frac{1}{\bar{Q}} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \bar{Q}^2 +$$

$$+ (1 + \beta_2 \bar{Q})(\bar{Q} + \bar{Q}_4)^2 \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 - \beta_1 \left(\frac{d}{d_1} \right)^4 \bar{Q}. \quad (43)$$

Дослідимо значення функції $Y(\bar{Q})$ при $\bar{Q} = 0$. Справа у тому, що величина

$$\left(\frac{1}{\bar{Q}} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \bar{Q}^2, \quad (44)$$

яка входить до (43), характеризується "невизначеністю" типу $\infty \cdot 0$ при $\bar{Q} = 0$.

Перетворимо вираз (44) до вигляду

$$\frac{\left(\frac{1}{\bar{Q}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\bar{Q}^2}}, \quad (45)$$

який приводить до "невизначеності" типу ∞/∞ . Застосувавши до (45) правило Лопітала, одержимо:

$$\lim_{\bar{Q} \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\frac{1}{\bar{Q}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\bar{Q}^2}} \right] = \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\bar{Q}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\bar{Q}=0} = 0. \quad (46)$$

Отже, в точці $\bar{Q} = 0$ функція (43) приймає, з урахуванням (40), кінцеве значення:

$$Y(\bar{Q})|_{\bar{Q}=0} = (\bar{Q}_4)^2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4. \quad (47)$$

Алгебраїчне рівняння (40) розв'язується чисельним або графічним методом. В разі графічного розв'язування задають довільні наближені значення \bar{Q}_i ($i = 1, 2, 3$), потім обчислюють відповідні їм значення функції $Y(\bar{Q}_i)$, якою є ліва частина рівняння (40), і будують графік цієї функції. Далі проводять ординатну лінію $B = \text{const}$, якій відповідає права частина рівняння (40). За абсцисою точки перетину кривої $Y(\bar{Q})$ з ординатною лінією $B = \text{const}$ визначають наближене значення безрозмірної витрати \bar{Q} , а потім й саму витрату $Q = \bar{Q} \cdot Q_1$.

Розглянемо приклад гідравлічного розрахунку короткої трубки.

Нехай $\Delta p = 50$ мм рт.ст.; $d = 0.1$ см, $d_1 = 0.8$ см, $d_2 = 1.2$ см; $Q_1 = 70.34$ см³/с, $Q_4 = 90.43$ см³/с; $\rho = 1.05$ г/см³; $\nu = 0.04$ см²/с.

При виконанні гідравлічного розрахунку насамперед визначають п'єзометричну висоту H_p , яка відповідає заданому перепаду тиску Δp мм рт.ст. Оскільки висоті 735.6 мм рт.ст. відповідає тиск $9.81 \cdot 10^4$ Па, заданій висоті 50 мм рт.ст. відповідає перепад тиску $\Delta p = 50 \cdot 9.81 \cdot 10^4 / 735.6$ Па. В такому разі маємо, згідно з (14):

$$H_p = \frac{1}{\rho g} \Delta p = \frac{1}{1050 \cdot 9.81} \cdot \frac{50 \cdot 9.81}{735.6} \cdot 10^4 = 0.6473 = 64.73.$$

Подальші розрахунки виконуються у наступній послідовності.

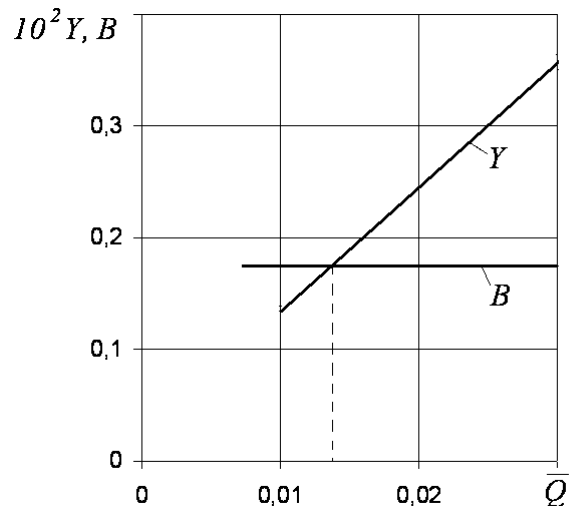


Рис. 7. Графіки функції $Y(\bar{Q})$ і величини B

Визначається число Рейнольдса $Re = d\sqrt{2gH}/\nu$ і відповідні йому величини ε і φ на рис. 3, після цього знаходиться за формулою (21) коефіцієнт опору ζ_0 . Далі обчислюється за формулою (41) величина A та визначаються співвідношення діаметрів d/d_1 , d/d_2 і безрозмірна транзитна витрата \bar{Q}_4 . Після цього обчислюються площі поперечних перерізів відповідних труб ω_1 і ω_2 та середні швидкості руху рідини $v_1 = Q_1/\omega_1$ і $v_2 = Q_4/\omega_2$ в цих трубах. За знайденими числами Рейнольдса $Re_1 = d_1 v_1/\nu$ і $Re_2 = d_2 v_2/\nu$ обчислюються за формулою (30) відповідні їм коефіцієнти гідравлічного тертя λ_1 і λ_2 , а потім визначаються за формулою (33) коефіцієнти Коріоліса β_1 і β_2 . Зрештою, обчислюється за виразом (42) величина B .

В результаті виконання усіх вищезазначених обчислень функція (43) набуває вигляд

$$Y(\bar{Q}) = \left[1 + 0.6975 \left(1 + 0.01758 \left(\frac{1}{\bar{Q}} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \bar{Q}^2 + (1 + 1.12\bar{Q})(\bar{Q} + 1.2856)^2 \cdot 0.4822 \cdot 10^{-4} - 0.272 \cdot 10^{-3} \bar{Q},$$

а величина $B = 0.00174$.

Для побудови графіка функції $Y(\bar{Q})$ задаються значення $\bar{Q}_1 = 0.01$; $\bar{Q}_2 = 0.02$; $\bar{Q}_3 = 0.03$. Їм відповідають значення функції $Y(\bar{Q}_1) = 0.00138$; $Y(\bar{Q}_2) = 0.00236$; $Y(\bar{Q}_3) = 0.00356$. На рис. 7 показані крива $Y(\bar{Q})$ і ординатна пряма $B = 0.00174$. Видно, що точці перетину цих ліній відповідає абсциса $\bar{Q} = 0.014$. Отже, шукана витрата $Q = \bar{Q} \cdot Q_1 = 0,98$ см³/с.

Аналогічні розрахунки виконані, за інших однакових умов, для діаметрів короткої трубки $d = 0.2$;

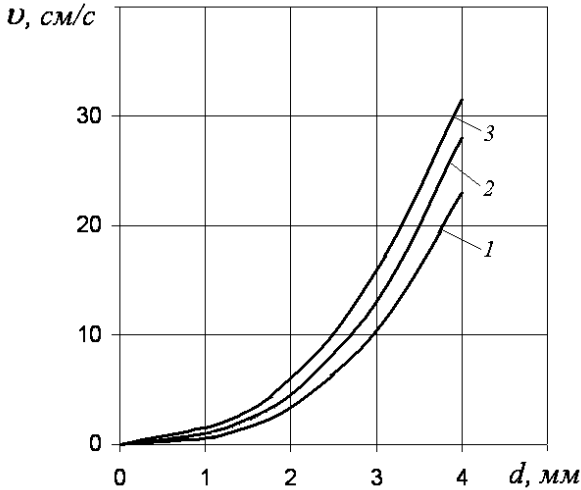


Рис. 8. Залежність швидкості v від діаметра d і перепаду тиску Δp : 1 – $\Delta p = 50$ мм рт.ст.; 2 – $\Delta p = 60$ мм рт.ст.; 3 – $\Delta p = 70$ мм рт.ст.

0.3 і 0.4 см, а також для цих же діаметрів $d = 0.1 - 0.4$ см, однак для перепадів тиску $\Delta p = 60$ мм рт.ст. і $\Delta p = 70$ мм рт.ст. Окрім витрати Q обчислена також різниця швидкостей $v = v_2 - v_4 = Q/\omega_2$, яка показує наскільки змінилася середня швидкість руху рідини на ділянці 2 другої труби порівняно зі середньою швидкістю v_4 в результаті сполучення основних труб короткою трубкою. Результати обчислень наведені в таблиці. На рис. 8 показані криві залежності швидкості v від діаметра d при різних перепадах тиску Δp .

Табл. 1. Таблиця розрахункових даних

d , мм	Δp , мм рт.ст.	Q , см ³ /с	v , см/с	v_2 , см/с
1	50	0.98	0.87	80.89
2	50	4.7	4.16	84.18
3	50	11.5	10.20	90.22
4	50	25.6	22.65	102.67
1	60	1.2	1.06	81.08
2	60	5.1	4.51	84.53
3	60	15.0	13.27	93.29
4	60	31.5	27.87	107.89
1	70	1.4	1.24	81.26
2	70	6.1	5.40	85.42
3	70	17.9	15.84	95.86
4	70	36.0	31.86	111.88

Із таблиці випливає, зокрема, що внаслідок сполучення обидвох труб короткою трубкою діаметром $d = 4$ мм середня швидкість на ділянці 2

другої труби збільшиться порівняно з середньою швидкістю на цій ділянці до сполучення труб ($v_4 = Q_4/\omega_2 = 80.026$ см/с) на 28.3; 34.8 і 39.8% при $\Delta p = 50, 60$ і 70 мм рт.ст. відповідно.

ВИСНОВКИ

На основі одержаних результатів теоретичних і експериментальних досліджень стаціонарного процесу перетікання рідини через коротку трубку, яка сполучає два протилежно спрямовані напірні потоки рідини, розроблено методику розрахунку витрати в цій трубці в залежності від різниці тисків в місцях сполучення потоків, фізичних характеристик рідини, діаметрів труб, швидкісних напорів та транзитних витрат в основних трубах. В основу методики розрахунку покладено теорію затопленого витікання рідини через зовнішню циліндричну насадку. В результаті одержано узагальнений вираз для коефіцієнта витрати, який враховує коефіцієнти місцевих гідравлічних опорів на вході в коротку трубку і на виході із неї. Коефіцієнт місцевого гідравлічного опору на вході визначено аналогічно випадку витікання рідини через зовнішню циліндричну насадку в атмосферу при сталому геометричному напорі, однак з додатковим врахуванням впливу діаметра основної труби, в якій розділяється потік, та транзитної витрати в ній на величину цього коефіцієнта. Коефіцієнт місцевого гідравлічного опору на виході із короткої трубки визначаємо по аналогії з відповідним коефіцієнтом гідравлічного опору для витяжного трійника.

Основна задача експериментальних досліджень полягає в тому, щоб визначити ступінь впливу кривизни стінки основної труби, в якій розділяється потік, та транзитної витрати в цій трубці на величину коефіцієнта місцевого гідравлічного опору на вході в коротку трубку. Установлено, що при діаметрі короткої трубки, меншому за половину діаметра основної труби, кривизна стінки цієї труби слабо впливає на величину вищезазначеного коефіцієнта місцевого опору, тоді як вплив транзитної витрати на цей коефіцієнт є значним і тому його треба врахувати при гідравлічному розрахунку короткої трубки.

В результаті виконаних теоретичних і експериментальних досліджень одержано безрозмірне нелінійне алгебраїчне рівняння для визначення витрати в короткій трубці. Результати розрахунків показують, що витрата в короткій трубці, а отже, і середня швидкість руху рідини з'єднаних потоків, суттєво залежать, за інших однакових умов, від діаметра короткої трубки.

Результати даної роботи можуть бути успішно

використані в хірургії при лікуванні глибоких венозних тромбозів у випадку, коли операція доповнюється формуванням артеріо-венозної фістули.

1. Покровский А.В. Клиническая ангиология. – М.: Медицина, 2001. – т.2. – 768 с.
2. Селезов И.Т., Каплун Ю.М. Влияние сужения кровеносного сосуда на распространение пульсового давления крови // Бионика. – 1991. – Вып.24. – С. 50–54.
3. Quarteroni A., Veneziani A. Analysis of a geometrical multiscale model based on the coupling of Ode's and Pde's for blood flow simulations // SIAM Mult Mod Simul. – 2003. – 1. – P. 173–195.
4. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
5. Альтшуль А.Д., Киселев П.Г. Гидравлика и аэродинамика. – М.: Стройиздат, 1977. – 327 с.
6. Кострюков В.А. Основы гидравлики и аэродинамики. – М.: Высшая школа, 1975. – 220 с.
7. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1975. – 559 с.