#### УДК 539.4

# Прогнозування втомної довговічності з урахуванням впливу витримки у часі та багатовісного навантаження на характер злиття тріщин\*

# М. В. Браун, Н. Гао, К. Дж. Міллер

Технічний факультет університету м. Шеффілда, Шеффілд, Великобританія

Розглядаються два аспекти злиття тріщин. Перший аспект стосується режиму, який відомий як взаємодія втоми і повзучості. Вказаний режим представляє собою змінний у часі процес втомного руйнування. Другий аспект відноситься до злиття тріщин в умовах багатовісного напружено-деформованого стану різного виду. Стаття складається з двох частин. У першій частині розглядається модель втомного росту тріщини, в основу якої покладено результати експериментального дослідження нержавіючої сталі AISI 316 при високих значеннях температури та амплітуди деформації і знакозмінному згині з витримкою у часі. Особливістю дослідження є витримка зразків під дією як стискуючих, так і розтягуючих напружень на різних поверхнях на протязі 60 хв, що приводило до виникнення трансзернових коротких та міжзернових довгих тріщин. Останні є найбільш небезпечними, оскільки сприяють злиттю численних коротких тріщин, внаслідок чого виникає магістральна тріщина (стадія II), яка стає причиною руйнування. У другій частині набуває розвитку модель, що описує злиття тріщин та дає можливість прогнозувати втомну довговічність середньовуглецевої сталі, котра знаходить широке застосування при виготовленні елементів машинобудівних конструкцій у випадку багатовісного пропорційного навантаження зі змінною амплітудою. Показано, що моделі, за допомогою яких оцінюється довговічність в умовах великих циклічних деформацій, з метою забезпечення найбільшої адекватності з експериментом повинні враховувати характер злиття тріщин.

Вступ. Поведінка матеріалів в умовах багатовісної втоми, зокрема такої, що залежить від часу, – стара проблема для конструкторів та спеціалістів у галузі руйнування. Це стосується особливо тих випадків, коли втома пов'язана з складним напружено-деформованим станом, що зумовлений пропорційним або непропорційним навантаженням зі змінною амплітудою.

Із літературних джерел відомо спроби отримати розв'язок поставленої задачі в рамках класичного підходу Пальмгрена-Майнера. Згідно з цим підходом передбачається, що підсумування накопичених пошкоджень до руйнування здійснюється за лінійним законом, а сума пошкоджень на всіх етапах внаслідок дії напружень неоднакової величини в умовах різного напружено-деформованого стану дорівнює одиниці. Те, що вказаний підхід приводить до дещо завищених результатів навіть у більшості простих випадків, не дуже хвилював теоретиків, котрі приймали суму накопичених пошкоджень відмінною від одиниці, яка може зменшуватись аж до 0,1. Цей підхід було запропоновано використовувати при випробуваннях в умовах підвищених температур із метою врахування частини часу  $t/t_f$  ( $t_f$  – час до руйнування), що витрачається на накопичення пошкоджень внаслідок повзучості, поряд із тією частиною, що витрачається на накопичення пошкоджень внаслідок циклічної повзучості деформування (мається на увазі незалежна від часу втома) та визначається величиною  $n/N_f$  ( $N_f$  – число циклів до руйнування).

© М. В. БРАУН, Н. ГАО, К. Дж. МІЛЛЕР, 2000

<sup>\*</sup> За матеріалами доповіді на Міжнародній конференції "Оцінка й обгрунтування продовження ресурсу елементів конструкцій". – Київ, 6–9 червня 2000 р.

При вирішенні поставленої задачі виникла потреба відмовитися від підходу до оцінки накопичення пошкоджень, що базується на врахуванні напружено-деформованого стану, як це приймається, зокрема, в модифікованих методах, де застосовується поділ за рівнем амплітуди деформації або за частотою (тобто за швидкістю деформування). Натомість процес накопичення пошкоджень розглядається із залученням таких параметрів, як довжина тріщини та швидкість накопичення пошкоджень, що виражається через швидкість зростання тріщини. Хоча останній підхід є більш складним, все-таки завдяки деяким припущенням він може бути дещо спрощений. Одне з таких припущень полягає в тому, що втомне руйнування визначається лише двома механізмами. Перший з них характеризується розвитком тріщин по площинах найбільшого зсуву, що приводить до виникнення тріщин зсуву (стадія I), другий – зростанням тріщин по нормалі в напрямку найбільшого розтягуючого напруження, внаслідок чого утворюються тріщини нормального відриву (стадія II) [1]. Послідовність вказаних типів розвитку тріщин визначається станом оточуючого середовища, багатовісністю напружено-деформованого стану та властивостями матеріалу [2]. Відмітимо, що тривалість процесу втомного руйнування визначається декількома факторами в залежності від того, який тип зростання тріщини (стадія І чи стадія II) є домінуючим. Дана стаття присвячена розгляду деяких із цих факторів.



Рис. 1. Характер зростання тріщин на стадії I (шляхом зсуву) та стадії II (шляхом нормального відриву) за Форсайтом [1]: a – із затримкою у часі на максимальному рівні деформації розтягу (суцільна лінія) та без затримки (штрихова лінія);  $\delta$  – у лінеаризованому поданні, що ілюструє ефект, викликаний утворенням одиночної тріщини (суцільна лінія) та злиттям кількох тріщин (штрихова лінія).

Прогнозування втомної довговічності ...

1. Залежна від часу втома. Виконані раніше дослідження впливу повзучості на втому в основному проводилися в умовах одновісного розтягу зразків, на які в деяких випадках наносили невеликий ініціюючий надріз. Завдяки надрізу тривалість фази зростання тріщини шляхом зсуву (стадія І) суттєво скорочувалася. При цьому для забезпечення накопичення пошкоджень за рахунок повзучості на максимальному рівні напружень здійснювалась їх затримка. З метою пояснення суттєвого зниження довговічності внаслідок такої затримки було висунуто теорію, згідно з якою руйнування за рахунок повзучості представляється як процес злиття ряду порожнин у матриці матеріалу, які збільшуються, що зумовлює прискорення розвитку тріщини на стадії ІІ. Оскільки тріщини поширюються від однієї порожнини до іншої, процес має стрибкоподібний характер.

На рис. 1 схематично показано зміни швидкості зростання тріщини, котрі, напевно, і призводять до зниження довговічності внаслідок вказаних затримок. Це зниження довговічності, безумовно, зумовлене розвитком та злиттям ряду окремих дрібних тріщин. Так, завдяки наявності великої кількості концентраторів напружень у вигляді кінчиків тріщин, де має місце накопичення втомних пошкоджень, швидкість результуючої тріщини виявляється набагато вищою за ту, що має одиночна тріщина.

У даній роботі показано, що саме границя поділу між численними невзаємодіючими тріщинами на початку стадії І та магістральною тріщиною в кінці стадії ІІ, яка виникла внаслідок злиття дрібних тріщин, і є визначальним чинником щодо характеру залежного від часу втомного руйнування.

**Експериментальні дослідження та їх результати**. Для проведення випробувань використовували циліндричні зразки з нержавіючої сталі AISI 316 в стані поставки, які піддавали гартуванню шляхом витримки в розчині при температурі 1050°С впродовж 30 хв та наступного охолодження у воді. Внаслідок такої термічної обробки матеріал отримав рівновісну структуру аустеніту з середнім розміром зерна 40 мікронів. Як буде показано нижче, розмір зерна має певне значення. Для забезпечення достатньої точності визначення кінетики зростання тріщини поверхню зразків полірували за допомогою алмазної пасти з розміром часток до 1 мікрона.

Випробування проводили за схемою знакозмінного згину з коефіцієнтом асиметрії циклу R = -1 в умовах жорсткого навантаження при  $T = 550^{\circ}$ С. На кожному циклі навантаження, коли деформація сягала найвищого рівня, на протязі 60 хв робили затримку, під час якої напруження релаксували. Такий процес здійснювався при розтягненні верхніх шарів зразка, в той час як нижні шари зазнавали дії стискаючих напружень із затримкою впродовж 1 г. Більш докладно програму таких довготривалих випробувань наведено в роботі [3].

Довжину тріщин, що виникали як на верхній, так і на нижній поверхнях зразка, фіксували за допомогою методу реплік. Таким чином, це дало можливість порівнювати поведінку матеріалу із затримкою впродовж 1 г як при дії розтягуючих напружень (верхня поверхня), так і стискаючих (нижня поверхня).

Як показують проведені дослідження на зразках діаметром 10 мм, магістральна тріщина, що приводить до руйнування, утворюється внаслідок злиття численних дрібних тріщин. Так, наприклад, тріщина, критична довжина якої 5,44 мм, при амплітуді загальної деформації 1,4% виникла внаслідок злиття 31 малої тріщини. Оскільки дрібні тріщини приводять до руйнування, на кожному зразку вибирали по десять тріщин, які докладно аналізували. Відмічено, що дрібні самостійно виникаючі тріщини спочатку швидко зростали, потім на деякій стадії швидкість їх зростання уповільнювалася, а перед злиттям з іншою тріщиною знову підвищувалася. Аналогічно поводять себе дрібні тріщини при наближенні до мікроструктурної перепони. Після подолання останньої швидкість їх зростання прискорюється [4].

Морфологічні дослідження зони руйнування показали [5], що за характером розвитку початкові тріщини аж до самого сповільнення швидкості їх зростання та під час його належать до стадії І. Такі тріщини зсувного типу можуть мати різну орієнтацію відносно поверхні (див., наприклад, рис. 2), оскільки вони поширюються в зразку, що зазнав згину, шляхом зсуву по довільних площинах ковзання, які нахилено під кутом 45° до напрямку дії максимального розтягуючого напруження. Однак мікроскопічні тріщини, що досягли стадії ІІ, маючи ту ж саму орієнтацію, що й на попередній стадії, надалі зливаються і швидко утворюють макроскопічну тріщину [6].



Рис. 2. Три випадки зростання мікротріщин зсуву на стадії І в різних площинах, що переходять на стадії ІІ в тріщини нормального відриву.

Рис. 3 ілюструє кількість тріщин, що виникають на момент руйнування на верхній та нижній поверхнях зразка. Як видно, на поверхні виникає велика кількість тріщин, що зупинилися біля мікроструктурних бар'єрів, які розмежовано інтервалами в 40 мікронів. Однак і поза такими бар'єрами, що представляють собою границі зерен, також є декілька тріщин. На рис. 3,*а* поверхневі тріщини довжиною більш ніж 160 мікронів задля ясності не показано. Вплив злиття тріщин на їх розміри можна оцінити за даними, наведеними на рис. 3, $\delta$ , оскільки декілька тріщин, що знаходяться на розтягненій стороні зразка та відносяться до стадії ІІ, мають глибину більшу,



Рис. 3. Розподіл кількості тріщин за розміром при амплітудах деформації 2,5% (1), 2,0% (2), 1,4% (3) і 0,9% (4): a – довжина поверхневих тріщин, визначена методом реплік на верхній поверхні, яка була розтягнена із затримкою (тріщини довжиною більш ніж 160 мікронів задля ясності не розглядалися);  $\delta$  – глибина поверхневих тріщин на верхній поверхні (зона дії розтягуючих напружень із затримкою), визначена з поздовжніх розрізів зразків;  $\epsilon$  – глибина з поздовжніх розрізів зразків.

ніж 700 мікронів. Із рис. 3, в видно, що відсутність затримки розтягуючих напружень на нижній поверхні зразка знижує кількість та довжину тріщин. Дійсно, на цій поверхні вплив вказаної затримки відсутній, а значить, не встановлена і визначальна роль механізму злиття тріщин.

Модель зростання тріщин. Нижче коротко викладено найбільш суттєві особливості моделі, яка дає можливість прогнозувати значне зниження втомної довговічності, що спостерігається в експерименті, внаслідок злиття тріщин.

Рівняння, що описують зростання тріщин на стадіях І та II, отримано на основі вимірювань довжини тріщин за допомогою методу реплік. У випадку одиночної тріщини вони мають наступний вигляд:

на стадії І –

$$da / dN = B(\Delta \gamma_{\max})^{o} (d-a), \qquad (1)$$

де d – відстань між бар'єрами;  $\Delta \gamma_{\text{max}}$  – амплітуда деформації зсуву; B та  $\delta$  – константи матеріалу, що визначаються експериментально;

на стадії II –

$$da / dN = C(\Delta \varepsilon_R)^{\alpha} a - D, \qquad (2)$$

де  $\Delta \varepsilon_R$  – амплітуда еквівалентної деформації за Ренкіним; *С* та  $\alpha$  – константи матеріалу, що визначаються експериментально; *D* – пороговий параметр тріщини. У випадку жорсткого навантаження (по деформаціях) ці рівняння спрощуються та записуються відповідно так:

на стадії І –

$$da / dN = B'(d-a); \tag{3}$$

на стадії II –

$$da / dN = C'a - D. \tag{4}$$

Останні два рівняння можуть бути використані для визначення перехідної довжини  $a_t$  одиночної тріщини (на момент переходу від стадії I до стадії II) згідно з умовою рівності відповідних швидкостей зростання тріщини. Звідси маємо

$$a_t = \frac{B'd + D}{B' + C'}.$$
(5)

Однак мікроскопічні дослідження показують, що на стадії І утворюється не одна, а декілька тріщин, котрі після переходу до стадії ІІ зливаються та утворюють одну магістральну, яка на момент руйнування має довжину  $a_f$ . Якщо в довільний момент часу на стадії ІІ маємо *n* тріщин, котрі перед руйнуванням зливаються, то значення *n* визначається з лінійного закону

$$n = n_c - k(a_s - a_{st}), \tag{6}$$

де  $n_c$  – критична кількість тріщин на стадії І, що приймають участь в утворенні магістральної тріщини;  $a_s$  – загальна довжина n тріщин.

Із рис. 1,6 слідує, що загальна довжина тріщин, яка відповідає перехідному періоду від стадії І до стадії ІІ, внаслідок їх злиття дорівнює

$$a_{st} = n_c a_t. ag{7}$$

Грунтуючись на лінійному співвідношенні щодо злиття тріщин, яке витікає з даних експерименту, після підсумування по *n* тріщинах для стадії II маємо

$$da_{s} / dN = (C' + kD)a_{s} - n_{c}D(1 + ka_{t}).$$
(8)

Цей вираз стосовно критичної чисельності тріщин на стадії І, коли злиття в різно орієнтованих площинах зсуву відсутнє, спрощується і набуває вигляду

$$da_s / dN = n_c B' d - B' a_s. (9)$$

Інтегрування рівнянь (8) і (9) в межах зміни  $a_s$  від 0 до  $a_{st}$  для стадії І та від  $a_{st}$  до  $a_f$  (у даному випадку  $a_f = 5$  мм) для стадії ІІ дає значення втомної довговічності.

Константи  $B, \delta, C, \alpha$ , що характеризують швидкість зростання тріщини, порогове значення D та мікроструктурний параметр d і входять в рівняння (1) та (2), визначаються з експерименту. Значення коефіцієнта k, враховуючи, що кількість тріщин  $n_c$  встановлюється візуально, а величина n перед руйнуванням стає рівною одиниці, визначається за формулою

$$k = \frac{n_c - 1}{a_f - a_{st}}.$$
(10)

На рис. 4 приведено кінетичні криві зростання тріщини при  $T = 550^{\circ}$ С у випадку циклічного навантаження для  $n_c = 1$  і 3 без затримки та для  $n_c = 1$  і 17 із затримкою впродовж 1 г.

В табл. 1 представлено дані, отримані за допомогою згаданих вище рівнянь при  $T = 550^{\circ}$ С, амплітуді деформації 1%,  $a_f = 5$  мм і d = 60 мікронів у випадку випробувань із затримкою впродовж 1 г і d = 71 мікрон у випадку випробувань без затримки. Вказані значення d є середніми для кількох випробувань.

2. Втома при багатовісному навантаженні та високому рівні деформацій. При випробуваннях на втому з високим рівнем деформації на поверхні зразків може зароджуватися багато тріщин. Їх орієнтація та напрям зростання залежать від виду багатовісного напружено-деформованого стану. Ці тріщини, проходячи стадію І (зсув) та стадію ІІ (нормальний відрив), можуть бути в залежності від орієнтації відносно поверхні класифіковані як такі, що відносяться відповідно до випадку А чи Б [6]. У випадку А тріщини на обох стадіях поширюються паралельно поверхні, в той час як у випадку Б вони поширюються під кутом до неї, тобто в глибину матеріалу. Як приклад на рис. 5,*а* показана найбільш небезпечна ситуація у випадку Б.

# Таблиця І

при цикличному навантаженит оез затримки напружень та з та затримкою						
Спосіб визначення	Навантаження бсз затримки		Навантаження із затримкою впродовж 1 г			
	n <sub>c</sub>	Довговічність	n <sub>c</sub>	Довговічність		
Розрахунок за моделлю на основі одиночної тріщини	1	4554	1	3235		
Розрахунок за моделлю на основі декількох тріщин, що зливаються	3	3541	17	1283		
Перехідний період від стадії І до стадії П		387		126		
Експериментальні значення	5	2615	13	1157		
Підібрані значення n <sub>c</sub>	8	2631	20	1170		

Розрахункові та експериментальні значення втомної довговічності сталі AISI 316 при циклічному навантаженні без затримки напружень та з їх затримкою



Рис. 4. Кінстичні криві зростання тріщин на стадіях І (1–4) та ІІ (5–8) для нержавіючої сталі AISI 316 при  $T = 550^{\circ}$ С та амплітуді деформацій 1% у випадках безперервного циклічного деформування і циклічного деформування із затримкою впродовж І г: 1, 5 –  $n_c = 17$ ; 2, 4, 6, 8 –  $n_c = 1$ ; 3, 7 –  $n_c = 3$ .



Рис. 5. Три розмірні системи тріщиноутворення на стадіях I та II, що ілюструють принципову відмінність між випадками Б (a) і А ( $\delta$ ).

У першій частині даної статті розглядався випадок навантаження балки знакозмінним згином, тобто один із випадків багатовісного навантаження. При цьому використовувалася модель, що грунтується на злитті мікро- і макротріщин на стадії ІІ у випадку Б.

В другій частині розглядалося втомне руйнування циліндричних трубчатих зразків (внутрішній і зовнішній діаметри відповідно 16 і 20 мм) за моделлю, що грунтується на злитті тріщин, в умовах багатовісного навантаження та високого рівня деформації. Випробування проводили на зразках із середньовуглецевої сталі шляхом їх багатовісного навантаження (процес був керований за допомогою комп'ютера) осьовою силою, крутильним моментом, а також зовнішнім та внутрішнім тиском у різних співвідношеннях, що дало можливість реалізувати широкий спектр видів напружено-деформованого стану. В табл. 2 і 3 приведено програми випробувань в умовах пропорційного навантаження за різноманітними траєкторіями, завдяки чому зародження тріщин та їх зростання проходило в різних площинах ( $\varepsilon_{\theta}$ ,  $\varepsilon_z$  та  $\varepsilon_r$  – відповідно колова, осьова та радіальна деформації, що виникають у трубчатому зразку). Було реалізовано 28 програм багатовісного навантаження за окремими траєкторіями з постійною амплітудою деформації (табл. 2).

#### Таблиця 2

Втомні випробування при багатовісному пропорційному навантаженні
з постійною амплітудою деформації

Кількість випробувань	Програма випробувань
4	Знакозмінне кручення за різних амплітуд деформації зсуву
3	Розтяг-стиск за різних амплітуд осьової деформації
7	Випробування в умовах плоского деформованого стану із заданою амплітудою осьових та колових ( $\varepsilon_{\theta} = 0$ ) деформацій
5	Випробування при постійному відношенні деформацій $\varepsilon_2 / \varepsilon_1$ : три при $\varepsilon_2 / \varepsilon_1 = 1,0$ ( $\varepsilon_z = \varepsilon_1, \varepsilon_\theta = \varepsilon_2, \varepsilon_r = \varepsilon_3$ ); одне при $\varepsilon_2 / \varepsilon_1 = 0,57$ ; одне при $\varepsilon_2 / \varepsilon_1 = 0,25$
9	Випробування при постійному відношенні $\lambda$ деформацій зсуву та осьової: п'ять при $\lambda = 0.7$ ; три при $\lambda = 1.5$ ; одне при $\lambda = 2.0$

Крім наведених вище випробувань з метою дослідження накопичуваних пошкоджень додатково проводилися випробування за 14 програмами дворівневого навантаження (НП-випробування). Відповідні дані представлено в табл. 3. Випробування за цими програмами дозволяють виявити недоліки теорії, що грунтується на накопиченні втомних пошкоджень [7]. Для всіх програм випробувань навантаження проводилися в умовах знакозмінного симетричного циклу по деформаціях – осьовій та зсуву, в той час як колова деформація дорівнювала нулю (у випробуваннях на кручення, осьовий розтяг-стиск та осьовий розтяг-стиск разом із крученням) або

змінювалась відносно середнього значення прикладеного внутрішнього тиску. Такі випробування дозволяють отримувати в стінці зразка різні співвідношення  $\xi$  двох головних деформацій в широкому діапазоні значень, коли  $-1,0 < \xi < 1,0$ . У НП-випробуваннях зміна величини амплітуди деформації при заданому фіксованому виді деформованого стану здійснювалася при досягненні певного числа циклів, після чого циклічне навантаження тривало при іншому (відмінному від першого) рівні деформації аж до руйнування. Число циклів в НП-випробуваннях наведено в табл. 4 поряд з іншими даними, що будуть проаналізовані нижче.

#### Таблиця З

Втоми	ні випробування	при багатовісн	ному пропорцій	і́ному навантаженні
в ум	овах контрольон	заних деформа	цій та накопич	ення пошкоджень

Кількість випробувань	Програма випробувань
6	Кручення разом з осьовим навантаженням при λ = 1,5: три НП-випробування при γ <sub>max</sub> = 1,65 → 0,75 та осьовій деформації 1,1 → 0,5 (перехід із високого рівня до низького); три НП-випробування при γ <sub>max</sub> = 0,75 → 1,65 та осьовій деформації 0,5 → 1,1 (перехід із низького рівня до високого)
6	Випробування в умовах плоского деформованого стану при $\varepsilon_{\theta} = 0$ та $\varepsilon_1 = \varepsilon_z$ : три НП-випробування при $\varepsilon_1 = 0,5 \rightarrow 1,4$ (перехід із низького рівня до високого); три НП-випробування при $\varepsilon_1 = 1,4 \rightarrow 0,5$ (перехід із високого рівня до низького)
2	Два рівнодвовісних випробування при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ : два НП-випробування при $\varepsilon_z = 0,65 \rightarrow 0,3$ (перехід із високого рівня до низького), $\varepsilon_z = \varepsilon_1$

На рис. 6 представлена орієнтація тріщин у випадках А і Б на стадіях І та ІІ проведених випробувань [8]. Аналогічно випробуванням на згин із затримкою та без неї показано, що тріщини на стадії І, які поширюються у площинах максимальної деформації зсуву, не можуть зливатися з тріщинами, що виникають на стадії ІІ та поширюються у площинах, нормальних до напрямку максимальної головної деформації розтягу. Злиття може мати місце лише у випадку тріщин, що поширюються в площинах із близькою або збіжною орієнтацією. При непропорційному навантаженні виникають свої особливості [9, 10].

Таким чином, за даними 28 програм випробувань (табл. 2) побудовано звичайні криві втомної довговічності типу Коффіна–Менсона. При цьому приймалося, що руйнуванню відповідає зниження рівня навантаження на 10%, яке приблизно збігається з різким підвищенням швидкості зростання тріщини по товщині стінки трубчатого зразка. Далі ці криві піддавали інтерполяції, внаслідок чого отримували криві сталої довговічності на гамма (Г)-площині при  $N_f = 1000$ , 3000 та 10000 цикл (рис. 7). Із приведених графіків видно, що відповідальними за втомне руйнування є в основному

Вид наванта- ження	Число циклів навантаження		Загальне число циклів наванта-	Відношення прогнозованого числа циклів навантаження до руйнування до загального числа циклів в експерименті			
	n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	ження до руйнуван- ня в експери- менті	Емпі- рична модель	Модель нормаль- ного відриву	Модель одиноч- ної тріщини на стадіях І та ІІ	Модель, що враховує злиття тріщин
$\lambda = 1,5$	$\lambda = 1.5$ Перехід із високого рівня амплітуди деформацій до низького					го	
	150	5559	5709	1,04	0,93	1,49	1,60
	75	8637	8712	0,80	0,72	1,02	1,10
	250	2640	2890	1,60	1,38	2,74	2,97
	Пер	Перехід із низького рівня амплітуди деформацій до високого					
	3000	436	3436	0,97	0,96	1,20	1,25
	5000	240	5240	0,99	0,98	1,11	1,14
	1500	614	2114	0,92	0,90	1,34	1,43
Плоска	Пер	Перехід із низького рівня амплітуди деформацій до високого					
деформа- ція & = 0	3000	400	3400	0,94	0,92	1,08	0,97
	5000	76	5076	1,95	0,99	1,08	1,00
5	1500	203	1703	1,00	0,98	1,30	1,09
	Перехід із високого рівня амплітуди деформацій до низького						
	75	4513	4588	1,58	1,15	2,05	0,87
	150	2050	2200	2,08	1,25	3,96	1,43
	250	758	1008	0,42	0,21	7,26	1,90
Рівнодво-	Пер	Перехід із високого рівня амплітуди деформацій до низького					
вісне наванта- ження ξ = 1	300	8361	8661	0,30	0,01	0,69	0,77
	500	6295	6795	0,06	0,04	0,60	0,71
	Середнє значення			1,05	0,82	1,92	1,30
		Стандартне	е відхилення	0,59	0,43	1,77	0,58
Найнижче значення прогнозованого відношення			0,06	0,01	0,60	0,71	
Найвище значення прогнозованого відношення			2,08	1,38	7,26	2,97	

## Таблиця 4 Порівняння експериментальних і теоретичних даних, отриманих при НП-випробуваннях згідно з табл. 3

два параметри, а саме: максимальна деформація зсуву  $\gamma/2$  та деформація розтягу  $\varepsilon_n$  на площині максимального зсуву [6]. При цьому треба також враховувати ту обставину, що орієнтація цих деформацій у випадках А та Б на стадіях I і II, коли тріщини поширюються паралельно поверхні (випадок

А) та під кутом до неї (випадок Б), може різнитися. На рис. 7,6 штрихпунктирними лініями показано Г-графіки, отримані шляхом розрахунку на основі даних експерименту на одновісну втому, аналіз яких буде зроблено нижче.



Рис. 6. Орієнтація площин, що містять в собі тріщину, на стадії І (розвиток шляхом зсуву) та на стадії ІІ (розвиток шляхом нормального відриву) при різних видах багатовісного навантаження (поверхня заштрихована).

Для прогнозування втомної довговічності досліджуваної середньовуглецевої сталі в умовах багатовісного навантаження за програмами, вказаними в табл. 2, запропоновано чотири різні підходи.

1. Локальний емпіричний підхід із використанням багатовісної еквівалентної деформації [11].

2. Підхід, в основі якого лежить принцип локальних деформацій та концепція поширення тріщин нормального відриву [12].

3. Підхід на базі моделі зростання одиночної тріщини на стадіях І і ІІ.

4. Підхід, що грунтується на моделі зростання тріщин на стадіях І і ІІ з урахуванням їх злиття на стадії ІІ.



Рис. 7. Гамма-площина: a – схематичне подання двох основних параметрів ( $\gamma_{\text{max}}/2$  та  $\varepsilon_n$ ), що визначають втомне руйнування, та відмінність між системами тріщиноутворення (рис. 5), які відносяться до випадків A і Б;  $\delta$  – результати експерименту та дані прогнозування для тріщини нормального відриву у випадку багатовісного циклічного навантаження зразків із середньовуглецевої сталі En8: I – експериментальні дані; 2 – одновісний напружений стан; 3 – рівнодвовісний розтяг; 4 – прогнозовані значення.

Перші два підходи в поєднанні з гіпотезою лінійного підсумовування пошкоджень Пальмгрена–Майнера, як показують проведені випробування, де проблеми лінійного підсумовування дещо перебільшено [9], дають незадовільні результати. Оскільки фізичні механізми втомного руйнування припускають існування щонайменше двох стадій розвитку тріщин (шляхом зсуву і відриву), закон Пальмгрена–Майнера необхідно замінити, на думку авторів, законом двостадійного підсумовування пошкоджень, де кожна фаза відповідає різному характеру поширення тріщини [7]. У такому випадку кращим рішенням було б накопичену до даного часу пошкодженість поставити у відповідність до поточної довжини тріщини (з урахуванням від-

повідного механізму) та встановити зв'язок між швидкістю накопичення пошкоджень та швидкістю зростання тріщини. Це дозволило б визначити момент переходу від одного механізму до іншого, припускаючи, що зміна механізму здійснюється на момент вирівнювання швидкостей зростання тріщини за обома механізмами. Таким чином, можна констатувати, що розглянуту вище модель випробувань при багатовісному навантаженні слід поширити на загальний випадок напружено-деформованого стану.

Узагальнена модель зростання тріщини. Для підвищення адекватності моделі прогнозування довговічності, особливо у випадку НП-випробувань, потрібно дослідити дві окремо домінуючі стадії розвитку тріщин, оскільки тривалість відповідного періоду є сумою часу, що витрачається на зростання тріщини шляхом зсуву (стадія I) і нормального відриву (стадія II).

У розглянутих вище випробуваннях на втому гладких лабораторних зразків при високих амплітудах деформації усі тріщини можуть розглядатися як короткі (на відміну від довгих тріщин типу лінійно-пружної механіки руйнування). Швидкість зростання тріщин достатньо вивченої середньовуглецевої сталі може бути описана наступними рівняннями [13]:

на стадії I (схема поперечного зсуву) -

$$dc / dN$$
 (мікрони/число циклів) = 36700( $\Delta \gamma_{\text{max}}$ )<sup>3,51</sup>(0,5 $\beta d - c$ ); (11)

на стадії II (схема нормального відриву) -

$$dc / dN$$
 (мікрони/число циклів) = 0,427( $\Delta \varepsilon_R$ )<sup>2,06</sup>  $c$  - 0,00212, (12)

де c – глибина тріщини в мікронах; значення 0,00212 – const, відповідає пороговому стану реалізації схеми нормального відриву; d – відстань, яку проходить тріщина до мікроструктурного бар'єру (рис. 8);  $\beta$  – видовий коефіцієнт для тривимірної тріщини за умови, що вона на стадії І має таке саме значення цього коефіцієнту, що й зерно, в якому вона поширюється. Таким чином, вираз (0,5  $\beta d - c$ ) в рівнянні (11) представляє собою розмір остаточної пластичної зони на ділянці між кінчиком тріщини та бар'єром. Цей розмір для даного матеріалу дорівнює (116 – c) мікронів. Остаточно амплітуда єквівалентної деформації за Ренкіним для тріщини нормального відриву визначається за формулою

$$\Delta \varepsilon_R = \Delta \sigma_1 \frac{\Delta \varepsilon_{\rm ex}}{\Delta \sigma_{\rm ex}},\tag{13}$$

де  $\varepsilon_{\rm ek}$  – еквівалентна деформація за Мізесом.

Проінтегруємо рівняння (11) по довжині тріщини в інтервалі  $0...c_t$ ( $c_t$  – довжина тріщини в перехідному стані) для періоду її зростання на стадії І і підсумуємо отримане значення з довговічністю, що визначена при інтегруванні рівняння (12) в інтервалі  $c_t...c_f$  ( $c_f$  – загальна довжина тріщини). В результаті одержимо значення втомної довговічності.



Видовий коефіцієнт  $\beta = 2c/a$ 

Рис. 8. Деталізація геометрії тріщини на стадії І в рівновісному поверхневому зерні.



Рис. 9. Прогнозування довговічності середньовуглецевої сталі при багатовісному навантаженні на основі методів, що враховують локальні деформації (*a*), і на основі підходу, згідно з яким зростання тріщини на стадії І супроводжується переходом в стадію II, на якій злиття тріщини може як мати місце, так і бути відсутнім ( $\delta$ ): *I* – смуга двостандартного розкиду значень довговічності; *2* – модель тріщини нормального відриву; *3* – інтегрування у випадку одиночної тріщини; *4* – одновісне навантаження спільно з крученням; *5*, *6* – випадки А і Б відповідно; *7*, *8* – накопичення пошкоджень відповідно у випадках A і Б; *8* – інтегрування у випадку одиночної тріщини.

Оскільки тріщина поширюється згідно з механізмом, який забезпечує найбільш високу швидкість, величину с, можна визначити за моментом досягнення рівноваги швидкостей, значення яких одержано за допомогою рівнянь (11) та (12). На рис. 9,а приведено значення прогнозованої втомної довговічності, які визначено на основі двох вищезгаданих підходів, що грунтуються на принципі локальних деформацій, та результатів випробувань на одновісне навантаження. Еквівалентні деформації визначаються, згідно з емпіричною моделлю, за даними випробувань на одновісне навантаження та кручення [11]. Вказані значення деформації порівнюються з еквівалентною деформацією, що визначається за Ренкіним [12] згідно з рівнянням (13). Відповідні значення довговічності позначено на рис. 9,а хрестиками. Отримане на основі еквівалентної деформації за Ренкіним значення довговічності представлено також на  $\Gamma$ -площині (рис. 7, $\delta$ ). Видно його задовільну відповідність даним експерименту на багатовісне навантаження. Із рис. 9,6 слідує, що задовільна кореляція розрахункових значень з експериментальними спостерігається у випадку одиночної тріщини, котра при своєму розвитку проходить стадії І та ІІ. Глибина тріщини при руйнуванні була визначена за результатами випробувань на кручення. Однак втомна довговічність здається переоціненою в тих випадках, коли тріщини ініціюються хонінговими рисками на внутрішній поверхні зразка, а також в НП-випробуваннях. Необхідно відзначити, що досягнення тріщиною глибини 160 мікронів у порівнянні з товщиною стінки зразка 2 мм здається фізично нереальним.

У випадку, коли тріщини ініціюються хонінговими рисками, а декілька тріщин n мають можливість на стадії II злитися в одну магістральну, що приводить до руйнування (рис. 10), досягається більш задовільна кореляція. У проведених розрахунках глибина тріщини на заключному етапі прийнята на рівні 10% від перерізу зразка, що рівнозначно 2,7 мм у випадку умовної напівколової тріщини.

З урахуванням вищезгаданого рівняння (12) після деяких перетворень стосовно до стадії ІІ набуває вигляду

$$dc / dN = 0.427 (\Delta \varepsilon_R)^{2.06} c - 0.00212n,$$
(14)

де n = 15 – у випадку зародження тріщини на гладкій поверхні (за даними випробувань на кручення) та n = 23 – у випадку ініціювання тріщини хонінговими рисками (за даними випробувань на одновісне навантаження). При інтегруванні рівняння (14) з  $nc_t$  і перетворенні отриманого виразу у форму рівняння (8) знайдемо тривалість стадії II. У даному випадку рівняння (8) моделює сталу швидкість злиття n мікротріщин на стадії II.

Обговорення результатів. Вище розглядалася залежна від часу втома нержавіючої сталі AISI 316. Із представлених на рис. 4 кінетичних кривих зростання тріщини видно, що у випадку великої кількості тріщин, які зливаються, має місце значне зменшення довговічності. Затримка впродовж 1 г при розтязі приводить до підвищення щільності тріщин та переходу їх як на стадії І, так і на стадії ІІ від трансзернового розвитку до міжзернового.



Рис. 10. Дані теоретичного прогнозування (1, 3, 5) в порівнянні з експериментальними значеннями (2, 4, 6) втомної довговічності, які отримано при випробуваннях нержавіючої сталі AISI 316 при  $T = 550^{\circ}$ С: a – втомні криві, побудовані за запропонованою теорією злиття тріщин (точка A відповідає переходу до процесу руйнування, що характеризується початком злиття тріщин, B і C – границі витривалості);  $\delta$  – порівняння розрахункових та експериментальних даних, отриманих на основі визначення величини  $n_c$  за допомогою реплік або за формулою (15): 1, 2 – циклічне навантаження із затримкою впродовж 1 г  $(T = 550^{\circ}$ С); 3, 4 і 5, 6 – циклічне навантаження без затримки (відповідно  $T = 550^{\circ}$ С і  $T = 20^{\circ}$ С); 7 – смуга двостандартного розкиду; 8 – значення, визначені по  $n_c$  (рівняння (15)) та моделі злиття; 9 – значення, визначені по  $n_c$  та заміром реплік.

Границі зерен, послаблені деформацією повзучості та окисленням, зумовлюють швидке утворення достатньо густої сітки тріщин на стадії І, внаслідок чого знижується довговічність. Треба відзначити, що викликане затримкою впродовж 1 г підвищення швидкості зростання тріщини не дуже помітне [14] і приводить, як можна бачити з рис. 4, лише до невеликого зниження втомної довговічності. Першочергове значення має кількість тріщин, що зливаються. Отже, найбільш вагомим чинником є їх щільність

(рис. 3), яка зростає зі збільшенням амплітуди деформації, але на глибині, що дорівнює розміру мікроструктурного утворення, суттєво знижується. Таким чином, більшість тріщин на стадії І виникає без особливих труднощів, але лише їх обмежена частка переходить в стадію ІІ і викликає руйнування. Зниження щільності тріщин із глибиною зумовлене уповільненням швидкості зростання малих тріщин і їх зупинкою, а також прискоренням розвитку магістральної тріщини внаслідок протікання процесу безперервного злиття малих тріщин на стадії ІІ.

Процес злиття тріщин можна змоделювати так, що при цьому буде в достатній мірі точно відображено зниження довговічності, яке спостерігається при втомній повзучості. Наприклад, на рис. 10 приведено розрахункові криві довговічності для випадків безперервного циклічного деформування та із затримкою впродовж 1 г. При цьому спостерігається їх задовільна відповідність експериментальним даним. Показано, що зниження довговічності при екстраполяції на границю витривалості зумовлене циклічною повзучістю. Величина границі витривалості (на рис. 10 позначена точками B і C) визначається здатністю мікроструктурного бар'єра чинити опір зростанню тріщини. Стосовно представлених на рис. 10 кривих була використана формула Нонг Гао [15]

$$n_{c} = \max\left[\frac{\Delta\varepsilon - \bar{k}\varepsilon_{{}_{\Gamma,B}}}{(1-\bar{k})\Delta\varepsilon_{{}_{\Gamma,B}}} \left(\frac{G - (\Delta\varepsilon)^{m/3}}{G - (\Delta\varepsilon_{{}_{\Gamma,B}})^{m/3}}\right)^{2}\right] \text{ alo } 1,0,$$
(15)

де індекс "г.в" – границя витривалості;  $\bar{k}$ , G – константи матеріалу; m – показник степеня, що характеризує деформаційне зміцнення матеріалу. Видно, що розрахункові значення довговічності, визначені за допомогою величини  $n_c$  (15), практично збігаються з отриманими шляхом аналізу характеру злиття тріщин, що спостерігається на репліках поверхні.

Із теорії злиття тріщин у випадку великої бази випробувань (20000 г) слідує, що в точці A (рис. 10,a) при невеликій амплітуді деформації та одній тріщині може мати місце зміна швидкості її зростання, про що свідчить зміна нахилу втомної кривої. Це може бути зумовлене тією обставиною, що процес зростання тріщини на стадії ІІ в більшій мірі визначається рівнянням (12), ніж рівнянням (14).

У випадку багатовісного навантаження при прогнозуванні довговічності виникають певні труднощі в зв'язку з геометрією випробуваних зразків. Оскільки в багатьох випадках неможливо прослідкувати за зростанням тріщин безпосередньо, враховуючи замкнутість трубчатих зразків при навантаженні внутрішнім тиском, про деякі випадки злиття тріщин робили висновки на основі результатів випробувань на кручення, де тріщини ініціювались на полірованій поверхні. Треба зазначити, що на внутрішній поверхні трубчатих зразків, обробленій шляхом хонінгування, є мікронерівності у вигляді рисок глибиною приблизно 5–10 мікронів. Внаслідок цього руйнування при одновісному навантаженні та навантаженні у випадку Б починалося саме з вказаних рисок. Єдиним виключенням із встановленої закономірності є випробування на рівнодвовісний розтяг, за яких спостерігається підвищення довговічності, як це видно із гамма-площини на рис. 7. Ця обставина зумовлена утворенням поздовжніх тріщин, оскільки на внутрішній поверхні домінуючий вплив має колове напруження. Треба зазначити, що стан рівнодвовісного розтягу задається лише на зовнішній поверхні зразка. Викликані хонінгуванням риски в коловому напрямку не впливають на поздовжні тріщини, в зв'язку з чим довговічність при рівнодвовісному розтязі можна прогнозувати на основі випробувань на кручення або звичайних випробувань на зразках із полірованою поверхнею.

Таким чином, можна зробити висновок, що втомна довговічність визначається двома процесами – зародженням тріщин на стадії І, котрі, зливаючись, утворюють стійкі лінії ковзання і поширюються далі шляхом зсуву, що характеризується параметром  $\Delta \gamma_{\rm max}$ , та злиттям тріщин на стадії ІІ з переходом до поширення шляхом нормального відриву типу пружнопластичної механіки руйнування подібно тому, як це має місце у випадку відомого закону Паріса [16], де використовується амплітуда еквівалентної деформації за Ренкіним. Моделювання фізичного механізму накопичення втомних пошкоджень, що встановлюється за методом реплік по мірі зростання тріщин, дозволяє прогнозувати поведінку матеріалу при багатовісному навантаженні, а також характер процесу накопичення пошкоджень при взаємовпливі повзучості та втоми. Неврахування екстремальної пошкодженості за допомогою моделі, що грунтується на явищі злиття тріщин, відображено в нижній частині табл. 4. Поточна довжина тріщини є більш надійною мірою ступеня пошкодженості в порівнянні з тією, що випливає із закону Майнера. Із рис. 9,6 видно, що значення прогнозованої довговічності при використанні моделі злиття тріщин майже повністю вкладаються в смугу шириною у два стандарти, яка відображає розкид експериментальних даних.

Треба зазначити, що приведена вище модель не поширюється на випадок непропорційного навантаження, котре приводить до суттєвого зниження довговічності [17, 18].

Таким чином, розглянуто процеси розвитку втомних макротріщин на стадії ІІ шляхом нормального відриву внаслідок злиття критичної кількості мікротріщин, що спричиняє руйнування. Ці мікротріщини, в свою чергу, утворилися від численних невзаємодіючих поверхневих мікротріщин на стадії І, що поширюються шляхом зсуву.

Процес руйнування аналізується при двох різних видах випробувань.

1. Випробування циліндричних зразків із нержавіючої сталі AISI 316 на згин при  $T = 550^{\circ}$ C з одноразовою (60 хв) затримкою на циклі, внаслідок чого на верхній поверхні зразка виникають стійкі розтягуючі напруження, на нижній — стискаючі.

2. Втомні випробування середньовуглецевої сталі при багатовісному навантаженні з високим рівнем деформації в умовах кімнатної температури і дев'яти видах напружено-деформованого стану. На основі цих випробувань реалізовано дві форми накопичення пошкоджень із переходом від високої амплітуди деформації до низької та від низької до високої при трьох різних видах напружено-деформованого стану.

## Висновки

1. Злиття втомних мікротріщин, що передує утворенню магістральної тріщини, є однією з головних причин суттєвого зниження опору матеріалів втомному руйнуванню.

2. З метою моделювання характеру злиття необхідно оцінювати поведінку мікротріщин, що виникли на поверхні матеріалу на стадії I (тріщини зсуву), разом із поведінкою мікро- та макротріщин на стадії II (тріщини нормального відриву).

3. Запропоновано перспективну модель, яка враховує швидкість зростання тріщини на стадіях І і ІІ та дозволяє прогнозувати втомну довговічність в умовах, коли на втому накладається повзучість (так звана залежна від часу втома), а також при багатовісному навантаженні з високим рівнем амплітуди деформації, причому в обох випадках прогнозована довговічність вкладається в смугу розкиду шириною у два стандарти.

4. Розглянута модель є більш перспективною в порівнянні з двома теоретичними підходами, в основі яких лежить принцип локальних деформацій і припущення про дієздатність закону Пальмгрена–Майнера, та з підходом, що базується на припущенні про існування одиночної тріщини; перспективність моделі визначається її задовільною відповідністю фізичній реальності.

5. З урахуванням впливу на довговічність кількості поверхневих тріщин  $n_c$  на стадії І, що беруть участь у процесі руйнування, особливе значення при кількісній оцінці випадків зниження міцності від втоми набувають такі чинники, як чистота поверхні зразка, багатовісність напружено-деформованого стану, температура випробувань, амплітуда напружень та деформацій, а також затримка на максимумі напружень.

# Резюме

Рассматриваются два аспекта слияния трещин. Первый аспект относится к режиму, который известен как взаимодействие усталости и ползучести. Указанный режим представляет собой сменный во времени процесс усталостного разрушения. Второй аспект относится к слиянию трещин в условиях многоосного напряженно-деформированного состояния различного вида. Статья состоит из двух частей. В первой части рассматривается модель усталостного роста трещины, в основу которой положены результаты экспериментального исследования нержавеющей стали AISI 316 при высоких значениях температуры и амплитуды деформации и знакопеременном изгибе с выдержкой во времени. Особенность исследования - выдержка образцов под действием как сжимающих, так и растягивающих напряжений на разных поверхностях в течение 60 мин, что приводило к возникновению трансзеренных коротких и межзеренных длинных трещин. Последние наиболее опасны, они способствуют слиянию многочисленных коротких трещин, в результате чего возникает магистральная трещина (стадия II), которая становится причиной разрушения. Во второй части статьи развивается модель, которая описывает слияние трещин и дает возможность прогнозировать усталостную долговечность среднеуглеродистой стали, широко применяющейся при изготовлении элементов машиностроительных конструкций в случае многоосного пропорционального нагружения со сменной амплитудой. Показано, что модели, применяющиеся для оценки долговечности в условиях значительных циклических деформаций, с целью обеспечения наибольшей адекватности с экспериментом должны учитывать характер слияния трещин.

- 1. *Forsyth P. J. E.* A two stage process of fatigue crack growth // Proc. Crack Propagation Symposium, HMSO. 1961. P. 76 94.
- 2. Brown M. W., Miller K. J. Initiation and growth of cracks in biaxial fatigue // Fatigue Eng. Mater. Struct. – 1979. – 1. – P. 231 – 246.
- 3. *Gao N*. Short crack coalescence and growth in stainless steel subjected to cyclic and time dependent deformation. PhD Thesis, University of Sheffield, 1994.
- 4. *The Behavior* of Short Fatigue Cracks European Group on Fracture. Publication N 1 / Eds. K. J. Miller, E. R. de los Rios. – London: Mech. Eng. Publ., 1986.
- Gao N., Brown M. W., Miller K. J. Crack growth morphology and microstructural changes in 316 stainless steel under creep-fatigue cycling // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1995. – 18. – P. 1407 – 1422.
- 6. Brown M. W., Miller K. J. A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions // Proc. Instn. Mech. Engs. 1973. 187. P. 745 755.
- Miller K. J., Zachariah K. P. Cumulative damage laws for fatigue crack initiation and stage I propagation // J. Strain Analysis. – 1977. – 12, N 4. – P. 262 – 270.
- Miller K. J., Brown M. W. Multiaxial fatigue: an introductory review // Subcritical Crack Growth due to Fatigue. Stress Corrosion and Creep / Ed. L. H. Larsson. – London: Elsevier Applied Science, 1984. – P. 215 – 238.
- Zhang W., Miller K. J. A study of cumulative fatigue damage under variable loading mode conditions // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1996. – 19, N 2/3. – P. 229 – 239.
- 10. *Kanazawa K., Miller K. J., Brown M. W.* Low cycle fatigue under out-of-phase loading conditions // Trans. ASME. 1977. **99H**. P. 222 228.
- Kandil F. A., Brown M. W., Miller K. J. Creep and ageing interactions in biaxial fatigue of 316 stainless steel // Multiaxial Fatigue / Eds. K. J. Miller, M. W. Brown, ASTM Special Technical Publication 853, American Society for Testing and Materials. – Philadelphia, 1985. – P. 651 – 668.
- Brown M. W., Buckthorpe D. E. A crack propagation based effective strain criterion // Biaxial and Multiaxial Fatigue, EGF Publication N 3 / Eds. M. W. Brown, K. J. Miller. – London: Mech. Eng. Publ., 1989. – P. 449 – 510.

- Hobson P. D., Brown M. W., E. R. de los Rios. Two phases of short crack growth in a medium carbon steel // The Behaviour of Short Fatigue Cracks, EGF Publication N 1 / Eds. K. J. Miller, E. R. de los Rios. – London: Mech. Eng. Publ., 1986. – P. 441 – 459.
- Wareing J. Creep fatigue behavior of four casts 316 stainless steel // Fatigue Eng. Mater. Struct. - 1981. - 4. - P. 131 - 145.
- Gao N., Brown M. W., Miller K. J. Short crack coalescence and growth in 316 stainless steel subjected to cyclic and time dependent deformation // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1995. – 18. – P. 1423 – 1441.
- Paris P. C., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation // J. Basic Eng. – 1963. – P. 528 – 534.
- Brown M. W., Miller K. J., Fernando U. S. et al. Aspects of multiaxial fatigue crack propagation // Multiaxial Fatigue and Design, ESIS Publication N 21 / Eds. A. Pineau, G. Cailletaud, T. C. Lindley. – London: Mech. Eng. Publ., 1996. – P. 317 – 334.
- Fernando U. S., Brown M. W., Miller K. J. Cyclic deformation and fatigue endurance of En 15R steel under multiaxial out-of-phase loading // Fatigue under Biaxial and Multiaxial Loading, ESIS Publication N 10 / Eds. K. F. Kussmaul, D. L. McDiarmid, D. F. Socie. – London: Mech. Eng. Publ., 1991. – P. 337 – 356.

Поступила 06. 07. 2000