

УДК 532.526

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ПЕРЕМЕННЫХ СКОРОСТЬ–ДАВЛЕНИЕ

Е. В. БРУЯЦКИЙ, А. Г. КОСТИН, Е. И. НИКИФОРОВИЧ, Н. В. РОЗУМНЮК

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 12.09.2007*

Полная система уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–давление решается численным методом конечных разностей для случая вязкой несжимаемой жидкости. Задача формулируется в нестационарной постановке и решается на установление. Дискретизация исходных уравнений реализуется на разнесенных сетках. Для определения давления получено эллиптическое уравнение Пуассона путем подстановки выражений для компонент скорости из уравнений движения в уравнение неразрывности, подобно MAC-методу. Полученный универсальный дискретный аналог уравнений Навье–Стокса в виде системы линейных алгебраических уравнений решается итерационным методом. Эффективность разностной схемы и алгоритм решения тестируются на примере расчета течения на начальном участке плоского прямолинейного канала.

Для випадку в'язкої нестисливої рідини чисельним методом кінцевих відмінностей вирішуються повні рівняння Навье–Стокса у змінних швидкість–тиск. Задача формулюється в нестационарній постановці і розв'язується на встановлення. Для визначення тиску одержано еліптичне рівняння Пуассона шляхом підстановки виразів для компонент швидкості із рівнянь руху в рівняння нерозривності, подібно MAC-методу. Дискретизація вихідних рівнянь реалізується на рознесених сітках. Одержаний універсальний дискретний аналог рівнянь Навье–Стокса у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язується ітераційним методом. Ефективність відмінної схеми і алгоритму вирішення тестуються на прикладі розрахунку течії на початковому відрізьку плоского прямолінійного каналу.

Full Navier-Stokes equations with velocity-pressure variables are solved for viscous incompressible fluid using a finite differences method. The problem is set in a non-stationary formulation and is solved for ascertainment. To determine pressure, elliptic Poisson equation is obtained using substitution of expressions for velocity components into the continuity equation similar to MAC-method. Discretization of initial equations is made on sparsed grids. The obtained universal discrete analog of Navier-Stokes equations in a form of a system of linear algebraic equations is solved with an iteration method. Efficiency of the differences scheme as well as the solution algorithm are tested for a case of flow in an opening section of a flat rectilinear channel.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение течений вязкой несжимаемой жидкости на основе решения полной системы уравнений Навье–Стокса имеют давние традиции. При этом, в силу сложности определения давления, разными исследователями исходная система уравнений записывалась в двух не противоречащих друг другу формулировках. В первом варианте система уравнений записывалась в естественных физических переменных скорость–давление, а во втором варианте – в переменных вихрь–функция тока. Существует и третий вариант решения задач гидромеханики, когда используются переменные скорость–завихренность.

В литературе известно очень ограниченное число случаев, допускающих аналитическое интегрирование уравнений Навье–Стокса [2,3,14]. Поэтому прогресс в этой области возможен лишь за счет использования численных методов. В настоящее время для численного решения уравнений Навье–Стокса существуют и используются несколько десятков разновидностей разностных схем. Большая часть из них разработана применительно к систе-

ме уравнений в переменных вихрь–функция тока [4]. Общим недостатком этого подхода, как известно, является необходимость использования в том или ином виде граничного условия для вихря на твердой поверхности, как, например, условие Тома, которое служит условием первого порядка точности относительно шага сетки. Наряду с этим, использование переменных вихрь–функция тока исключает возможность обобщения этого метода на пространственные и турбулентные потоки. Это обуславливает повышенный интерес исследователей к решению уравнений Навье–Стокса в физических переменных скорость–давление. Такой подход позволяет решать по единому алгоритму как двухмерные, так и трехмерные задачи. Однако этот путь связан с трудностями расчета поля давления, согласованного с полем скоростей.

Уравнения Навье–Стокса обладают рядом специфических особенностей, которые существенно влияют на их численное решение независимо от формы их записи. Одной из существенных особенностей является нелинейность и парабола-эллиптический характер этих уравнений. Поэтому, чтобы правильно моделировать эллиптиче-

скую природу уравнений Навье-Стокса, необходимо использовать эллиптическое уравнение Пуассона для давления. В реальных условиях, при решении внешних задач обтекания каких-либо тел, рассматриваемая область может быть и безграничной, но при численной реализации она моделируется как конечная, а это осложняет выполнение граничных условий на бесконечности. Наличие малого параметра при старшей производной и нелинейность уравнений Навье-Стокса в сочетании с их эллиптичностью, при больших числах Рейнольдса создают условия для образования в жидкости весьма сложных пространственно-временных вихревых структур, приводящих к нестационарности потока жидкости, потери его устойчивости и переходу к турбулентному режиму течения.

Большинство эффективных численных методов интегрирования уравнений Навье-Стокса основывается на использовании асимптотического метода установления, когда для установившихся течений решается нестационарная задача. Основная сложность получения решения нестационарных уравнений Навье-Стокса, наряду с нелинейностью исходной системы уравнений, связана с трудностью одновременного решения уравнений количества движения и уравнения неразрывности на текущем временном шаге.

Один из первых численных методов решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в естественных физических переменных скорость-давление был предложен Чориним [5, 6] и стал известен, как метод "искусственной сжимаемости". Он основан на том, что в уравнение неразрывности добавляется слагаемое с искусственной сжимаемостью, которое обращается в нуль, когда решение устанавливается во времени. Затем были предложены и другие методы. Среди них отметим метод "переменных направлений", разработку которого связывают с именами Дугласа, Писмана, Рэчфорда [7, 8]. Успех метода был обязан использованию процесса редукции многомерной задачи к последовательности одномерных задач с трехдиагональными матрицами. Другим, из наиболее ранних и получивших широкую известность методов решения, является предложенный в работах Харлоу [9, 10] метод "маркеров и ячеек" (MAC). Этот метод в дальнейшем постоянно модифицируется. Он характерен тем, что исходные уравнения записываются в переменных скорость-давление, а для построения конечно-разностной схемы используется разнесенная сетка [11, 12]. Другая группа методов связана с методами расщепления, подробно рассмотренными в книге Г.И. Марчука [13]. Среди

них отметим метод расщепления по физическим процессам О.М. Белоцерковского [12]. Далее на основе идей метода MAC, О.М. Белоцерковским и Ю.М. Давыдовым был предложен "метод крупных частиц" [14]. Широкое применение в задачах гидродинамики получила одношаговая и двухшаговая схема Лакса-Вендрофа и Мак-Кормака [15, 16], которая состоит в использовании схемы "предиктор-корректор". Со временем в ряде работ была предложена группа методов, получившая название SIMPLE методов. Среди них отметим работы С. Патанкара и П. Сполдинга [17, 18]. Обзор указанных и других методов имеется в работах [4, 12–14, 17, 18, 20–28].

В настоящее время, в силу большой практической значимости, поиск эффективных разностных схем и алгоритмов решения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости интенсивно продолжается, а оценка их качества определяется сопоставлением результатов расчетов с другими известными расчетными и экспериментальными данными.

На современном этапе развития вычислительной гидромеханики ее дальнейший прогресс связан с усовершенствованием моделей течения, процессов перемешивания и компьютерных технологий интегрирования исходных уравнений. Последние из них обычно связаны с усложнением вычислительных алгоритмов путем использования схем аппроксимации более высокого порядка точности и структурированных сеток. Однако этот путь связан с возрастающей сложностью вычислительных алгоритмов и программ, который приводит к большим трудностям их реализации, а потому доступен лишь некоторым профессионалам. Это ограничивает возможности их широкого использования в проектно-конструкторской деятельности. Поэтому главная цель нашей работы состоит в создании и обсуждении относительно простого численного алгоритма решения фундаментальных уравнений Навье-Стокса.

1. ОБЩИЙ ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Численные методы решения уравнений Навье-Стокса в процессе своего развития взаимно обогащаются. Поэтому объединение разных идей и подходов способствует созданию новых или модифицированных алгоритмов их расчета. Рассматриваемый ниже метод основан на синтезе идей MAC метода Ф.Х. Харлоу [9, 10], модифицированного варианта SIMPLE метода С.В. Патанка-

ра и П.В.Сполдинга [17, 18] и метода расщепления по физическим процессам О.М. Белоцерковского, Ю.М. Давыдова, В.А. Гущина, В.В. Щенникова [12, 14, 28, 29].

Ниже развивается единый методологический подход к решению системы полных нестационарных дифференциальных уравнений Навье–Стокса в физических переменных скорость–давление для несжимаемой жидкости. Заметим, что одна из основных трудностей численного решения этих уравнений, наряду с нелинейностью, связана с расчетом поля давления, для которого отсутствует отдельное уравнение и граничные условия. Предлагаемый метод не зависит от пространственной размерности задачи.

Рассмотрим исходную систему уравнений Навье–Стокса в прямоугольной декартовой системе координат. При отсутствии внешних сил эта система исходных нестационарных уравнений движения несжимаемой жидкости может быть записана в следующей дивергентной тензорной форме [30, 32]:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_k} \left[-V_i V_k + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k}{\partial X_i} \right) \right],$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial X_k} = 0. \quad (1)$$

Уравнения (1) записаны в безразмерных величинах с использованием общепринятых обозначений: V – скорость, P – давление, τ – время, $\text{Re} = u_0 l / \nu$ – число Рейнольдса. По повторяющемуся индексу подразумевается суммирование.

Для решения этой системы уравнений Навье–Стокса будем использовать метод установления.

Поясним кратко предлагаемую общую схему численного решения рассматриваемой системы уравнений. Пусть в некоторый момент времени $\tau_n = n \cdot \Delta \tau$ ($\Delta \tau$ – шаг по времени, n – число шагов) известны значения полей скорости V_i^n и давления P^n . Требуется определить значения этих параметров течения в момент времени τ_{n+1} при заданных начальных и граничных условиях рассматриваемой задачи. Если использовать метод конечных разностей, то одной из первых проблем, возникающих при численном моделировании каких-либо течений, является задача выбора шаблона расчетной сетки и метода дискретизации исходных уравнений. Для дискретизации по времени используем простейшую схему первого порядка точности с помощью односторонних разностей, то есть

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta \tau}.$$

Далее введем в пространстве (X_i, τ) основную прямоугольную сетку, состоящую из точек $X_i = X_{i,0} + h_i$ в соответствии с декартовой системой координат. Множество точек X_i ($i = 1, 2, 3$) образуют сетку. Известно, что дискретизацию исходных уравнений (1) можно выполнить двумя различными способами – по явной и по неявной схеме соответственно:

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta \tau} = -\frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_k} \left[-V_i^n V_k^n + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V_i^n}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k^n}{\partial X_i} \right) \right], \quad (2)$$

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta \tau} = -\frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_k} \times \left[-V_i^{n+1} V_k^{n+1} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V_i^{n+1}}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k^{n+1}}{\partial X_i} \right) \right]. \quad (3)$$

Здесь верхний индекс n означает последовательные дискретные моменты времени. Для простоты и наглядности общего принципа рассмотрим сначала вариант явной схемы и перепишем уравнение (2) в следующей форме:

$$V_i^{n+1} = V_i^n - \Delta \tau \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} + \Delta \tau \frac{\partial}{\partial X_k} \left[-V_i^n V_k^n + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V_i^n}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k^n}{\partial X_i} \right) \right]. \quad (4)$$

Далее, при нашем подходе удобно перейти к операторной форме рассматриваемого исходного уравнения. Обозначим все конвективные и диффузионные слагаемые системы уравнений (4) с помощью оператора $G^i(V_i^n)$. Тогда в символической форме дискретная по времени с шагом $\Delta \tau$ явная схема этих уравнений запишется в виде:

$$V_i^{n+1} = V_i^n + \Delta \tau \left[G^i(V_i^n) - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} \right], \quad (5)$$

где соответствующий оператор $G^i(V_i^n)$ имеет вид:

$$G^i(V_i^n) = \frac{\partial}{\partial X_k} \left[-V_i^n V_k^n + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V_i^n}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k^n}{\partial X_i} \right) \right]. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что для получения замкнутой системы уравнений необходимо иметь дополнительное уравнение для определения давления. Так как искомая скорость V_i^{n+1} должна удовлетворять не только уравнениям движения (5), но и уравнению неразрывности на $(n+1)$ шаге, то есть:

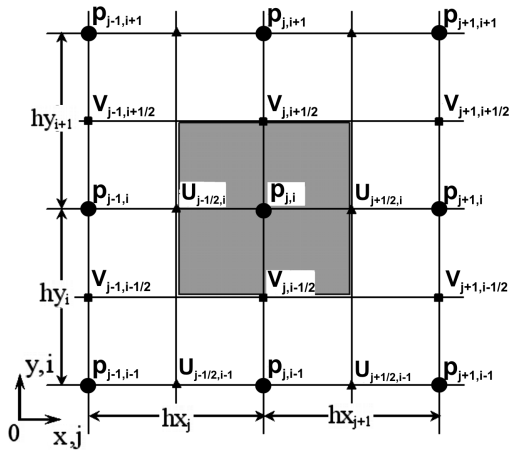


Рис. 1. Фрагмент расположения узлов и ячеек на разнесенной сетке

$$\frac{\partial V_k^{n+1}}{\partial X_k} = 0, \quad (7)$$

то этот факт можно использовать для получения недостающего уравнения для давления. Действительно, следуя алгоритму методов MAC и SIMPLE, подставим выражение (5) в уравнение неразрывности (7). Тогда, выполнив соответствующие преобразования полученного выражения, находим уравнение для определения давления на $(n+1)$ шаге в виде следующего разностного уравнения типа Пуассона:

$$\Delta P^{n+1} = \frac{\partial}{\partial X_k} [V_i^n / \Delta\tau + G^i(V_i^n)]. \quad (8)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, а правая часть уравнения (8) определена через величины с предыдущего шага. Таким образом, для расчета поля скоростей и давления на $(n+1)$ временном шаге имеем замкнутую систему уравнений (5), (8), которая представляет собой эволюционную задачу математической физики со специфическими операторами. Из этой системы уравнений следует, что если в момент времени τ скорость и давление в рассматриваемой расчетной области известны, то можно их определить в следующий момент времени $\tau + \Delta\tau$.

На данном этапе предположим, что конечно-разностная аппроксимация соответствующих дифференциальных операторов по пространственным переменным на принятом шаблоне уже осуществлена. Этот прием позволяет сосредоточить внимание на основных положениях предлагаемого метода. Этап дискретизации конвективных и диффузионных слагаемых в исходных

уравнениях можно выполнить различными способами. Один из них для двумерной задачи будет рассмотрен ниже. Учитывая сказанное, конструктивный путь рассматриваемого метода расчета искомых функций V_i^{n+1} и P^{n+1} в момент времени $\tau_{n+1} = (n+1) \cdot \Delta\tau$ на описательном уровне представляется в виде следующей вычислительной процедуры.

На первом этапе по известным с предыдущего шага значениям скоростей V_i^n вычисляются значения величин $G^i(V_i^n)$ с помощью алгебраических формул, полученных в процессе дискретизации выражения (6). На втором этапе, зная правую часть уравнения Пуассона (8), путем его решения, рассчитывается поле давления P^{n+1} . На третьем этапе, по найденному полю давления P^{n+1} и скорости V_i^n согласно уравнению (5) рассчитывается поле скорости V_i^{n+1} на $(n+1)$ шаге. На этом расчет текущего временного цикла заканчивается. Далее эта процедура повторяется до получения сходящегося решения. Отметим, что в данном алгоритме, скорость, рассчитываемая на каждой новой итерации по времени, уже удовлетворяет уравнению неразрывности и нет необходимости строить какие-либо поправки. Это обстоятельство существенно отличает данный метод от других [17, 20].

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Продолжим рассмотрение предлагаемого метода на примере двухмерной задачи. Вектор скорости V_i будем задавать двумя проекциями U, V на X, Y направления соответственно.

Выпишем систему нестационарных уравнений Навье-Стокса (1) для двумерного случая в проекциях на оси декартовой прямоугольной системы координат в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(U^2)}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \\ + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(V^2)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \\ + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(2 \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (11)$$

В силу сложностей согласования полей скорости и давления, численный алгоритм конечно-разностной схемы удобно реализовать на разностной сетке с разнесенной структурой расположения сеточных узлов. Это означает, что зависимые переменные скорость и давление определяются в разных узлах сетки. Поэтому введем в пространстве (X, Y, τ) основную прямоугольную сетку $S_0(X_j, Y_i, \tau^n)$, состоящую из точек:

$$X_j = X_0 + j \cdot \Delta x, \quad Y_i = Y_0 + i \cdot \Delta y, \quad \tau^n = n \cdot \Delta \tau$$

и две вспомогательные полуцелые сетки S_1 и S_2 :

$$S_1(X_{j+1/2}, Y_i, \tau^n), \quad X_{j+1/2} = X_0 + (j + 1/2) \cdot \Delta x,$$

$$Y_i = i \cdot \Delta y, \quad \tau^n = n \cdot \Delta \tau;$$

$$S_2(X_j, Y_{i+1/2}, \tau^n), \quad X_j = j \cdot \Delta x,$$

$$Y_{i+1/2} = Y_0 + (i + 1/2) \cdot \Delta y, \quad \tau^n = n \cdot \Delta \tau.$$

Выбрав такой сеточный шаблон, введем следующие обозначения:

$$P(X_j, Y_i, \tau^n) = P_{j,i}^n;$$

$$U((j + 1/2) \cdot \Delta x, i \cdot \Delta y, n \cdot \Delta \tau) = U_{j+1/2,i}^n;$$

$$V(j \cdot \Delta x, (i + 1/2) \cdot \Delta y, n \cdot \Delta \tau) = V_{j,i+1/2}^n.$$

Конечно-разностные аналоги уравнений (9)–(11) будем строить на пятиточечном шаблоне в соответствии с известной схемой "крест" [31]. Рассматриваемая область течения разбивается ортогональной сеткой на контрольные объемы (ячейки), в центрах которых находятся узлы основной сетки $S_0(j, i)$. Схема расположения ячеек и узлов аналогична схеме метода MAC [4, 9, 12, 16] и приведена на рис. 1.

В узлах основной сетки расположены сеточные функции давления $P_{j,i}$. Сеточные функции компонентов скорости находятся на серединах граней контрольных объемов, то есть в узлах вспомогательных полуцелых сеток $S_1(j + 1/2, i)$ и $S_2(j, i + 1/2)$ соответственно. Шаги сеток могут быть как равномерными, так и переменными в обоих направлениях.

Внешние границы расчетной области выбираются с учетом совпадения граней внутренних приграничных ячеек с физическими границами области, где задаются граничные условия для компонентов скорости. При таком подходе сеточные функции давления находятся внутри расчетной области и не попадают на физическую границу

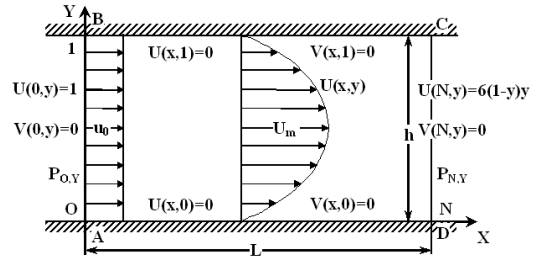


Рис. 2. Принципиальная схема течения в плоском прямолинейном канале

D_h , что позволяет согласовать поля скорости и давления.

Граница расчетной сетки D_h состоит из ячеек с центрами в узлах $(1, i), (N, i), (j, 1), (j, M)$, где N и M – число ячеек сетки в направлениях X и Y соответственно, а точка (j, i) совпадает с центром ячейки [9–11]. В схему включены также слои фиктивных ячеек $(0, i), (N + 1, i), (j, 0), (j, M + 1)$.

При дискретизации рассматриваемых уравнений, как уже отмечалось выше, производные по времени аппроксимируются по обычной схеме первого порядка точности, например,

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \tau} \right]_{j+1/2,i} = \frac{U_{j+1/2,i}^{n+1} - U_{j+1/2,i}^n}{\Delta \tau}, \quad (12)$$

а конечно-разностные аналоги по пространственным переменным для соответствующих производных, входящих в исходную систему уравнений, центрируются в соответствии с выбранным шаблоном. Например, слагаемые с градиентом давления вычисляются с помощью односторонних разностей по формулам вида:

$$\left[\frac{\partial P}{\partial X} \right]_{j+1/2,i}^{n+1} = \frac{P_{j+1,i}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}}{hx_{j+1}}. \quad (13)$$

Для аппроксимации диффузионных членов уравнений используется схема с центральными разностями, как например:

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right]_{j+1/2,i} = \frac{U_{j+3/2,i} - 2U_{j+1/2,i} + U_{j-1/2,i}}{\Delta x^2}, \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right]_{j+1/2,i} = \frac{U_{j+1/2,i+1} - 2U_{j+1/2,i} + U_{j+1/2,i-1}}{\Delta y^2}. \quad (15)$$

Конвективные слагаемые исходных уравнений аппроксимируются по следующим формулам:

$$\left[\frac{\partial U^2}{\partial X} \right]_{j+1/2,i} = \frac{(U \cdot U)_{j+1,i} - (U \cdot U)_{j,i}}{hx_{j+1}}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial(UV)}{\partial Y} \right]_{j+1/2,i} = \\ & = \frac{(U \cdot V)_{j+1/2,i+1/2} - (U \cdot V)_{j+1/2,i-1/2}}{\Delta y}, \quad (17) \end{aligned}$$

а для уменьшения влияния численной вязкости на устойчивость решения используется разностная схема “против потока” [4, 24]. Более полные выражения конечно-разностных аналогов соответствующих слагаемых двухмерных и трехмерных уравнений движения приведены, например, у О.М. Белоцерковского [12] и К.Флетчера [16]. Используемая конечно-разностная схема аппроксимирует рассматриваемые уравнения с первым порядком точности по времени и со вторым порядком точности по пространственным переменным $O(\Delta\tau, h^2)$ и можно показать, что она устойчива. Подставим конечно-разностные формулы в исходную систему уравнений движения (9)–(11). Тогда после простых преобразований получим их дискретные аналоги для U и V направлений соответственно. Полученные разностные алгебраические уравнения, разрешенные относительно компонентов скоростей $U_{j+1/2,i}^{n+1}$, $V_{j,i+1/2}^{n+1}$ и дополненные уравнением неразрывности, преобразуются к следующему конечно-разностному виду:

$$\begin{aligned} U_{j+1/2,i}^{n+1} = & -\frac{\Delta\tau}{hx_{j+1}}(P_{j+1,i}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + \\ & + \frac{2\Delta\tau}{hy_1 \cdot hx_{j+1}} G_{j+1/2,i}^U, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{j,i+1/2}^{n+1} = & -\frac{\Delta\tau}{hy_{i+1}}(P_{j,i+1}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + \\ & + \frac{2\Delta\tau}{hx_1 \cdot hy_{i+1}} G_{j,i+1/2}^V, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\frac{U_{j+1/2,i}^{n+1} - U_{j-1/2,i}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{V_{j,i+1/2}^{n+1} - V_{j,i-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0. \quad (20)$$

Здесь алгебраические выражения $G_{j+1/2,i}^U$ и $G_{j,i+1/2}^V$, полученные в результате дискретизации, являются известными величинами. Соответствующие формулы для них здесь не приводятся ввиду их сложности и ограниченности объема статьи. Шаги сетки приняты переменными и для

них использованы следующие обозначения: $\Delta x = 0.5(hx_j + hx_{j+1})$, $\Delta y = 0.5(hy_i + hy_{i+1})$, $hx_1 = (hx_j + hx_{j+1})$, $hy_1 = (hy_i + hy_{i+1})$.

Полученная система конечно-разностных уравнений хотя и является основной, но пока содержит неизвестные слагаемые с градиентом давления. Поэтому для ее дальнейшего решения используется модифицированный алгоритм SIMPLE [17]. В соответствии с ним давление будем определять, используя уравнение неразрывности (20). Учитывая его структуру, понизим предварительно в выражениях для скоростей $U_{j+1/2,i}^{n+1}$ и $V_{j,i+1/2}^{n+1}$ индексы j и i на единицу соответственно. Тогда получим необходимые выражения для $U_{j-1/2,i}^{n+1}$ и $V_{j,i-1/2}^{n+1}$. Подставим соответствующие выражения для компонентов скоростей в уравнение (20). Тогда после простых преобразований получим следующее разностное уравнение Пуассона для давления:

$$\begin{aligned} d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + \\ + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P(j, i). \quad (21) \end{aligned}$$

Здесь значение свободного члена $f^P(j, i)$ известно по данным с предыдущего шага, а соответствующие коэффициенты дискретизации уравнения (21) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} c_1^P = -\frac{1}{hx_1 \cdot hx_{j+1}}, \quad c_0^P = -\frac{1}{hx_1 \cdot hx_j}, \\ b_1^P = -\frac{1}{hy_1 \cdot hy_{i+1}}, \quad b_0^P = -\frac{1}{hy_1 \cdot hy_i}, \quad (22) \\ d_{j,i}^P = -c_1^P - c_0^P - b_1^P - b_0^P. \end{aligned}$$

Для повышения устойчивости разностной схемы данный подход обобщен на случай неявной разностной схемы. При этом идейная сторона метода полностью сохраняется, но выражения для основных постоянных величин несколько видоизменяются. Однако ключевое уравнение для давления сохраняет свой вид (21) с заменой постоянных величин, например, $f^P(j, i)$ на $\tilde{f}^P(j, i)$ и так далее. А система уравнений для компонентов скорости приобретает вид:

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = \frac{[0.5 \cdot hy_1(P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + \tilde{G}_{j+1/2,i}^U]}{d_{j+1/2,i}^U}, \quad (23)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = \frac{[0.5 \cdot hx1(P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + \tilde{G}_{j,i+1/2}^V]}{d_{j,i+1/2}^V}, \quad (24)$$

где выражения $\tilde{G}_{j+1/2,i}^U$ и $\tilde{G}_{j,i+1/2}^V$ несколько видоизменяются по сравнению с явной схемой и появляются новые алгебраические коэффициенты $d_{j+1/2,i}^U$ и $d_{j,i+1/2}^V$, зависящие от значений искомых переменных с предыдущего шага.

Полученная система конечно-разностных уравнений (18), (20), (21) или (21), (23), (24), моделирующая движение несжимаемой жидкости, носит фундаментальный характер и является универсальным дискретным аналогом полных уравнений Навье-Стокса. Она представляет собой систему алгебраических уравнений, связывающих явно искомое давление с компонентами скорости, на $(n+1)$ временном шаге, которые удовлетворяют уравнению неразрывности. Решение полученной системы разностных алгебраических уравнений такого вида осуществляется известными итерационными методами. Важной особенностью полученного разностного уравнения Пуассона (21) является то, что благодаря использованию разнесенных сеток, граничные условия для его решения не требуются, так как они могут быть определены с помощью комбинации уравнений движения и граничных условий для компонентов скорости [16]. При этом полученный универсальный дискретный аналог уравнений движения позволяет определить граничные значения давления сразу в явном виде. Эффективным способом решения двумерного разностного уравнения второго порядка является алгоритм используемый в методе "переменных направлений", который состоит в редукции исходного уравнения для давления (21) к двум одномерным уравнениям второго порядка с трехдиагональными матрицами, которые решаются методом прогонки.

В данном методе расчеты проводятся для двух основных физических переменных – скорости и давления. Итерационный вычислительный процесс состоит из шагов по времени. В начале каждого временного цикла предполагаются известными поля скорости и давления. Вычислительная процедура выполняется в следующей последовательности. По известным на предыдущем временном шаге значениям $U_{j+1/2,i}^n$ и $V_{j,i+1/2}^n$ по соответствующим алгебраическим формулам рассчитываются коэффициенты дискретизации $G_{j+1/2,i}^U(U^n, V^n)$ и $G_{j,i+1/2}^V(U^n, V^n)$, включая свободный член $f^p(j, i)$. Определив таким образом правую часть уравне-

ния Пуассона, путем его решения находится поле давления P^{n+1} . Далее зная коэффициенты дискретизации и поле давления P^{n+1} по уравнениям (18), (19), или (23), (24), рассчитываются поля скорости $U_{j+1/2,i}^{n+1}$, $V_{j,i+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ шаге. На этом первый расчетный цикл заканчивается и далее он повторяется. Задача решается на установление. Критерием окончания решения служит условие, когда максимальная относительная разность между значениями искомых переменных на предыдущем и следующем временном шаге не превышает заданную величину ошибки ε , то есть:

$$\max \left| \frac{U^{n+1} - U^n}{U^{n+1}} \right| \leq \varepsilon. \quad (25)$$

Важным моментом расчетов является контроль за выполнением уравнения неразрывности.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ НА НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Для проверки новых или модифицированных численных схем и концепций важно выбрать подходящую модельную задачу. В данной работе для тестирования предлагаемой численной схемы выбрана задача о расчете начального участка в плоском прямолинейном канале. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что она имеет простейшую геометрию и в то же время содержит всю сложность и особенности решения полных уравнений Навье-Стокса [3, 21]. Кроме того, на установленном участке канала рассматриваемое течение имеет точное аналитическое решение в виде известного параболического профиля Пуазейля, что позволяет надежно оценить качество численной схемы и точность метода.

Рассмотрим ламинарное течение несжимаемой вязкой жидкости в плоском прямолинейном канале. Принципиальная схема вынужденного течения в канале и конфигурация расчетной области ABCD, на которой заданы граничные условия для компонентов скорости, представлены на рис. 2. Начало введенной декартовой системы координат находится в левом нижнем углу прямоугольной области ABCD.

Для описания движения жидкости используются нестационарные двумерные уравнения Навье-Стокса без каких-либо упрощающих предположений. Для введения безразмерных величин за масштаб длины принимается ширина канала h , за масштаб скорости принята среднерасходная скорость в канале $u_0 = Q/h$, за масштаб времени принята величина h/u_0 , а за масштаб давле-

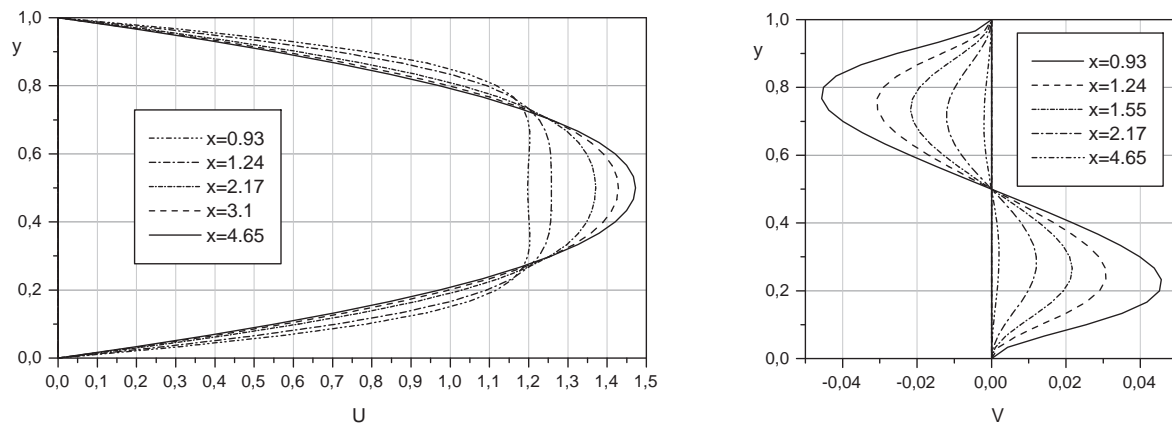


Рис. 3. Расчетное распределение горизонтальной (U) и вертикальной скоростей (V) на начальном участке плоского канала в различных поперечных сечениях ($Re=100$)

ния принят скоростной напор $\rho_0 u_0^2$. В безразмерных величинах $U = u/u_0$, $V = v/u_0$, $X = x/h$, $Y = y/h$, $\tau = tu_0/h$, $P = p/\rho_0 u_0^2$ система нестационарных двумерных уравнений Навье-Стокса с постоянными плотностью и кинематической вязкостью в консервативной форме записана выше в виде системы уравнений (9)–(11).

Характерной особенностью течений в каналах является то, что движение жидкости происходит под действием продольного перепада давления, который на установившемся участке течения постояен $\partial P/\partial X = \text{const}$. Однако заданной величиной в рассматриваемом классе течений примем не перепад давления, а расход жидкости $Q = u_0 \cdot h$ через поперечное сечение канала. Следовательно, при такой постановке задачи число Рейнольдса будет задано, а давление должно определяться в процессе решения. Для завершения постановки задачи должны быть заданы начальные и граничные условия на всех границах расчетной области.

Учитывая, что U и V являются компонентами скорости вдоль X и Y направлений соответственно и жидкость втекает в исследуемую область слева направо, то на верхней BC и нижней AD неподвижных твердых стенках граничные условия для скорости задаются в виде условий прилипания $U|_{\Gamma} = 0$ и не протекания $V|_{\Gamma} = 0$. На входе в расчетную область используется условие невозмущенного потока $U|_{AB} = 1$, $V|_{AB} = 0$. При постановке граничного условия в сечении CD , на выходе из расчетной области, мы сталкиваемся с проблемой моделирования граничного условия на бесконечности. В данном случае простейший

способ постановки граничного условия на "выходе" состоит в использовании так называемых "мягких" условий. Таким образом, начальные и граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:
 начальные условия: $U = 1$; $V = 0$; $P = 0$,
 граничные условия:

$$U|_{AB} = 1; U|_{BC} = 0; U|_{AD} = 0; \partial U/\partial X|_{CD} = 0;$$

$$V|_{AB} = 0; V|_{BC} = 0; V|_{AD} = 0; \partial V/\partial X|_{CD} = 0. \quad (26)$$

Кроме того, на выходе из расчетной области распределение горизонтальной скорости U в вертикальном направлении соответствует известному профилю Пуазейля $U(Y) = 6(1 - Y)Y$.

Граничные условия для давления в постановке задачи отсутствуют. Но при нашем подходе необходимые значения давления в граничных узлах определяются с помощью уравнений движения в комбинации с граничными условиями для скоростей. По существу они представляют собой условия Неймана

$$\partial P/\partial n|_{\Gamma} = \mu_{\Gamma},$$

где n – нормаль к границе области Γ , а μ_{Γ} – известная величина.

В процессе решения задачи необходимо определить эволюцию полей скорости, давления и длину начального участка стабилизации течения при различных числах Рейнольдса. Так как исходная система уравнений (9)–(11) содержит три уравнения и три неизвестных, а именно, две компоненты скорости и давление, то задача замкнута.

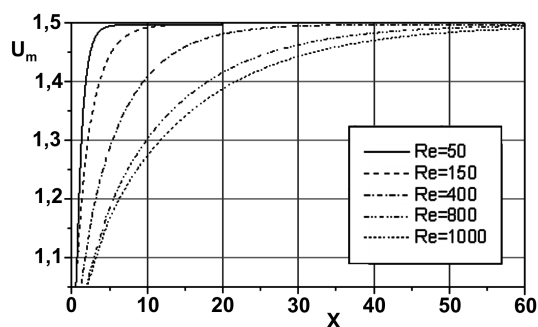


Рис. 4. Расчетные зависимости безразмерной осевой скорости U_m от расстояния X на участке стабилизации течения при различных числах Рейнольдса

Описанная выше численная схема решения уравнений Навье-Стокса в виде универсального дискретного аналога (21)–(24) была реализована в виде компьютерной программы.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Некоторые характерные результаты расчетов распределения полей продольной и поперечной скоростей, длины начального участка и поля давления представлены ниже на соответствующих рисунках. Как и следовало ожидать, расчеты показали, что в ближней от входа в канал области профиль скорости зависит от координаты X . Этот участок канала принято называть участком гидродинамической стабилизации. Критерием его протяженности может служить условие [21]

$$(1 - U_m/U_{mp}) \leq \varepsilon, \quad (27)$$

где U_m – локальная осевая скорость в канале; $U_{mp} = 6(1 - Y)Y|_{y=0.5} = 1.5$ – осевая скорость установившегося течения, соответствующая профилю Пуазейля. На рис. 3 представлены результаты расчетов профилей горизонтальной и вертикальной скорости в различных сечениях канала на участке гидродинамической стабилизации. Приведенные на рисунке расчетные профили соответствуют различным расстояниям поперечных сечений от входа в канал. Координату X для каждого профиля можно получить, умножив его номер на соответствующий шаг $h = L/N$, где L – длина расчетной области, а N – число расчетных точек. Анализ этих результатов показывает, что непосредственно вблизи от входа в канал ($X = 0.93$ и $X = 1.24$) в поле течения существует ядро с посто-

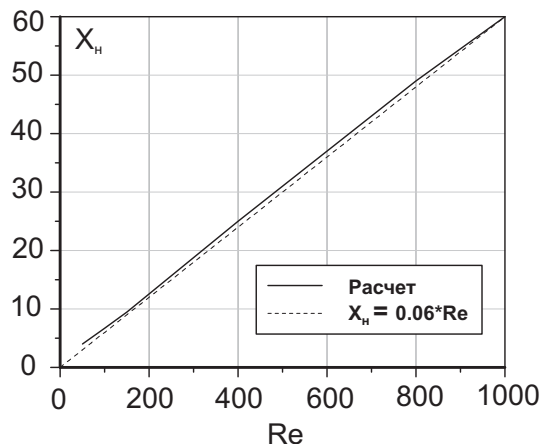


Рис. 5. Расчетная зависимость длины начального участка X_n от числа Рейнольдса

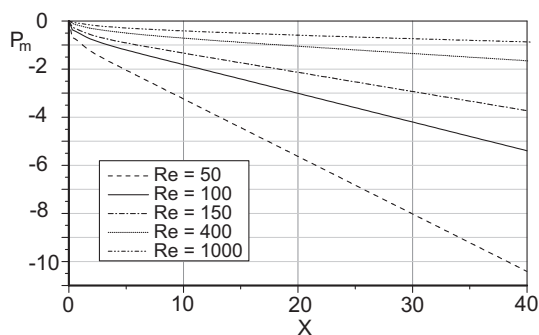


Рис. 6. Расчетное распределение давления вдоль оси X при различных значениях числа Рейнольдса

янным значением горизонтальной скорости, а вблизи стенок развиваются пограничные слои. С удалением от входного сечения профиль горизонтальной скорости U постепенно эволюционирует в параболу, которая реализуется в конце участка стабилизации в результате соединения пограничных слоев. В данном методе рассчитывается и вертикальная скорость течения V , которая, как видно из рис. 3, имеет место вблизи входного сечения в канал, а затем быстро стремится к нулю.

Расчетные профили горизонтальных и вертикальных скоростей сравнивались с аналогичными расчетами, полученными другим методом [21], когда исходные уравнения записываются в переменных функция тока – вихрь. Для приведенных там результатов расчета наблюдается хорошее соответствие с нашими результатами. Отметим, что наш метод позволяет охватить диапазон изменения чисел Рейнольдса от 1 до 1000. Выполненные численные расчеты безразмерной осевой скорости U_m в центральной плоскости канала в зависимости

от расстояния X при различных числах Рейнольдса приведены на рис. 4. Они наглядно иллюстрируют асимптотический характер приближения расчетных профилей к параболе Пуазейля.

На рис. 5 представлена расчетная длина начального участка X_H при различных числах Рейнольдса, которая определялась из условия (27) при $\varepsilon \leq 1\%$. Легко видеть, что в интервале чисел Рейнольдса от 100 до 1000 эта расчетная зависимость, обозначенная на рисунке сплошной линией, хорошо аппроксимируется линейной функцией $X_H(\text{Re}) = 0.06\text{Re}$.

Полученное нами расчетное значение длины начального участка X_H при $\text{Re}=1000$ равно 60. Значение, приведенное у Г. Шлихтинга [3], полученное с использованием зависимостей теории пограничного слоя для числа $\text{Re}=2000$, равно 80. Поскольку исходные уравнения движения записаны и решаются в переменных скорость–давление, то это позволяет в процессе решения сразу рассчитывать и поле давления в канале. В качестве примера на рис. 6 представлено расчетное распределение давления вдоль центральной плоскости канала в зависимости от числа Рейнольдса. Расчеты показывают, что давление монотонно убывает вдоль канала, приближаясь к перепаду давления, соответствующему течению на установившемся участке. Расчетное давление в поперечном направлении Y , как и следовало ожидать, в каждом сечении X постоянно, за исключением непосредственной близости от входа в канал, где наблюдается перестройка как давления, так и скорости.

ВЫВОДЫ

Развит эффективный метод численного решения полной системы нестационарных уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–давление в случае несжимаемой жидкости. Путем конечно-разностной аппроксимации получен универсальный дискретный аналог исходных уравнений движения жидкости. В качестве примера методом установления решена задача о течении жидкости на начальном участке стабилизации течения в плоском прямолинейном канале. Расчеты показали, что процесс установления на начальном участке носит асимптотический характер. С ростом числа Рейнольдса длина участка стабилизации увеличивается, а профиль продольной скорости эволюционирует в параболу Пуазейля. Достоверность и точность расчетов оценивалась путем контроля выполнения уравнения неразрывности и анализа

критерия (27), а также сопоставлением наших расчетов с данными эксперимента и результатами расчетов, полученных другими методами. Используемая численная схема позволяет получить решение задачи до чисел Рейнольдса $\text{Re} \leq 1000$. В дальнейшем представляется целесообразным продолжить методические исследования по расчету данным методом более сложных задач, в которых имеют место возвратные рециркуляционные и вихревые течения.

1. Ламб Г. Гидродинамика.– М.: ГИТЛ, 1947.– 928 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1978.– 736 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1969.– 742 с.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.– М.: Мир, 1980.– 616 с.
5. Chorin A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations // *Math. Comput.*– 1968.– **22**– P. 745–762.
6. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // *J. Comput. Phys.*– 1967.– **2**, **N1**– P. 12–26.
7. Douglas J., Gunn J. E. A general formulation of alternating direction implicit methods. Pt. 1. Parabolic and hyperbolic problems // *Numer. Math.*– 1964.– **6**, **N5**– P. 428–453.
8. Peaceman D. W., Rachford H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // *J. Soc. Indust. Appl. Math.*– 1955.– **3**, **N1**– P. 28–41.
9. Харлоу Ф. Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // *Вычислительные методы в гидродинамике*.–М.: Мир.–1967.– С. 316–342.
10. Harlow F. H. Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // *Phys. Fluids*.– 1965.– **8**, **N12**– P. 2182–2189.
11. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости.– Л.: Гидрометеоздат, 1986.– 352 с.
12. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред: 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Физматлит, 1994.– 448 с.
13. Марчук Г. И. Методы расщепления.– М.: Наука, 1988.– 264 с.
14. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Нестационарный метод "крупных частиц" для газодинамических расчетов // *Ж. Вычисл. Матем. И матем. Физ.*– 1971.– **11**, **N1**– P. 182–207.
15. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.– М.: Мир, 1972.– 418 с.
16. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей.– М.: Мир, 1991.– Т1.–418 с.
17. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.– М.: Энергоатомиздат, 1984.– 152 с.
18. Patankar S. V., Spalding P. V. Calculation Procedure for Heat, Mass, and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows // *Int.j.Heat and Mass Transfer*.– 1972.– **15**– P. 1787–1806.
19. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен.– М.: Мир, 1990.– Т.1 – 384 с.

20. Белов И. А., Исаев С. А., Коробков В. А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости.– М.: Судостроение, 1989.– 256 с.
21. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.– М.: Наука, 1984.– 288 с.
22. Полежаев В. И., Бунэ А. В., Везуб Н. А. и др. Математическое моделирование конвективно-го теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса.– М.: Наука, 1987.– 272 с.
23. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.– Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.– 196 с.
24. Госмен А. М., Пан В. М., Ранчел А. К. и др. Численные методы исследования течений вязкой жидкости.– М.: Мир, 1972.– 323 с.
25. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.– М.: ИЛ, 1963.– 488 с.
26. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене.– К.: Наук. думка, 2003.– 382 с.
27. Быстров Ю. А., Исаев С. А., Кудрявцев Н. А., Леонтьев А. И. Численное моделирование интенсификации теплообмена в пакетах труб.– СПб.: Судостроение, 2005.– 392 с.
28. Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ.– 1975.– **15**, N 1.– С. 197–207.
29. Гуцин В. А. Метод расщепления для решения задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ.– 1981.– **21**, N 4.– С. 1003–1017.
30. Бруязцкий Е. В. Турбулентные стратифицированные струйные течения.– К.: Наукова думка, 1986.– 296 с.
31. Самарский А. А. Теория разностных схем.– М.: Наука, 1977.– 656 с.
32. Хинце И. О. Турбулентность.– М.: Физматгиз, 1963.– 607 с.