

УДК 532.465

ПРИМЕНЕНИЕ TVD–СХЕМ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА В МОДЕЛЯХ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С РАЗНЕСЕННЫМИ СЕТКАМИ

А. НЕСТЕРОВ

Tropical Marine Science Institute, National University of Singapore

Получено 15.05.2007

Схема центральных разностей, часто применяемая для численной аппроксимации адвективных слагаемых уравнений движения в моделях геофизической гидродинамики с разнесенными сетками, может являться причиной возникновения нефизических осцилляций поля скорости и приводит к неустойчивости. В работе предложен метод расчета адвективных слагаемых уравнений движения на основе специальной интерполяции поля скорости, с последующим применением какой-либо из схем уравнений переноса, включая TVD схемы. Метод рассматривается в применении к задачам моделирования течений в водных резервуарах со свободной поверхностью.

Схема центральних різниць, яка часто використовується для чисельної апроксимації адвекційних доданків рівнянь руху в моделях геофізичної гідродинаміки з рознесеними сітками, може бути причиною виникнення нефізичних осциляцій поля швидкості і призводити до нестійкості. В роботі запропоновано метод розрахунку адвекційних компонент рівнянь руху на основі спеціальної інтерполяції поля швидкості, з наступним використанням будь-якої зі схем рівнянь переносу, включаючи TVD схеми. Метод розглядається в застосуванні до задач моделювання течій у водних резервуарах з вільною поверхнею.

Scheme of central differences, which is often used for numerical approximation of the advection terms in the momentum equations in geophysical hydrodynamics models with staggered grids, can induce non-physical oscillations of the velocity field and cause numerical instabilities. This paper proposes a numerical method for momentum advection approximation, which is based on the specific interpolation of the velocity field with subsequent application of any scheme for a scalar transport equation, including TVD schemes. This method is studied in the application to the problems of flow modeling in the water reservoirs with free surface.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах геофизической гидродинамики основной вклад в уравнения движения обычно вносят слагаемые, обусловленные гравитационной силой [1]. С целью упрощения их численной аппроксимации часто используются, так называемые, разнесенные сетки [2]. Средние значения скалярных переменных состояния, таких как температура, соленость, плотность, полагаются при этом в центре численной ячейки, а значения компонент вектора скорости – на соответствующих гранях. Дополнительным преимуществом применения разнесенных сеток является то, что дискретные консервативные формулировки для уравнений переноса скаляров также упрощаются. Проблеме численной аппроксимации адвективных слагаемых уравнения переноса скаляра уделяется особое внимание, так как к свойствам скалярных переменных, как правило, предъявляются повышенные требования по сравнению со свойствами компонент скорости, в частности, монотонность и позитивность. TVD-схемы [2–4] обладают такими свойствами. В то же время, во многих моделях гидродинамики резервуаров со свободной поверхностью (например [5] или [6]) для аппроксимации адвективных слагаемых в уравнениях импульса используется схема

центральных разностей, как самая простая консервативная схема 2-го порядка. Непосредственное применение тех же самых схем адвекции, что и для скаляра, не представляется возможным из-за использования разнесенных сеток.

Однако еще в [2] упоминается, что в случае малой вязкости в задачах геофизической гидродинамики могут возникать проблемы с устойчивостью, такие же, как при решении уравнения Бюргерса. В задачах моделирования течений в резервуарах со свободной поверхностью инерционные слагаемые уравнений движения могут давать существенный вклад по сравнению с баротропными слагаемыми в областях, где скорость или направление потока резко изменяется по тем или иным причинам. Типичными случаями являются: портовые зоны с резкими изменениями береговой линии; каналы и реки с дамбами и порогами; прибрежные регионы морей с большими градиентами глубин; области осушения/затопления. Например, при моделировании поля скорости в канале с поперечной дамбой с помощью модели [5] вблизи кромки дамбы возникали нефизические осцилляции поля скорости, выделенные на рис. 1 жирными стрелками. Для изучения влияния инерционных слагаемых горизонтальная вязкость в этом примере полагалась равной нулю. Поле скорости моделировалось как

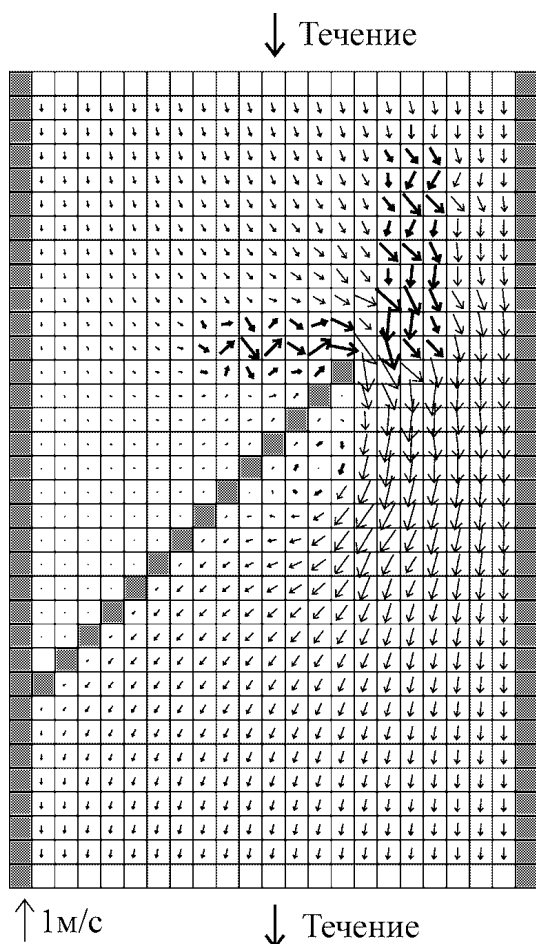


Рис. 1. Осцилляции поля скорости вблизи острой дамбы: расчет без горизонтальной вязкости

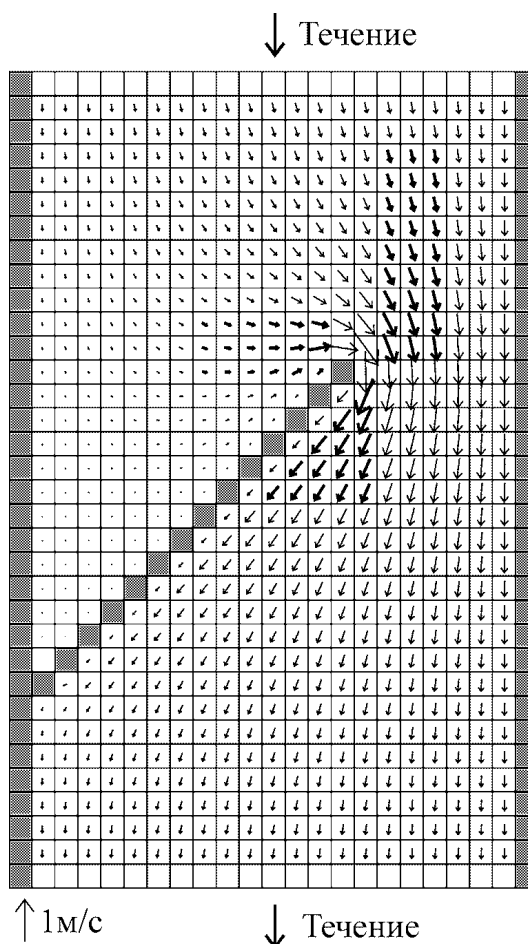


Рис. 2. Поле скорости вблизи острой дамбы: расчет без инерционных слагаемых

трехмерное; показанное поле – усредненное по глубине. Канал длиной 10 км, шириной 2.1 км и глубиной 10 м покрывался сеткой с горизонтальным разрешением 100 м. У берегов задавались условия скольжения. На двух открытых границах задавались уровни 0.1 и -0.1 м. То, что проблема имеет отношение именно к адвективным слагаемым, следует из того, что: пренебрежение адвективными слагаемыми приводит к отсутствию осцилляций (рис. 2); неустойчивость возникает в месте резкого изменения потока; добавление горизонтальной вязкости уменьшает или предотвращает осцилляции; возникновение осцилляций не зависит от шага по времени и метода расчета уровня поверхности (явного [6] или неявного [7]). На рис. 3 показано поле скорости при наличии горизонтальной вязкости (соответственно, с условиями прилипания на берегах) с коэффициентом, рассчитываемым по формуле Смагоринского, как в [6]. Однако использование вязкости для подавления осцил-

ляций является сомнительным, так как не гарантирует их отсутствия и может влиять на результат во всей расчетной области. В данном примере увеличение вязкости приводит к уменьшению интенсивности вихря позади дамбы, выделенного на рисунках.

Очевидно, что схема центральных разностей становится непригодной в вышеупомянутых случаях. Для решения этой проблемы в [8] предлагалась схема ван Леера [9] для аппроксимации одномерных и двумерных уравнений мелкой воды. В данной работе предлагается относительно простой метод, позволяющий применить любую из схем уравнений переноса скаляра в разнесенных сетках для аппроксимации адвективных слагаемых трёхмерных уравнений импульса. При этом возможно использование тех же самых подпрограмм расчета адвекции, что и для скалярных переменных.

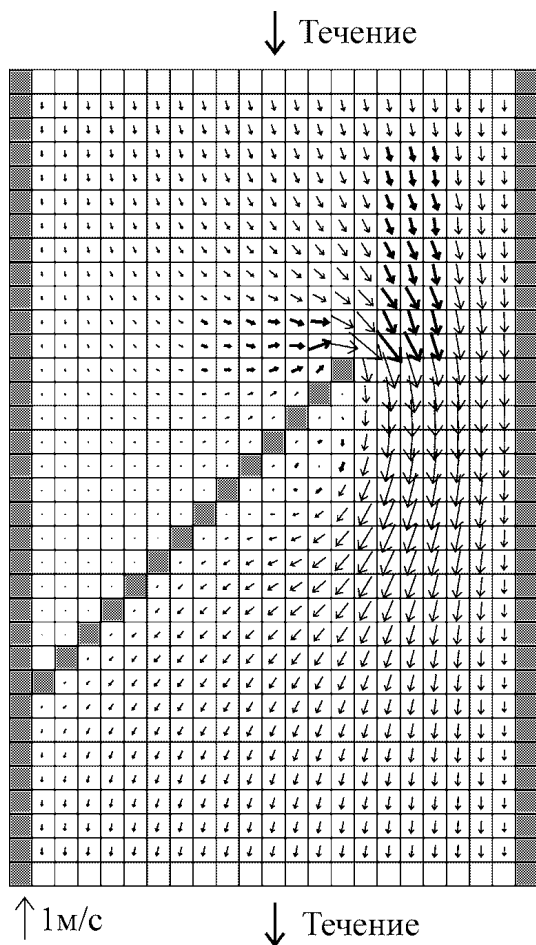


Рис. 3. Поле скорости вблизи острой дамбы: расчет при наличии горизонтальной вязкости

1. ЧИСЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ АДВЕКТИВНЫХ СЛАГАЕМЫХ В УРАВНЕНИЯХ ИМПУЛЬСА

1.1. Уравнения модели

Уравнения, рассматриваемые в данной работе, описывают гидродинамику трехмерных водоемов со свободной поверхностью в гидростатическом приближении. Уравнения записываются в декартовых координатах x, y по горизонтали и в σ -системе координат по вертикали [6]. Последняя связана с декартовой z -координатой соотношением $z - \eta = \sigma D$, где $\eta = \eta(x, y, t)$ – уровень поверхности; $D = H + \eta$ – полная глубина; $H = H(x, y)$ – глубина при невозмущенной поверхности. Рассматриваемые уравнения для горизонтальных компонент вектора скорости U и V имеют вид:

$$\frac{\partial DU}{\partial t} + \frac{\partial DU^2}{\partial x} + \frac{\partial DUV}{\partial y} + \frac{\partial U\omega}{\partial \sigma} =$$

$$= -gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + fDV + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\nu}{D} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right) + F_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial DV}{\partial t} + \frac{\partial DUV}{\partial x} + \frac{\partial DV^2}{\partial y} + \frac{\partial V\omega}{\partial \sigma} = -gD \frac{\partial \eta}{\partial y} - fDU + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\nu}{D} \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right) + F_y. \quad (2)$$

“Вертикальная” (см. [6]) компонента скорости ω в гидростатическом приближении рассчитывается из уравнения неразрывности, которое в σ -системе координат принимает вид:

$$\frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

а уровень поверхности η находится из этого же уравнения, усредненного по вертикали. Здесь t – время; g – гравитационное ускорение; f – параметр Кориолиса; ν – коэффициент вертикальной вязкости; F_x, F_y – горизонтальные компоненты сил вязкости, которые записываются так же, как в [6]. Далее рассматривается вопрос о применении численных схем аппроксимации уравнения адвективного переноса скаляра C :

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial \omega C}{\partial \sigma} = 0, \quad (4)$$

в разнесенных сетках к адвективным слагаемым уравнений (1), (2). Метод также может быть использован для аппроксимации адвективных слагаемых для третьей компоненты скорости в негидростатическом случае.

1.2. Схема центральных разностей

Будем рассматривать постоянный в σ -системе размер численной ячейки $\Delta\sigma = \text{const}$, так же как и $\Delta x = \text{const}, \Delta y = \text{const}$. Соответствующий вертикальный размер численной ячейки в z -системе зависит от горизонтальных координат и времени: $\Delta z = \Delta z(x, y, t)$, так как $\Delta z = D\Delta\sigma$. Обозначим $U_{i,j,k}^n$ компоненту вектора скорости на n -м шаге по времени на грани пространственной ячейки (i, j, k) (рис. 4). Рассматриваемое адвективное слагаемое уравнения (1) состоит из трех компонент, соответствующих переносу в каждом из трех пространственных направлений:

$$ADV_U(U) = \frac{\partial}{\partial x} (DU^2), \quad ADV_V(U) = \frac{\partial}{\partial y} (DUV), \\ ADV_\omega(U) = \frac{\partial}{\partial \sigma} (U\omega).$$

В явной схеме центральных разностей, которая используется, например, в моделях [5, 6], они аппроксимируются как:

$$\begin{aligned}
 & -ADV_U(U) \Delta x \approx \\
 \approx & \frac{\Delta z_{i-\frac{3}{2},j}^n U_{i-1,j,k}^n + \Delta z_{i-\frac{1}{2},j}^n U_{i,j,k}^n}{2} \frac{U_{i-1,j,k} + U_{i,j,k}}{2} - \\
 & - \frac{\Delta z_{i-\frac{1}{2},j}^n U_{i,j,k}^n + \Delta z_{i+\frac{1}{2},j}^n U_{i+1,j,k}^n}{2} \frac{U_{i,j,k} + U_{i+1,j,k}}{2}, \\
 & -ADV_V(U) \Delta y \approx \\
 \approx & \frac{\Delta z_{i-1,j-\frac{1}{2}}^n V_{i-1,j,k}^n + \Delta z_{i,j-\frac{1}{2}}^n V_{i,j,k}^n}{2} \times \\
 & \times \frac{U_{i,j-1,k} + U_{i,j,k}}{2} - \\
 & - \frac{\Delta z_{i-1,j-\frac{1}{2}}^n V_{i-1,j+1,k}^n + \Delta z_{i,j+\frac{1}{2}}^n V_{i,j+1,k}^n}{2} \times \\
 & \times \frac{U_{i,j,k} + U_{i,j+1,k}}{2}, \\
 & -ADV_\omega(U) \Delta \sigma \approx \\
 \approx & \frac{\omega_{i-1,j,k+1} + \omega_{i,j,k+1}}{2} \frac{U_{i,j,k} + U_{i,j,k+1}}{2} - \\
 & - \frac{\omega_{i-1,j,k} + \omega_{i,j,k}}{2} \frac{U_{i,j,k-1} + U_{i,j,k}}{2},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta z_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{\Delta z_{i-1,j}^n + \Delta z_{i,j}^n}{2}, \\
 \Delta z_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta z_{i,j-1}^n + \Delta z_{i,j}^n}{2}.
 \end{aligned}$$

Индекс “ k ” возрастает здесь в направлении “вниз” (см. рис. 4). Отметим, что каждая из этих формулировок представляет из себя разность втекающего и вытекающего потоков и поэтому является консервативной.

1.3. Краткий обзор схем для адвекции скаляра

Для численной аппроксимации уравнения адвективного переноса скаляра (4) в разнесенных сетках существует множество схем. Следуя работе [10], в одномерном случае они могут быть представлены как

$$\begin{aligned}
 C_i^{n+1} D_i^{n+1} &= C_i^n D_i^n + \\
 &+ U_L D_L \frac{\Delta t}{\Delta x} C_L - U_R D_R \frac{\Delta t}{\Delta x} C_R,
 \end{aligned}$$

где U_L, U_R – значения скорости на левой и правой гранях ячейки; D_L, C_L, D_R, C_R – глубина и значения скаляра на соответствующих гранях. Задача построения численной схемы адвекции как раз

и состоит в определении значений C_L, C_R . Например, в схеме центральных разностей они представляются как средние арифметические:

$$C_R = \frac{1}{2} (C_i^n + C_{i+1}^n).$$

Для рассмотренных далее TVD-схем может быть использовано следующее представление:

$$C_R = \begin{cases} C_R^+ & (U_R \geq 0), \\ C_R^- & (U_R < 0), \end{cases}$$

а C_R^+ и C_R^- определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
 C_R^+ &= C_i^n + \frac{1}{2} \Psi(r_i^+) (1 - c) (C_{i+1}^n - C_i^n), \\
 C_R^- &= C_{i+1}^n - \frac{1}{2} \Psi(r_i^-) (1 + c) (C_{i+1}^n - C_i^n),
 \end{aligned}$$

где c – локальное число Куранта со знаком; r_i является отношением градиента скаляра вверх по потоку к локальному градиенту:

$$c = U_R \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad r_i^+ = \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{C_{i+1}^n - C_i^n}, \quad r_i^- = \frac{C_{i+2}^n - C_{i+1}^n}{C_{i+1}^n - C_i^n}.$$

В данной работе рассмотрены ограничители Ψ из [10], включающие не только TVD-схемы:

$$\Psi(r, c) = \begin{cases} 0 & \text{Upwind,} \\ 1 & \text{Lax-Wendroff} \\ \max[\min(2r, 1), \min(r, 2), 0] & \text{Superbee,} \\ (r + |r|)/(1 + r) & \text{van Leer,} \\ \min(r, 1) & \text{MINMOD,} \\ \max \left[\min \left(2, 2r, \frac{1+r}{2} \right), 0 \right] & \text{MUSCL,} \\ \max \left[\min \left(\frac{3(1+r) + (1-r)(1-2|c|)}{6}, \right. \right. & \text{ULTIMATE-,} \\ \left. \left. \frac{2}{1-|c|}, \frac{2r}{|c|} \right), 0 \right] & \text{QUICKEST,} \\ \begin{cases} \min(2r/|c|, 1), & 0 \leq r \leq 1 \\ \min \left(r, \frac{2}{1-|c|} \right), & r > 1 \\ 0, & r < 0 \end{cases} & \text{Super-C.} \end{cases}$$

В описанных выше схемах параметры U_L и U_R известны. В случае применения к компонентам скорости, когда роль скаляра C играет U или V , эти значения должны быть проинтерполированы.

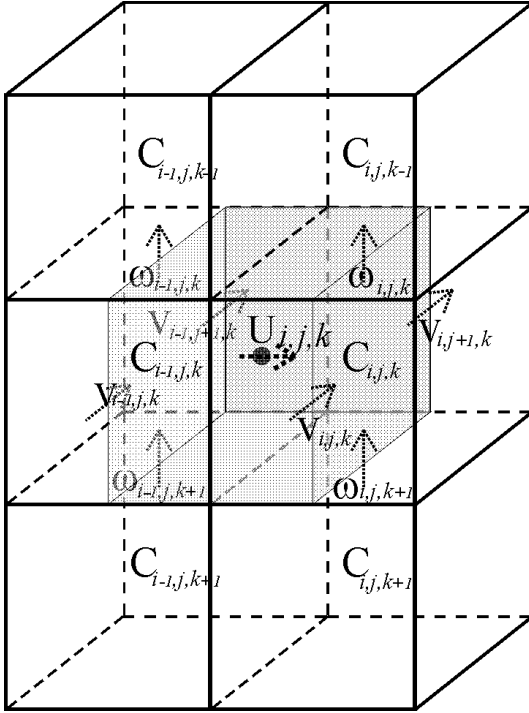


Рис. 4. Ячейка для U -компоненты скорости

1.4. Схема интерполяции поля скорости

Для обеспечения монотонности любой из схем, описанных в предыдущем разделе, дискретное поле скорости, которое используется в качестве входного параметра, должно удовлетворять дискретному аналогу уравнения неразрывности (3). В применении к “ячейкам скаляра” $C_{i-1,j,k}$ и $C_{i,j,k}$ последнее аппроксимируется как:

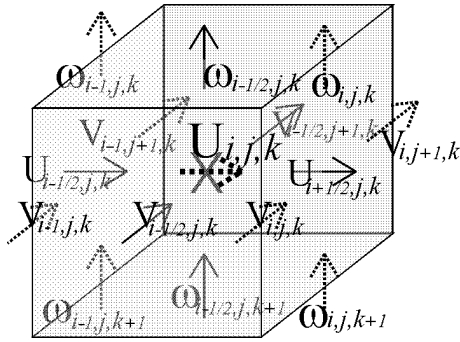
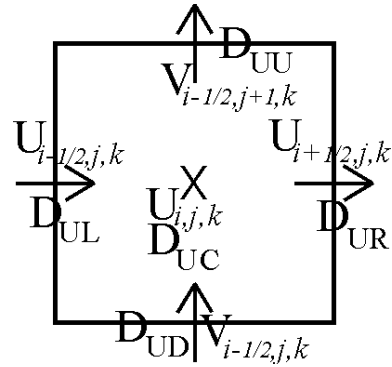
$$\begin{aligned}
 & U_{i-1,j,k}^n \frac{\Delta z_{i-2,j}^n + \Delta z_{i-1,j}^n}{2} \Delta y - \\
 & - U_{i,j,k}^n \frac{\Delta z_{i-1,j}^n + \Delta z_{i,j}^n}{2} \Delta y + \\
 & + V_{i-1,j,k}^n \frac{\Delta z_{i-1,j}^n + \Delta z_{i-1,j-1}^n}{2} \Delta x - \\
 & - V_{i-1,j+1,k}^n \frac{\Delta z_{i-1,j+1}^n + \Delta z_{i-1,j}^n}{2} \Delta x + \\
 & + \omega_{i-1,j,k+1}^n \Delta x \Delta y - \omega_{i-1,j,k}^n \Delta x \Delta y + \\
 & + \frac{\eta_{i-1,j}^{n+1} - \eta_{i-1,j}^n}{\Delta t} = 0,
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & U_{i,j,k}^n \frac{\Delta z_{i-1,j}^n + \Delta z_{i,j}^n}{2} \Delta y - \\
 & - U_{i+1,j}^n \frac{\Delta z_{i,j}^n + \Delta z_{i+1,j}^n}{2} \Delta y + \\
 & + V_{i,j,k}^n \frac{\Delta z_{i,j}^n + \Delta z_{i,j-1}^n}{2} \Delta x - \\
 & - V_{i,j+1,k}^n \frac{\Delta z_{i,j+1}^n + \Delta z_{i,j}^n}{2} \Delta x + \\
 & + \omega_{i,j,k+1}^n \Delta x \Delta y - \omega_{i,j,k}^n \Delta x \Delta y + \\
 & + \frac{\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n}{\Delta t} = 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично, для того, чтобы применить какую-либо из приведенных в предыдущем разделе схем к адвективным слагаемым уравнений импульса, трехмерное поле скорости и поле уровня поверхности, используемые в качестве параметров, необходимо проинтерполировать таким образом, чтобы полученные поля удовлетворяли дискретному уравнению неразрывности (3) в применении к соответствующей компоненте скорости. Желаемым условием при этом является то, чтобы проинтерполированные поля были аппроксимацией 2-го или более высокого порядка исходного поля. Определим геометрическое положение “ячейки компоненты скорости” для U так, как показано на рис. 4. В данном случае эта ячейка оказывается такой же призмой, как и ячейка для скаляра, с прямоугольным основанием, смещенной в направлении, соответствующем компоненте скорости. На рис. 4 используются следующие обозначения: $C_{i,j,k}$ – скаляр (в центре прозрачной ячейки); $U_{i,j,k}$ – компонента вектора скорости, заданного в центре грани между “ячейками скаляра” $C_{i-1,j,k}$ и $C_{i,j,k}$. Компоненты скорости V и ω задаются аналогично. Индекс k возрастает здесь в направлении “вниз”.

Компоненты скорости из выражений (5) и (6) входят в качестве параметров в схему дискретизации адвекции скаляра, описанных в предыдущем разделе. Обозначим теперь $U_{i+\frac{1}{2},j,k}^n$, $U_{i-\frac{1}{2},j,k}^n$, $V_{i-\frac{1}{2},j,k}^n$, $V_{i+\frac{1}{2},j,k}^n$, $W_{i-\frac{1}{2},j,k}^n$, $W_{i+\frac{1}{2},j,k}^n$ – компоненты скорости на гранях “ $U_{i,j,k}$ -ячейки” (рис. 5). Известные компоненты скорости, расположенные в центрах граней “скалярных ячеек”, показаны пунктирными стрелками; неизвестные, подлежащие определению, – сплошными.

Для выполнения дискретного уравнения неразрывности, примененного к “ $U_{i,j,k}$ -ячейке”, необходимо выполнение следующего условия:


 Рис. 5. $U_{i,j,k}$ ячейка с известными и подлежащими определению компонентами скорости

 Рис. 6. Интерполяция поля глубины для U

$$\begin{aligned}
 & U_{i-\frac{1}{2},j,k}^n \Delta z_{i-1,j}^n \Delta y - U_{i+\frac{1}{2},j,k}^n \Delta z_{i,j}^n \Delta y + \\
 & \quad + V_{i-\frac{1}{2},j,k}^n \times \\
 & \times \frac{\Delta z_{i-1,j}^n + \Delta z_{i,j}^n + \Delta z_{i-1,j-1}^n + \Delta z_{i,j-1}^n}{4} \Delta x - \\
 & \quad - V_{i-\frac{1}{2},j+1,k}^n \times \\
 & \times \frac{\Delta z_{i-1,j+1}^n + \Delta z_{i,j+1}^n + \Delta z_{i-1,j}^n + \Delta z_{i,j}^n}{4} \Delta x - \\
 & \quad - \omega_{i-\frac{1}{2},j,k}^n \Delta x \Delta y - \omega_{i-\frac{1}{2},j,k+1}^n \Delta x \Delta y + \\
 & + \frac{1}{2} (\eta_{i-1,j}^{n+1} + \eta_{i,j}^{n+1}) - \frac{1}{2} (\eta_{i-1,j}^n + \eta_{i,j}^n) = 0.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Легко видеть, что если сложить выражения (5) и (6) и затем определить компоненты скорости как

$$\begin{aligned}
 U_{i-\frac{1}{2},j,k}^n &= \frac{U_{i-1,j,k} \Delta z_{i-\frac{3}{2},j}^n + U_{i,j,k} \Delta z_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2 \Delta z_{i-1,j}^n}, \\
 V_{i-\frac{1}{2},j,k}^n &= \frac{V_{i-1,j,k} \Delta z_{i-1,j-\frac{1}{2}}^n + V_{i,j,k} \Delta z_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z_{i-1,j-\frac{1}{2}}^n + \Delta z_{i,j-\frac{1}{2}}^n}, \\
 \omega_{i-\frac{1}{2},j,k}^n &= \frac{\omega_{i-1,j,k} + \omega_{i,j,k}}{2},
 \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta z_{i-\frac{1}{2},j}^n &= \frac{\Delta z_{i-1,j}^n + \Delta z_{i,j}^n}{2}, \\
 \Delta z_{i,j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{\Delta z_{i,j-1}^n + \Delta z_{i,j}^n}{2},
 \end{aligned}$$

то уравнение (7) выполняется тождественно. Такое определение не является единственно возможным, однако далее будет доказано, что такое

представление имеет 2-й порядок точности аппроксимации в случае, если поля уровня и скорости имеют непрерывные производные.

Схема дополняется проинтерполированным полем уровня поверхности:

$$\begin{aligned}
 D_{UC(i,j)} &= \frac{D_{i-1,j} + D_{i,j}}{2}, \\
 D_{UL(i,j)} &= D_{i-1,j}, \\
 D_{UR(i,j)} &= D_{i,j}, \\
 D_{UD(i,j)} &= \frac{D_{i-1,j} + D_{i,j} + D_{i-1,j-1} + D_{i,j-1}}{4}, \\
 D_{UU(i,j)} &= \frac{D_{i-1,j+1} + D_{i,j+1} + D_{i-1,j} + D_{i,j}}{4},
 \end{aligned}$$

где $D_{UC(i,j)}$ – полная глубина в центре основания “ U -ячейки”; $D_{UL(i,j)}$, $D_{UR(i,j)}$, $D_{UD(i,j)}$, $D_{UU(i,j)}$ – глубины в центрах соответственно левого, правого, нижнего и верхнего ребер (рис. 6).

Аналогичным образом, с точностью до перестановки индексов i и j , определяются дискретные поля скорости и уровня для аппроксимации адвективных слагаемых уравнения (2) для V -компоненты скорости. При рассмотрении негидростатических задач выделение “ $\omega_{i,j,k}$ -ячейки”, как состоящей из верхней половины “ $C_{i,j,k}$ -ячейки” и нижней половины “ $C_{i,j,k-1}$ -ячейки”, приводит к тому, что компоненты вектора скорости на ее границах определяются как средние арифметические:

$$\begin{aligned}
 U_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n &= \frac{U_{i,j,k-1}^n + U_{i,j,k}^n}{2}, \\
 V_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n &= \frac{V_{i,j,k-1}^n + V_{i,j,k}^n}{2}, \\
 \omega_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n &= \frac{\omega_{i,j,k-1}^n + \omega_{i,j,k}^n}{2}.
 \end{aligned}$$

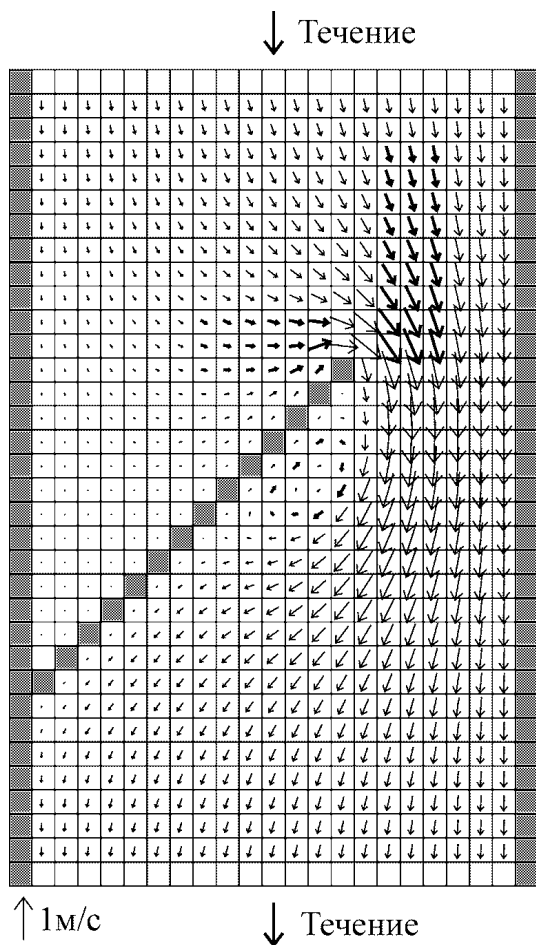


Рис. 7. Поле скорости вблизи острой дамбы, расчет по предложенному методу со схемой MUSCL

1.5. Теоретический порядок аппроксимации

Покажем, что в случае гладких полей скорости и уровня, предложенная схема имеет 2-й порядок аппроксимации. Перепишем уравнение для U из [8], опуская индексы k и n , в виде

$$U_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{U_{i-1,j} + U_{i,j}}{4} + \frac{U_{i-1,j} \frac{\Delta z_{i-2,j}}{\Delta z_{i-1,j}} + U_{i,j} \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta z_{i-1,j}}}{4}.$$

Будем рассматривать высоту численной ячейки Δz как гладкую функцию $\Delta z = \Delta z(x, \cdot)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta z_{i-2,j} &= \Delta z_{i-1,j} - \Delta z'_{i-1,j} \Delta x + O(\Delta x^2), \\ \Delta z_{i,j} &= \Delta z_{i-1,j} + \Delta z'_{i-1,j} \Delta x + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в предыдущее:



Рис. 8. Батиметрия для квазиодномерного теста

$$U_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4} \frac{\Delta z'_{i-1,j}}{\Delta z_{i-1,j}} \Delta x (U_{i,j} - U_{i-1,j}) + \frac{U_{i,j} + U_{i-1,j}}{2} + O(\Delta x^2).$$

Предположим, что U является гладкой функцией $U = U(x, \cdot)$. Тогда

$$U_{i,j} - U_{i-1,j} = \Delta x U'_{i-\frac{1}{2},j} + O(\Delta x^2).$$

Подставляя в предыдущее, получим

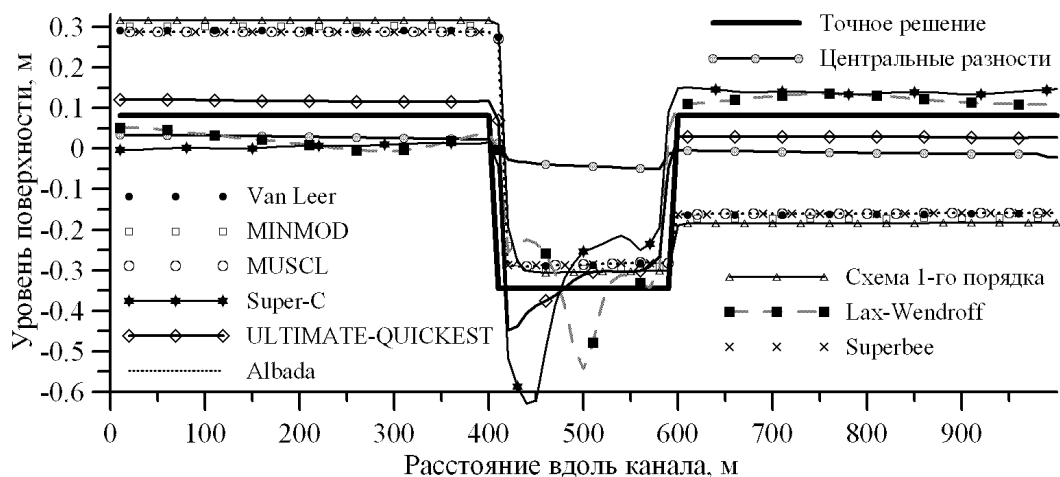
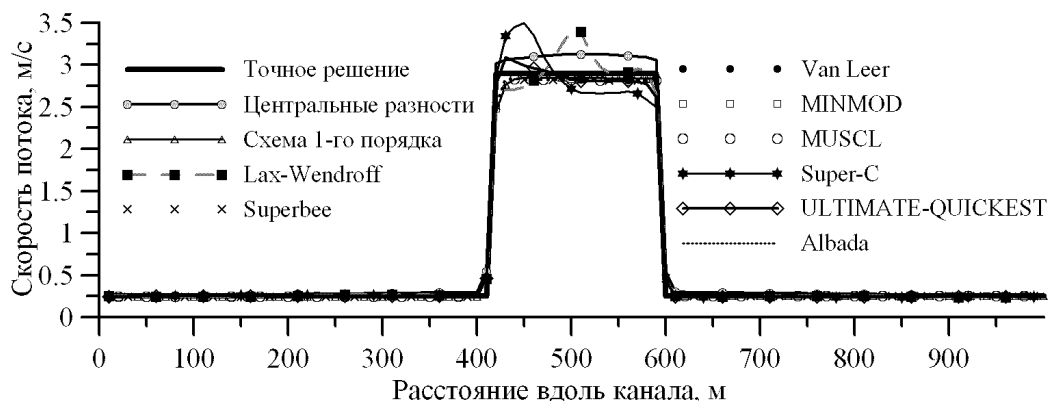
$$U_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{U_{i,j} + U_{i-1,j}}{2} + O(\Delta x^2),$$

что является аппроксимацией 2-го порядка точности U -компоненты скорости посередине между двумя соседними узлами, в которых задаются значения $V_{i-1,j,k}$ и $V_{i,j,k}$ как среднее арифметическое (см. [2]).

Аналогично, уравнение для $V_{i-\frac{1}{2},j,k}$ из (8) приводится к виду

$$\begin{aligned} V_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{V_{i-1,j} + V_{i,j}}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\Delta z_{i,j} + \Delta z_{i,j-1} - \Delta z_{i-1,j} - \Delta z_{i-1,j-1}}{\Delta z_{i,j} + \Delta z_{i,j-1} + \Delta z_{i-1,j} + \Delta z_{i-1,j-1}} \times \\ &\quad \times (V_{i,j} - V_{i-1,j}) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Delta z'_{i-\frac{1}{2},j} \Delta x + \Delta z'_{i-\frac{1}{2},j-1} \Delta x + O(\Delta x^2)}{\Delta z_{i,j} + \Delta z_{i,j-1} + \Delta z_{i-1,j} + \Delta z_{i-1,j-1}} \times \\ &\quad \times V'_{i-\frac{1}{2},j} \Delta x + \\ &+ \frac{V_{i-1,j} + V_{i,j}}{2} + O(\Delta x^2) = \\ &= \frac{V_{i-1,j} + V_{i,j}}{2} + O(\Delta x^2), \end{aligned}$$

что является аппроксимацией 2-го порядка V -компоненты скорости посередине между двумя соседними узлами, в которых задаются $V_{i-1,j,k}$ и $V_{i,j,k}$. Отметим, что и третья компонента поля скорости, определенная по (8), также является аппроксимацией 2-го порядка.


 Рис. 9. Рассчитанные уровни в сравнении с точным решением уравнений ($t=1000$ с)

 Рис. 10. Рассчитанные скорости в сравнении с точным решением уравнений ($t=1000$ с)

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА

2.1. Задача о течении в канале с острой дамбой

Результат использования предложенной схемы аппроксимации поля скорости с последующим применением схемы адвекции MUSCL в задаче моделирования течения в канале с острой дамбой, описанной во введении, показан на рис. 7. Коэффициент горизонтальной диффузии полагался равным нулю. Предложенная схема не производит осцилляций, возникавших при применении схемы центральных разностей (см. в сравнении с рис. 1) и, в отличие от последней, является устойчивой.

2.2. Устойчивость в квазиодномерном случае

Целью данного раздела является проверка устойчивости предложенного метода и его сходимости к точному решению. Исследование этих свойств

в трехмерном случае затруднено вследствие нелинейности схемы. Осцилляции одной из компонент скорости, порожденные трехмерной моделью локально в областях с большими ее градиентами, могут проникать во всю расчетную область, а также вызывать осцилляции других компонент скорости и переменных состояния. Устойчивость и сходимость схемы можно исследовать в квазиодномерном случае течения в канале в резком перепаде глубины, описываемым частным случаем уравнений (1)–(3), которые в этом случае сводятся к уравнению для уровня поверхности $\eta = \eta(x, t)$ и уравнению для осредненной по глубине скорости потока $U = U(x, t)$, при пренебрежении вязкостными и кориолисовыми силами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U D}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} U^2 + g \eta \right) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

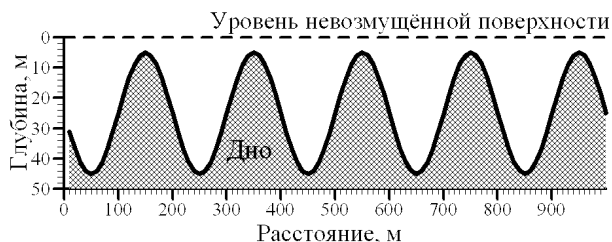


Рис. 11. Батиметрия для задачи моделирования волнового движения

где x – направление вдоль оси канала.

В рассматриваемом примере канал с резким изменением батиметрии, показанной на рис. 8, покрывался сеткой с разрешением $\Delta x = 10$ м. Глубина в узлах численной сетки описывалась как

$$H_i = \begin{cases} 25.0\text{м}, & 1 \leq i \leq 40, \\ 2.5\text{м}, & 41 \leq i \leq 59, \\ 25.0\text{м}, & 60 \leq i \leq 100. \end{cases}$$

На численное решение влияют только значения в узлах, поэтому глубину не обязательно считать разрывной функцией; можно предполагать ее гладкое (например, линейное) изменение в подсеточном масштабе. С физической точки зрения следовало бы рассматривать негидростатическую задачу, однако это привело бы к дополнительному уравнению, причем уравнения зависели бы от двух пространственных координат, что существенно усложнило бы задачу.

В стационарном случае уравнения (9) упрощаются и имеют следующие интегралы:

$$\left. \begin{aligned} UD &= C_1 \\ \frac{U^2}{2} + g\eta &= C_2 \end{aligned} \right\},$$

где C_1, C_2 – константы. С физической точки зрения $C_1 = Q$ является удельным расходом (полным расходом, деленным на ширину канала) через сечение канала. Эти два уравнения сводятся к поиску корня многочлена. Поскольку стационарное решение для численной модели заранее неизвестно, то в качестве начальных условий задавались нулевые скорости и уровень, а на открытых границах задавался удельный расход Q и условие излучения для уровня поверхности η . Расход полагался равным на входе (“слева”) и выходе (“справа”), и с целью согласования начальных и граничных условий, а также с целью избежания “удар-

ной волны”, описывался как:

$$Q(t) = \begin{cases} 6.25t/400, & 0 \leq t \leq 400, \\ 6.25, & 400 \leq t. \end{cases}$$

Удельный расход $6.25\text{м}^2/\text{с}$ соответствует скорости потока $0.25\text{м}/\text{с}$ при глубине 25м (батиметрическая глубина на границах). Точное решение, соответствующее стационарному расходу $Q = 6.25\text{м}^2/\text{с}$ при $t \gg 400$, имеет вид:

$$(U_i, \eta_i) = \begin{cases} (0.249\text{м}/\text{с}, 0.081\text{м}), & 1 \leq x \leq 40, \\ (2.9\text{м}/\text{с}, -0.345\text{м}), & 41 \leq x \leq 59, \\ (0.249\text{м}/\text{с}, 0.081\text{м}), & 60 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

Сходимость численного решения к этому стационарному решению после окончания “разгона” обуславливается как видом и дискретизацией граничных условий, так и наличием численных диссипации и дисперсии. На рис. 9 и 10 показано сравнение результатов численного моделирования с применением различных схем с точным решением при $t=1000$ с. В одномерном случае неустойчивость проявляется в возникновении незатухающих колебаний скорости и уровня, которые могут привести к “развалу” модели, если возможность “осушения” не учитывается. Затухания колебаний, порождаемых схемами центральных разностей и Super-C, не наблюдалось даже при $t=10000$ с. Колебания, порождаемые схемой Lax-Wendroff, либо затухали, и схема сходилась к точному решению лучше других схем либо приводила к “развалу” на этапе “разгона”, в зависимости от его длительности. Схема ULTIMATE-QUICKEST в процессе “разгона” также давала нелинейные колебания, но меньшей амплитуды, чем Lax-Wendroff, Super-C или центральные разности, после чего сходилась к стационарному решению, которое несколько отличалось от точного решения. Это отличие было меньше, чем при применении TVD-схем, которые проявили тенденцию быстрой сходимости к стационарному решению без возникновения колебаний, однако отличающегося от точного. Численная диссипация этих схем привела к аналогу физической диссипации, что выражалось в наличии перепада уровня поверхности (рис. 9).

2.3. Диссипативные свойства

По аналогии с численной диффузией, в применении к переносу импульса “наилучшей” можно считать схему с наименьшей численной диссипацией. Для исследования диссипативных свойств

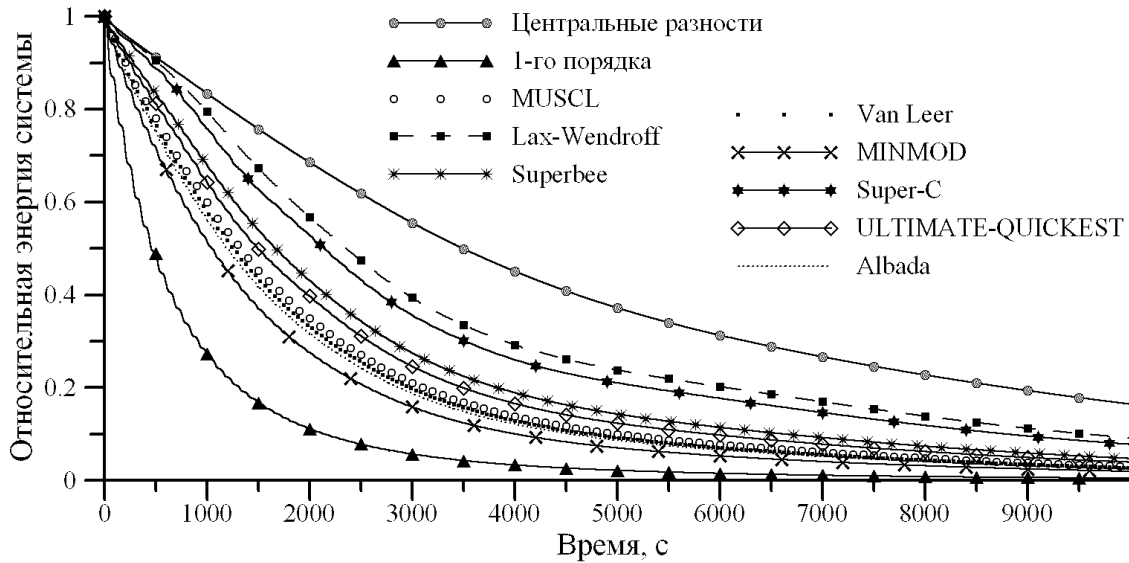


Рис. 12. Дисипация полной относительной энергии системы со временем

рассматривалась задача моделирования нелинейного волнового движения, описываемого уравнениями (9) в канале с батиметрией, показанной на рис. 11 и описываемой как $H = 25 + 20 \sin(\pi x/100)$. Выбор такого профиля обусловлен желанием получить относительно большие значения скорости и ее градиента. В качестве начальных условий задавалась нулевая скорость и линейное изменение уровня поверхности $\eta = 0.001x - 0.5|_{t=0}$. Полная энергия системы в предположении, что границы канала непроницаемы, будет

$$E(t) = \int_{x=0}^{1000} \frac{g\eta^2 + DU^2}{2} dx = \text{const.} \quad (10)$$

В этом можно убедиться, если уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g\eta^2 + DU^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(UD \left(\frac{1}{2} U^2 + g\eta \right) \right) = 0,$$

вытекающее из (9), проинтегрировать по длине канала и принять во внимание, что на границах $U = 0$. Численная диссипация зависит не только от схемы расчета адвективных слагаемых, но и от схемы расчета уровня поверхности, дискретизации производных по времени – в данном примере использовалась производная 1-го порядка по времени и неявная схема расчета уровня [7].

Рис. 12 демонстрирует изменение во времени полной энергии системы, отнесенной к полной начальной энергии. Точное решение соответствует единице, что следует из уравнения (10). С точки зрения полной диссипации системы, схемы распределились в следующем порядке её возраста-

ния: Центральные разности, Lax-Wendroff, Super-C, Superbee, Ultimate-Quickest, MUSCL, Van Leer, Albada, MinMod, 1-го порядка вверх по потоку.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Схема центральных разностей для численной аппроксимации адвективных слагаемых уравнений импульса является непригодной для моделирования течений с резкими изменениями скорости или направления. Работа показала, что даже в задачах геофизической гидродинамики схема дискретизации переноса импульса может существенно влиять на результат, в частности на устойчивость и диссипативные свойства. Предложенный метод расчета адвективных слагаемых уравнений импульса в моделях с регулярными разнесенными сетками оказался эффективным в практическом применении, так как он может использовать те же самые подпрограммы расчета адвекции, что и скалярные переменные. Применение TVD-схем адвекции не производит осцилляций поля скорости и является устойчивым. Из рассмотренных TVD-схем с точки зрения наименьшей диссипации наилучшим оказалось применение схемы Superbee. В случае, если задача не является критичной к устойчивости, то возможно применение схем Lax-Wendroff или ULTIMATE-QUICKEST. Дальнейший интерес представляет разработка устойчивых схем, обладающих меньшей диссипацией, чем представленные в этой работе.

Автор выражает искреннюю благодарность

доктору физ.-матем. наук, профессору В.С. Мадеричу за ценные замечания и оказанную помощь в подготовке этой публикации.

1. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. В 2-х томах. – М.: Мир, 1984. – 398 с. (т.1), 416 с. (т.2).
2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.1. Основные положения и общие методы. – М.: Мир, 1991. – 502 с.
3. Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows, v2. Computational Methods for inviscid and viscous flows. – New York: Wiley and Sons, 1990. – 714 p.
4. Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, 2nd Ed. – Washington: Taylor and Francis, 1997. – 792 p.
5. Кошебуцкий В., Мадерич В., Нестеров А., Хелинг Р. Моделирование распространения тепла во внутренних водах и прибрежных областях морей // Прикл. гидромеханика. – 2004. – **6(78)**. – С. 34–44.
6. Blumberg A.F., Mellor G.L. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation // Three-Dimensional Coastal Ocean Models. – 1987, N. Heaps (ed), Washington, D.C., Am. Geoph. Union. – P. 1–16.
7. Casulli V., Cheng R.T. Semi-Implicit Finite Difference Methods for Three-Dimensional Shallow Water Flow // Int. J. for Numer. Meth. in Fluids. – 1992. – **15**. – P. 629–648.
8. Stelling G.S., Duijnmeijer S.P.A. A staggered conservative scheme for every Froude Number in rapidly varied shallow water flows // Int. J. for Numer. Meth. in Fluids. – 2003. – **43**. – P. 1329–1354.
9. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V: A second order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. – 1979. – **32**. – P. 101–136.
10. Fringer O-B., Armfield S.W., Street R.L. Reducing numerical diffusion in interfacial gravity wave simulations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2005. – **49**. – P. 301–329.