

УДК 532.526.10

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВНЕШНЕГО ПОТОКА НА СТРУКТУРУ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. Г. КУЗЬМЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 25.10.2006 ◊ Пересмотрено 17.10.2007

Турбулентный пограничный слой на плоской пластине под действием турбулентности внешнего потока численно моделируется посредством LES-технологии для числа Рейнольдса, равного 10^4 . Крупномасштабное поле течения получается путем прямого интегрирования фильтрованных трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, используя конечно-разностный метод. Маломасштабные движения параметризованы посредством динамической "смешанной" модели. Число использованных сеточных узлов составляет $\{385 \times 193 \times 97\}$. Численное моделирование выполнено для того, чтобы изучить среднюю скорость, турбулентные напряжения, кинетическую энергию турбулентности и подсеточные эффекты при параметре внешней турбулентности $Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$. Внешняя турбулентность увеличивает поверхностное трение и значительно изменяет среднюю и флюктуационную скорость во внешней области пограничного слоя. Согласованность вычисленных профилей средней скорости и турбулентных статистик с экспериментальными данными является хорошим.

Турбулентний пограничний шар на плоскій пластині під впливом турбулентності зовнішнього потоку чисельно моделюється за допомогою LES-технології для числа Рейнольдса, яке дорівнює 10^4 . Великомасштабне поле течії одержується шляхом прямого інтегрування фільтрованих тривимірних нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливої рідини, використовуючи кінцево-різницевий метод. Маломасштабні рухи параметризовані за допомогою динамічної "змішаної" моделі. Число використаних сіткових вузлів є $\{385 \times 193 \times 97\}$. Чисельне моделювання виконано для того, щоб вивчити середню швидкість, турбулентні напруги, кінетичну енергію турбулентності та підсіткові ефекти з параметром зовнішньої турбулентності $Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$. Зовнішня турбулентність підвищує поверхневе тертя та значно змінює середню і флюктуаційну швидкості в зовнішній частині пограничного шару. Узгоджувальність обчислених профілів середньої швидкості і турбулентних статистик з експериментальними результатами є доброю.

The turbulent boundary layer on a flat plate under influence of free-stream turbulence is simulated by LES-technique for a Reynolds number of 10^4 . The large-scale flow field has been obtained by directly integrating the filtered three-dimensional time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using a finite-difference method. The small-scale motions were parametrized by dynamic subgrid-scale mixed model. The number of grid points used in the numerical method was $\{385 \times 193 \times 97\}$. The simulation were performed to study the mean velocity, the turbulent stresses, the turbulence kinetic energy and subgrid-scale-model effects with turbulence intensities $Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$. The free-stream turbulence increases the skin friction and considerably changes mean and fluctuating velocities in the outer region of the boundary layer. There is good agreement between the computer mean-velocity profiles, turbulence statistics and experimental data.

ВВЕДЕНИЕ

Турбулентность набегающего потока оказывает заметное влияние на структуру течения в пограничном слое, сопротивление и теплообмен обтекаемых тел. Представляет большой практический интерес изучение влияния внешней турбулентности на параметры турбулентного пограничного слоя при различных уровнях интенсивности турбулентности набегающего потока. Подавляющее большинство работ, выполненных по данной тематике, являются экспериментальными исследованиями [1, 2, 4–7]. Для турбулизации потоков обычно используют решетки из стержней с круговыми сечениями. Существует ряд экспериментальных работ [4–7], где в качестве турбулизаторов применяются также решетки из стержней с квадратными сечениями, перфорированные диафрагмы и система струй.

На основе технологии проведения экспериментальных работ [1–6] интенсивность турбулентности набегающего на пластину безграничного потока Tu в тестовом поперечном сечении определяется следующей формулой:

$$Tu = \sqrt{\langle U_p^2 + V_p^2 + W_p^2 \rangle_{z,t}} / (3U_{cc}),$$

где U_p, V_p, W_p – пульсации компонент вектора скорости; U_{cc} – средняя скорость турбулентного течения в преобладающем направлении; U_p, V_p, W_p, U_{cc} – размерные величины. Тестовое поперечное сечение при установившемся режиме турбулентности располагается между турбулизатором и передней кромкой обтекаемой пластины на определенном экспериментально выбранном расстоянии.

Вопросу о влиянии степени турбулентности набегающего потока на величину коэффициента поверхностного трения в турбулентном пограничном слое уделяется большое внимание. В последние го-

ды появились исследования, в которых, кроме Tu , рассматривалось влияние дополнительных параметров течения, таких как масштаб турбулентности набегающего потока и число Рейнольдса пограничного слоя [6, 7]. Экспериментально установлено существование логарифмического участка в профиле средней скорости (записанном в универсальных координатах) в турбулентном пограничном слое у стенки при турбулентном внешнем потоке ($Tu < 0,08$). Форма профиля средней скорости на этом участке мало зависима от Tu , а во внешней части турбулентного погранслоя в области следа она уже сильно зависит от Tu .

Отметим, что при изучении влияния внешней турбулентности на параметры турбулентного пограничного слоя при различных уровнях интенсивности турбулентности набегающего потока наблюдались расхождения (а в некоторых случаях и противоречия) в результатах, полученных различными авторами. Анализ достаточно большого количества экспериментальных работ позволяет сделать вывод о том, что параметров, связанных турбулентными характеристиками и вводимых в критериальные зависимости, должно быть несколько (при количественной оценке влияния турбулентности внешнего потока на структуру турбулентного пограничного слоя).

Теоретические работы, содержащие результаты численных исследований о турбулентном набегающем потоке и его структуре в рамках современных численных методов RANS и LES, появились сравнительно недавно и количество их незначительно. В обзорном исследовании [8] приведены результаты численного моделирования вихревой интенсивности теплообмена в пакетах труб различной геометрии, проведенного на основе уравнений Рейнольдса (RANS), и обтекания траншей и лунок на поверхности труб в контексте интенсификации теплообмена. Данные методы можно использовать для моделирования течений в турбулизаторах.

В настоящее время проблема численного исследования влияния внешней турбулентности на параметры турбулентного пограничного слоя при различных уровнях интенсивности турбулентности набегающего потока для высоких чисел Рейнольдса все еще далека до полного разрешения. Наиболее оптимальным является LES-подход [9–17], который соединяет численное моделирование основных уравнений для вихрей с масштабами, большими шага сетки, с моделями, предложенными для вихрей с масштабами, меньшими шага сетки. Важным и определяющим фактом для LES оказывается корректное задание граничных условий, в частности, способ подробной реконструкции

мгновенного турбулентного поля скорости на границах расчетной области на основе мозаичной эмпирической картины, составленной из отдельных результатов ряда экспериментальных исследований.

Цель настоящей работы – численное моделирование влияния турбулентности набегающего неограниченного потока на структуру турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости в режиме гидродинамически гладкой поверхности на основе LES-технологии при высоком числе Рейнольдса.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи заключается в следующем: 1) турбулизированный неограниченный внешний поток (с интенсивностью турбулентности Tu) вязкой несжимаемой жидкости с постоянными свойствами при отсутствии внешних массовых сил натекает на плоскую длинную гидродинамически гладкую пластину под нулевым углом атаки; 2) исследуется трехмерное течение пограничного слоя при $Re=10^4$ (числе Рейнольдса, составленном из средней скорости турбулизированного набегающего потока и размера вычислительной области в направлении, перпендикулярном пластине) и $0 \leq Tu < 0,08$; 3) задача рассматривается в конечной трехмерной вычислительной области с заданными граничными условиями; 4) все параметры и уравнения представлены в безразмерном виде.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости представим в виде обезразмеренных фильтрованных уравнений Навье-Стокса [14–17]:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0,$$

где $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ или $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ – сглаженные компоненты вектора скорости вдоль координатных осей x, y, z ; P – обобщенное сглаженное давление. Тензор подсеточных напряжений τ_{ij} параметризуется на основе однопараметрической динамической смешанной подсеточной модели [10]:

$$\tau_{ij} = -2C_V \tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} + (\tilde{e}_{ij} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j),$$

где $e_{ij} = \tilde{u}_i \tilde{u}_j$. Коэффициент C_V определяется с помощью динамической процедуры следующим образом:

$$C_V(x, y) = -\frac{\langle M_{ij}(L_{ij} - H_{ij}) \rangle}{2 \langle M_{ij} M_{ij} \rangle},$$

где

$$M_{ij} = -\hat{\Delta}^2 |\hat{S}| \overline{\hat{S}_{ij}} + \hat{\Delta}^2 |\hat{S}| \hat{S}_{ij};$$

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right); \quad |\hat{S}| = (2\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij})^{1/2};$$

$$L_{ij} = \overline{\hat{u}_i \hat{u}_j} - \overline{\hat{u}_i} \overline{\hat{u}_j}; \quad H_{ij} = \overline{\hat{b}_i \hat{b}_j} - \overline{\hat{b}_i} \overline{\hat{b}_j};$$

$$b_i = \hat{u}_i; \quad b_j = \hat{u}_j.$$

Отметим, что в статье [10] для течения в канале осреднение $\langle . \rangle$ проводится по плоскости Oxz , следовательно, C_V зависит только от y . В данной работе осреднение $\langle . \rangle$ выполняется по однородному направлению Oz , и C_V есть функция от x и y , что позволяет более точно учитывать локальные особенности потока.

В данном исследовании в качестве первичного и повторного фильтра используется Гауссов фильтр (см. подробно [17]). Операторы фильтров связаны следующими зависимостями $\hat{G} = \overline{\tilde{G}} = \tilde{G}\overline{G}$, где \tilde{G} – первичный фильтр, \overline{G} – повторный фильтр, $\hat{\Delta} = \overline{\tilde{\Delta}}$ и величина $\hat{\Delta}$ входит в состав M_{ij} . Для ширин первичного и повторного фильтров справедливо выражение [17]:

$$\hat{\Delta}^2 = \tilde{\Delta}^2 + \overline{\Delta}^2.$$

Шаг расчетной сетки $\tilde{\Delta}_S$ и ширина первичного фильтра $\tilde{\Delta}$ связаны следующим образом: $\tilde{\Delta} = 2\tilde{\Delta}_S$, а для ширины повторного фильтра принято $\overline{\Delta} = 1.22\tilde{\Delta}$. Такие размеры шага расчетной сетки, ширин первичного и повторного фильтров позволяют эффективно определять энергообмен между различными масштабами вихрей в рамках динамической подсеточной модели для LES при $Re=10^4$.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Каждое из уравнений (1) дискретизируется на прямоугольной расчетной сетке с шагом $\tilde{\Delta}_S$ в вычислительной безразмерной области (см. [14–17]): $D = \{x_1 \leq x \leq x_k; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq z_k\}$, где $z_k=0.5$; x_1 определяется в рамках LES-технологии для каждого расчетного случая параметра Tu , т. е. $x_1(Tu)$; $x_k=x_1+2$. В вычислительном методе используется $\{N_x; N_y; N_z\}=\{385; 193; 97\}$ сеточных точек.

Граничные условия в турбулентном пограничном слое при $Re=10^4$ в режиме гидродинамически гладкой поверхности имеют следующий вид:

$$\text{при } y = 0; \quad 0 \leq z \leq z_k; \quad x_1 \leq x \leq x_k :$$

$$\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = 0;$$

$$\text{при } y = 1; \quad 0 \leq z \leq z_k; \quad x_1 \leq x \leq x_k :$$

$$\tilde{u} = 1 + \tilde{u}_p; \quad \tilde{v} = \tilde{v}_p; \quad \tilde{w} = \tilde{w}_p;$$

$$\text{при } z = 0; \quad z = z_k; \quad 0 \leq y \leq 1; \quad x_1 \leq x \leq x_k :$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0;$$

условие на входе в расчетную область

$$\text{при } x = x_1; \quad 0 \leq z \leq z_k; \quad 0 < y \leq 1 :$$

$$\tilde{u} = U_c + \tilde{u}_p; \quad \tilde{v} = \tilde{v}_p; \quad \tilde{w} = \tilde{w}_p;$$

на выходе из расчетной области

$$\text{при } x = x_k; \quad 0 \leq z \leq z_k; \quad 0 < y \leq 1$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + v_c \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + w_c \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = 0.$$

Параметры u_c, v_c и w_c определяются аналогично [14–17]. Динамическая скорость $u_*(x)$ вычисляется в процессе расчета.

Важной проблемой является необходимость детального задания мгновенного поля скорости на "входной" границе ($x = x_1$) в вычислительную область. Это влияет не только на точность получаемых результатов, но и на устойчивость расчета в целом. Неправильный учет спектра энергии влечет за собой значительное уменьшение амплитуды пульсаций в процессе использования метода установления по времени.

Принимаем следующее обозначение: $Re_\delta = \delta Re$, учитывая то, что характерный безразмерный масштаб расчетной области равен единице и $\delta < 1$.

Распределение средней скорости вдоль оси Oy при $0 \leq y^+ \leq 13.2$ ($y^+ = y u_* Re_\delta$) в вычислительной области турбулентного пограничного слоя определяется на основе эмпирической зависимости [20]:

$$U_c = u_*(y^+ - 0.0228(y^+)^2),$$

а распределение U_c при $13.2 < y^+ < 60$ вычисляется по следующей формуле [20]:

$$U_c = u_*(2.5 \ln(y^+) + 5.5 - 36.08/y^+).$$

Изменение величины средней скорости течения вдоль оси Oy при $y^+ \geq 60$ и $y \leq \delta$ в вычислительной области определяется как в [4], но с поправкой в числе Рейнольдса Re :

$$U_c = \frac{u_*}{\kappa} \{ \ln(u_* Re_\delta y / \delta) + \kappa C + (1 + 6\Pi)(y/\delta)^2 - (1 + 4\Pi)(y/\delta)^3 \}, \quad (2)$$

где $C=5.2$; $\kappa=0.4$; Π – параметр следа. Полагаем, что условная высота турбулентного пограничного слоя δ равна такому значению координаты y , в которой величина средней скорости течения равна $U_c = 0.995$. Используется также следующий критерий подобия:

$$\text{Re}_x = x\delta(x)\text{Re}. \quad (3)$$

В рамках выбранного способа задания физически значимой конечной вычислительной области важным является корректное определение значений x_1 и x_k на основе учета принятого критерия подобия течения Re_x . С этой целью полагаем, что при $x = x_1$ безразмерная высота турбулентного пограничного слоя $\delta(x_1)$ равна 0.75. При $y = \delta(x)$ формула (2) принимает следующий вид:

$$0.995 = \frac{u_*}{\kappa} \{ \ln(u_*\delta(x)\text{Re}) + \kappa C + 2\Pi \}. \quad (4)$$

Далее, составляем замкнутую систему уравнений на основе эмпирических зависимостей в поперечном сечении погранслоя при $x = x_1$ для того, чтобы сначала вычислить x_1 , а затем – динамическую скорость $u_*(x_1)$, характерную для обтекания гидродинамически гладкой поверхности турбулизированным набегающим потоком. Коэффициент поверхностного трения $c_f(Tu)$ определяется из [4]:

$$c_f(Tu) = 0.88 (\lg \text{Re}_x - 2.368) / (\lg \text{Re}_x - 1.5)^3 \times \\ \times \left[1 + (1 + 1.2 \cdot 10^{-3} \text{Re}_x^{1/2}) Tu \right]. \quad (5)$$

Используем также соотношение

$$u_*^2 = c_f(Tu)/2. \quad (6)$$

Для определения x_1 система уравнений (3)–(6) решается итерационным методом. Затем находим x_k по формуле $x_k = x_1 + 2$. Высота пограничного слоя δ при $x = x_k$ также определяется на основе решения системы уравнений (3)–(6). Величина x_k всегда выбирается так, что $\delta(x_1) < 1$ и $\delta(x_k) < 1$ для соблюдения принятых критериев подобия течения. Особую проблему представляет зависимость $\Pi = f(Tu, L_a, \text{Re})$; где $L_a(y)$ – максимальный масштаб турбулентных вихрей в расчетной области. Так, полагаем $\Pi = 0.55$ при $Tu = 0$ и $\text{Re} = 10^4$ на основе анализа [4, 18, 19].

В общем случае влияние турбулентности внешнего потока на структуру турбулентного пограничного слоя характеризуется следующими параметрами: 1) интенсивностью турбулентности набегающего потока; 2) его интегральным масштабом турбулентности; 3) отношением интегрального масштаба турбулентности набегающего потока

к толщине пограничного слоя в зависимости от продольной координаты вдоль пластины; 4) числом Рейнольдса для конкретного типа турбулизатора и турбулентного пограничного слоя; 5) спектром энергии за турбулизатором в тестовом сечении.

Работа [4] содержит эмпирические данные о зависимости $\Pi = f(Tu, L_a, \text{Re})$, в том числе $\Pi = f(Tu)$. В нашем численном исследовании используются экспериментальные результаты [4] с учетом параметров 1)–5) при заданных $L_a(y = \delta(x_1))$, Re для $0 \leq Tu < 0.08$ в виде следующей интерполяционной формулы:

$$\Pi = 0.55 - 0.9(5Tu)^{0.5}.$$

Значения $L_a(y)$ устанавливаем на основе учета параметров 1)–5), экспериментальных работ [4, 5, 7] и теоретических обобщающих исследований [6, 18, 19]. В результате изучения [4–7, 18, 19] получены эмпирические формулы для определения L_a в рамках представляемой LES-технологии (при $Y_a = y/\delta(x_1)$):

$$\text{при } 0 \leq Y_a \leq 0.7,$$

$$L_a(Y_a) = 0.15 \{ 1 - (1 - 10Y_a/7)^{3/2} \} [1 + 5Tu(0.75Y_a)^3];$$

$$\text{при } 0.7 < Y_a < 1,$$

$$L_a(Y_a) = \{ 0.15 - 0.25(Y_a - 0.7) \} [1 + 5Tu(0.75Y_a)^3];$$

$$\text{при } 1 \leq Y_a \leq 4/3,$$

$$L_a(Y_a) = 0.075 [1 + 5Tu(0.75Y_a)^3].$$

Нефильтрованные пульсации компонент мгновенной скорости на "входе" моделируем следующим образом:

$$u_p(x_1, y, z) = u_*(x_1) a_1 f_1(y) \sum_{m=1}^J m^{-5/6} \sin\left(\frac{2\pi z m}{L_a}\right);$$

$$v_p(x_1, y, z) = -u_*(x_1) a_2 f_2(y) \sum_{m=1}^J m^{-5/6} \sin\left(\frac{2\pi z m}{L_a}\right);$$

$$w_p(x_1, y, z) = u_*(x_1) a_3 f_3(y) \sum_{m=1}^J m^{-5/6} \sin\left(\frac{2\pi z m}{L_a}\right).$$

В данном случае конфигурации течения мы учитываем следующие экспериментально установленные факты [1–5]:

турбулентный пограничный слой имеет единственное однородное направление (Oz) для турбулентного поля скорости, поэтому

$$\langle u_p \rangle_z = \langle v_p \rangle_z = \langle w_p \rangle_z = 0;$$

спектр енергії турбулентних пульсацій подобен колмогоровському спектру і пропорціонален $k_m^{-5/3}$, где k_m – безрозмірне хвильове число ($k_m = m/L_a$);

$J = 50$ (визначено на основі спектра турбулентної енергії [1–5] для заданного Re).

В чисельних розрахунках $1/L_a$ завжди округляється до цілого числа.

Константи a_1, a_2 і a_3 знаходяться попереднім чисельним розрахунком в $x = x_1, y = y_{vj}$ (где $j = 1, 2, 3; y_{vj}$ – координата максимуму функції $f_j(y_{vj})$) при спостереженні наступних умов:

$$\langle u_p^2 \rangle_{z,t} = u_*^2(x_1)(a_1 f_1(y_{v1}))^2;$$

$$\langle v_p^2 \rangle_{z,t} = u_*^2(x_1)(a_2 f_2(y_{v2}))^2;$$

$$\langle w_p^2 \rangle_{z,t} = u_*^2(x_1)(a_3 f_3(y_{v3}))^2.$$

Функції $f_1(y), f_2(y), f_3(y)$ для $Tu = 0$ визначені на основі експериментальних даних [21] (далі по тексті позначаються $f_1^0(y), f_2^0(y)$ і $f_3^0(y)$).

Для випадку $Tu > 0$ із експерименту [4] відомо тільки $f_1(y)$. Функції $f_2(y), f_3(y)$ при $0 < y \leq 1$ апроксимуються наступним чином:

$$f_2(y) = f_2^0(y)f_1(y)/f_1^0(y);$$

$$f_3(y) = f_3^0(y)f_1(y)/f_1^0(y).$$

Причем на основі експериментальних даних [4] для $0 \leq Tu \leq 0.08$ полагается, що

$$f_2(y = 1) = f_1(y = 1)/2^{1/4};$$

$$f_3(y = 1) = f_1(y = 1)/2^{1/4}.$$

На верхній границі вичислювальної області нефільтровані пульсації компонент швидкості моделюємо наступним чином:

$$u_p(x, 1, z) = u_p(x_1, 1, z)u_*(x)/u_*(x_1);$$

$$v_p(x, 1, z) = v_p(x_1, 1, z)u_*(x)/u_*(x_1);$$

$$w_p(x, 1, z) = w_p(x_1, 1, z)u_*(x)/u_*(x_1).$$

3. ЧИСЛЕННИЙ МЕТОД

В даній моделі турбулентного пограничного шару з турбулізованим натекаючим потоком розглядається задача, яка при фіксованих умовах на границях розв'язується до виходу на встановившийся режим при необхідному числі кроків по часу (подробно [14–17]).

В межах повного чисельного алгоритму значення динамічної швидкості $u_*(x)$ визначається

по ходу ітераційної процедури. Використовуючи результати розрахунку на попередньому кроку по часу t_{k-1} , знаходимо динамічну швидкість для поточного кроку t_k (і так далі до виконання умови збіжності LES-підходу):

$$u_*^k(x) = \frac{1}{15} \sum_{i=36}^{50} \frac{\langle \bar{u}(x, y_i, z) \rangle_z}{(1/\kappa) \ln(y_i u_*^{k-1}(x) Re) + C}, \quad (7)$$

где $y_i = i \tilde{\Delta}_S$.

Залежності (5)–(6) використовуються тільки для визначення граничного умову на вході $x = x_1$ і визначення коректних розмірів розрахункової області в зв'язі з вибраними критеріями подобию.

4. РЕЗУЛЬТАТИ ВИЧИСЛЕНЬ

На основі чисельного алгоритму, розробленого в межах LES-технології, проведені розрахунки параметрів течії в турбулентному пограничному шарі ($Re=10^4$) при наявності турбулізованого зовнішнього потоку ($Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$). Для вичислень застосовувався комп'ютер PENTIUM-IV з тактовою частотою 3 ГГц і оперативною пам'яттю 512 Мб. Розрахунок по часу припиняється при виконанні наступного умову: середні по однорідному напрямку Oz підсередні напруження на кожному кроку по часу змінюються менше, ніж на одну десятину відсотка. Для виходу на встановившийся режим (при використанні неявної абсолютно стійкої схеми) і накоплення статистик для усереднення було проведено $K=1200$ кроків по часу з $\Delta t = 0.005$ за проміжок часу $T_c = K \Delta t$ (см. докладно в [14–17]). Повне час розрахунку поставленої задачі на вказаному вище комп'ютері становить 8 годин 35 хвилин. Результати розрахунку течії в турбулентному пограничному шарі ($Re=10^4$) з турбулізованим зовнішнім потоком ($Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$) на основі LES-технології в світовій науковій літературі нами не виявлені.

На наведених нижче графіках представлені зміни основних середніх (по однорідному напрямку Oz) безрозмірних характеристик турбулентного пограничного шару вздовж безрозмірної координати y в сеченні $x_c = x_1(Tu) + 1$ для наступних випадків:

I. $Tu=0; x_c = 71.118; Re_x(x_c) = 604505;$

II. $Tu=0.0287; x_c = 42.956; Re_x(x_c) = 364055;$

III. $Tu=0.0466; x_c = 40.134; Re_x(x_c) = 334122;$

IV. $Tu=0.0754; x_c = 38.137; Re_x(x_c) = 310246.$

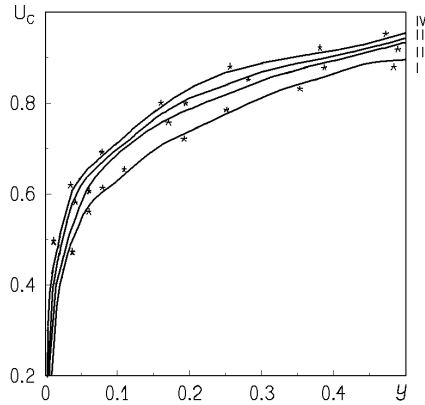


Рис. 1. Зависимость средней скорости U_c от y , $0 \leq y \leq 0.5$ для $Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$: расчет – сплошная кривая; экспериментальные данные [4] – значки *

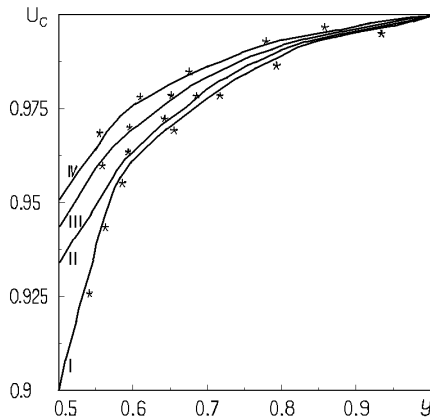


Рис. 2. Зависимость средней скорости U_c от y , $0.5 \leq y \leq 1$ для $Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$: расчет – сплошная кривая; экспериментальные данные [4] – значки *

Для сравнения результатов в данной работе используются экспериментальные данные [4], полученные при $Re=10^4$, и удалении от начала пластины вдоль по потоку при $x_c = x_1(Tu) + 1$ в соответствующем диапазоне чисел $Re_x(Tu, x_c)$, а именно, $3 \cdot 10^5 \leq Re_x \leq 7 \cdot 10^5$.

На рис. 1, 2 представлена зависимость безразмерной средней скорости U_c от y для случаев I–IV и экспериментальные данные [4]. На рис. 1 приведены результаты на участке $0 \leq y \leq 0.5$, а на рис. 2 – на участке $0.5 \leq y \leq 1$. При сопоставлении численных и экспериментальных результатов видно, что разработанная модель довольно точно описывает изменение средней скоро-

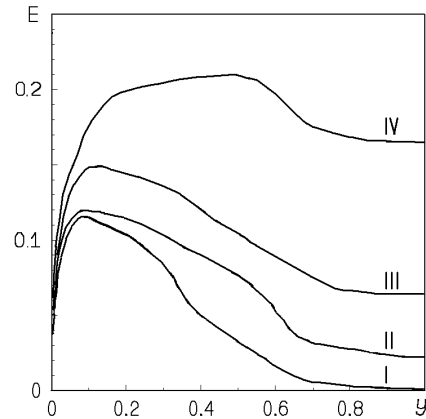


Рис. 3. Зависимость полной кинетической энергии E от y для $Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$

сти течения поперек турбулентного пограничного слоя для различных Tu для заданного числа Рейнольдса $Re=10^4$. Расчетами подтверждается экспериментально установленное существование логарифмического участка в профиле средней скорости (записанном в универсальных координатах) в турбулентном пограничном слое у стенки при турбулентном внешнем потоке ($Tu < 0.08$). Выявлена также общая закономерность – чем больше Tu , тем больше значение $U_c(y)$ при заданном числе Рейнольдса расчетной области Re . В процессе вычислений установлено, что увеличение параметра внешней турбулентности Tu ведет к возрастанию динамической скорости и поверхностного трения. Различия между значениями коэффициента поверхностного трения, определенного нашим численным методом, и экспериментальным способом [4] составляют не более двух процентов. Отметим, что экспериментально найденный коэффициент поверхностного трения для различных Tu хорошо аппроксимируется формулой (5) и поэтому график его расчетных значений не приведен в статье.

Используя безразмерную формулу для определения параметра Tu ,

$$Tu = \sqrt{\langle u_p^2 + v_p^2 + w_p^2 \rangle_{z,t}} / 3,$$

и экспериментальные зависимости из [4]

$$\langle v_p^2(y=1) \rangle_{z,t} = \langle u_p^2(y=1) \rangle_{z,t} / \sqrt{2};$$

$$\langle w_p^2(y=1) \rangle_{z,t} = \langle u_p^2(y=1) \rangle_{z,t} / \sqrt{2},$$

получаем

$$Tu = \sqrt{\langle u_p^2(y=1) \rangle_{z,t} (1 + \sqrt{2})} / 3.$$

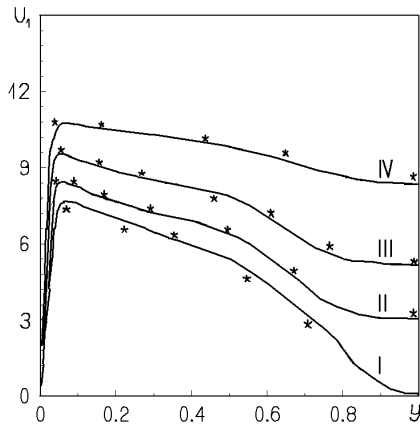


Рис. 4. Зависимость продольной пульсации скорости U_1 от y для $Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$: расчет – сплошная кривая; экспериментальные данные [4] – значки *

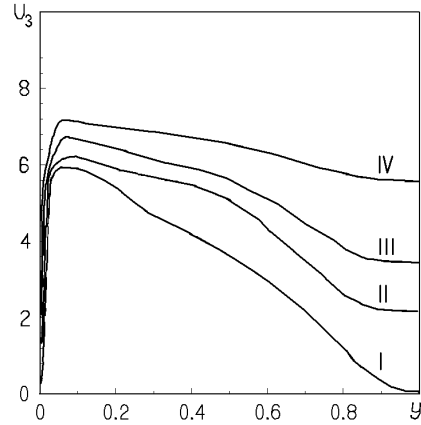


Рис. 6. Зависимость боковой пульсации скорости U_3 от y для $Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$

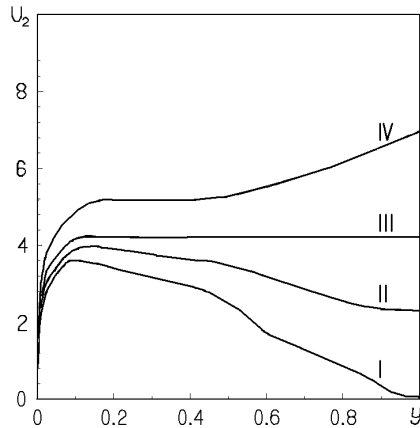


Рис. 5. Зависимость поперечной пульсации скорости U_2 от y для $Tu = \{0; 0.0287; 0.0466; 0.0754\}$

Полные нормальные турбулентные напряжения представлены в таком виде:

$$T_{11} = \langle (\tilde{u}_1 - U_c)^2 + \tau_{11} \rangle_{z,t}.$$

$$T_{22} = \langle \tilde{u}_2^2 + \tau_{22} \rangle_{z,t}, \quad T_{33} = \langle \tilde{u}_3^2 + \tau_{33} \rangle_{z,t}.$$

На рис. 4 изображено изменение продольной пульсации скорости $U_1 = 100\sqrt{T_{11}}$ вдоль y для случаев I–IV и экспериментальные данные [4]. Расчетные и экспериментальные данные хорошо коррелируются. На рис. 5 дана зависимость расчетной поперечной пульсации скорости $U_2 = 100\sqrt{T_{22}}$ от y для случаев I–IV. Важно отметить, что форма профиля поперечной пульсации скорости с увеличением y подвергается нарастающему воздействию уровня турбулентности внешнего потока. Это поведение чрезвычайно ярко выражено во внешней части пограничного слоя. На рис. 6 приведена зависимость расчетной боковой пульсации скорости $U_3 = 100\sqrt{T_{33}}$ от y для случаев I–IV. Результаты вычислений поперечной и боковой пульсаций скорости получены впервые для $Re = 10^4$, гармонично и выразительно дополняют экспериментально установленную картину течения. На основе анализа полученных нами численных данных установлена общая закономерность для характеристик турбулентности в пограничном слое при наличии внешней турбулентности – чем больше Tu , тем выше значения E , U_1 , U_2 и U_3 поперек погранслоя при заданном числе Рейнольдса расчетной области Re .

Последние три зависимости играют важную роль при сравнении экспериментальных данных с результатами численного расчета характеристик турбулентности.

На рис. 3 показана зависимость удвоенной полной кинетической энергии турбулентности E от y для случаев I–IV, где

$$E = \langle (\tilde{u}_1 - U_c)^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2 + \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \rangle_{z,t}.$$

Очевидно, что форма профиля турбулентной энергии по мере удаления от стенки испытывает нарастающее влияние параметра турбулизации внешнего потока Tu , особенно во внешней части пограничного слоя в области следа.

В процессе расчетов установлено, что вклад подсеточной кинетической энергии в полную турбулентную энергию составляет около 6–7 процентов. Такое поведение аналогично и для полных нормальных турбулентных напряжений.

Представленный в настоящей работе алгоритм численного моделирования турбулентного пограничного слоя с турбулентным внешним потоком и полученные результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными [4, 22, 23], дополняют их и обладают определенной универсальностью при моделировании данного класса задач при $5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^6$, $0 < Tu < 0.08$. Далее по тексту подробно анализируется вопрос об уровне универсальности представленной модели.

Важной практической проблемой является исследование течения при различных конфигурациях ПТП (набегающий поток – турбулизатор – пластина). Основные характеристики ПТП: скорость набегающего потока, конструкция турбулизатора, расстояние от турбулизатора до носика пластины, длина пластины и вид ее поверхности.

Существует большое разнообразие в конструкции турбулизаторов, например сетки, решетки, диафрагмы и системы струй.

Определим уровень универсальности представленной в данной работе модели течения турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости в режиме гидродинамически гладкой поверхности с турбулизированным внешним потоком по отношению к различным конфигурациям ПТП.

Данный вопрос состоит из двух частей:

– уровень универсальности модели турбулентного пограничного слоя с турбулизированным внешним потоком (при $Re=10^4$ и $0 < Tu < 0.08$), разработанной на основе LES-технологии для решения уравнений Навье-Стокса;

– уровень универсальности моделирования граничных условий на “входе” ($x = x_1$) и на верхней грани ($y=1$) вычислительной области.

Ответ на первую часть состоит в следующем. Разработанная в данной работе модель турбулентного пограничного слоя с турбулизированным внешним потоком (при $Re=10^4$ и $0 < Tu < 0.08$) на основе LES-технологии для решения уравнений Навье-Стокса универсально пригодна для различных конфигураций ПТП в случае подробного задания поля скорости (определенного из эксперимента) на “входе” и на верхней грани вычислительной области и единых для всех видов ПТП граничных условий на боковых, нижней и “выходной” гранях расчетной области при $5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^6$, $0 < Tu < 0.08$ и сохранении логарифмического участка в профиле средней скорости. Численная модель содержит три основных параметра: Re ; Re_x ; Tu . Динамическая подсеточная модель имеет расчетный коэффициент C_V .

Ответ на вторую часть заключается в том, что в случае отсутствия полноценной базы эксперимен-

тальных данных о поле скорости на “входе” и на верхней грани вычислительной области осуществляется моделирование граничных условий на “входе” и на верхней грани в виде реконструкции поля скорости на основе ряда экспериментально определенных характеристик (доступных для использования) исследуемого течения. Модель аппроксимации поля скорости на “входе” и на верхней грани вычислительной области имеет ограниченный уровень универсальности применения по отношению к различным конфигурациям ПТП, поскольку в технологии аппроксимации заложено подавляющее большинство параметров, констант и функциональных зависимостей пригодных только для отдельных видов конфигураций ПТП.

Уровень универсальности моделирования поля скорости на “входе” и на верхней грани определяется степенью общности характеристик предполагаемой для исследования конфигурации ПТП и конструкции течения, непосредственно изученной в нашей работе.

В исследовании [4] проводится сравнение полученных экспериментальных результатов с данными экспериментов [22, 23] для одинаковых условий (те же тип турбулизатора внешнего потока, величина интегрального масштаба турбулентности, параметр турбулизации внешнего потока Tu , Re_x , расстояние от турбулизатора до начала пластины) и установлена хорошая согласованность между ними. Но для других видов ПТП экспериментальных данных такой полноты, как в [4], в научной литературе нами не обнаружено. В работе [6] представлена только эмпирическая обобщенная зависимость относительного приращения поверхностного трения на пластине от интегрального масштаба турбулентности, параметра турбулизации внешнего потока Tu , числа Рейнольдса $Re_x = 10^5 - 10^7$ для различных видов турбулизаторов внешнего потока с набором расстояний от турбулизатора до начала пластины. Сравнение экспериментальных результатов [6] с [4, 22, 23] показало удовлетворительную согласованность.

Существуют экспериментальные работы об обтекании турбулизаторов [1, 2, 4–6, 7], таких как сетки, решетки, диафрагмы и системы струй. В работах [1, 2, 4–6, 7, 22, 23] установлены основные отличительные черты течения за турбулизаторами:

- а) уменьшение уровня турбулентных пульсаций скорости вниз по потоку на основном участке;
- б) изменение величины интегрального масштаба турбулентности L_a вниз по потоку;
- в) для каждого типа турбулизатора вниз по потоку наблюдается конкретный вид анизотро-

пии турбулентных пульсаций скорости (отношения осредненных квадратов компонент пульсационной скорости);

г) влияние величины скорости (набегающего на турбулизатор) потока на характеристики течения.

В разработанной нами методике реконструкции поля скорости для граничных условий на “входе” и верхней грани вычислительной области предусмотрен механизм учета факторов а)–г). Но конкретный вид зависимостей возможен только при наличии экспериментальных данных для соответствующей конфигурации ПТП.

Рассмотрим некоторые характерные случаи конфигурации ПТП:

– при применении идентичной конструкции турбулизатора, использованной в нашей модели. В работах [1, 2, 4–6, 7, 22, 23] установлено, что увеличение расстояния от турбулизатора до носика пластины или уменьшение скорости набегающего на турбулизатор однородного потока ведет к уменьшению расчетного значения параметра Tu . Существует большая вероятность того, что вид зависимостей в слагаемых с Tu , использованных прежде, будет справедлив в этом случае, но доказательства можно получить только путем проведения соответствующих экспериментальных исследований. В данном случае сохраняется, согласно в), тот же уровень анизотропии турбулентных пульсаций скорости (отношения осредненных квадратов компонент пульсационной скорости). В нашей модели это представлено зависимостями для верхней грани вычислительной области:

$$f_2(y = 1) = f_1(y = 1)/2^{1/4};$$

$$f_3(y = 1) = f_1(y = 1)/2^{1/4},$$

что соответствует экспериментальным данным [4]

$$\langle v_p^2(y = 1) \rangle_{z,t} = \langle u_p^2(y = 1) \rangle_{z,t} / \sqrt{2};$$

$$\langle w_p^2(y = 1) \rangle_{z,t} = \langle u_p^2(y = 1) \rangle_{z,t} / \sqrt{2};$$

– при других конструкциях турбулизатора слагаемые с параметром Tu , используемые в нашей модели, будут иными и уровень анизотропии турбулентных пульсаций скорости также изменится.

Для всех конфигураций ПТП универсально применима структура моделирования компонент поля мгновенной скорости, представленная в нашей работе:

$$u_p(x_1, y, z) = u_*(x_1) a_1 f_1(y) \sum_{m=1}^J m^{-5/6} \sin\left(\frac{2\pi z m}{L_a}\right);$$

$$v_p(x_1, y, z) = -u_*(x_1) a_2 f_2(y) \sum_{m=1}^J m^{-5/6} \sin\left(\frac{2\pi z m}{L_a}\right);$$

$$w_p(x_1, y, z) = u_*(x_1) a_3 f_3(y) \sum_{m=1}^J m^{-5/6} \sin\left(\frac{2\pi z m}{L_a}\right).$$

Если для случаев $0 < Tu < 0.08$ из эксперимента известно только $f_1(y)$, то функции $f_2(y)$, $f_3(y)$ при $0 < y \leq 1$ аппроксимируются для всех конфигураций ПТП универсальным образом:

$$f_2(y) = f_2^0(y) f_1(y) / f_1^0(y);$$

$$f_3(y) = f_3^0(y) f_1(y) / f_1^0(y).$$

В рамках разработанной общей модели в данной работе в процессе реконструкции граничных условий на “входе” и на верхней грани вычислительной области в слагаемых с параметром Tu используется методика аппроксимации ряда осредненных характеристик течения (определенных из эксперимента [4]) функциональными зависимостями и параметрами с высоким уровнем корреляции между экспериментальными данными и аппроксимированными величинами.

Для случаев $Tu = \{0.0287; 0.0466; 0.0754\}$ проведены численные исследования чувствительности аппроксимированных величин к изменению характера зависимостей (т. е. изменение осредненного уровня корреляции до 5%) в слагаемых с параметром Tu при определении Π , L_a , C_f . Расчеты показали, что при изменении осредненного уровня корреляции в пределах до 5% между экспериментальными данными и зависимостями, аппроксимирующими их, отклонения в значениях основных характеристик (осредненных по z), а именно, средней скорости, турбулентных напряжений и энергии турбулентности, не превышали одного процента. Это свидетельствует об устойчивости аппроксимационных зависимостей к относительно малым возмущениям при сохранении высокого уровня корреляции между экспериментальными данными и аппроксимационными зависимостями в слагаемых с параметром Tu . Использование методики аппроксимации экспериментальных данных допускает определенную вариантность в представлении функциональных зависимостей и числовых констант, но при этом необходимо выполнение требования о высоком уровне корреляции между экспериментальными данными и зависимостями, аппроксимирующими их.

Использованные в рамках разработанной модели турбулентного пограничного слоя с турбулизированным внешним потоком (при $Re=10^4$ и

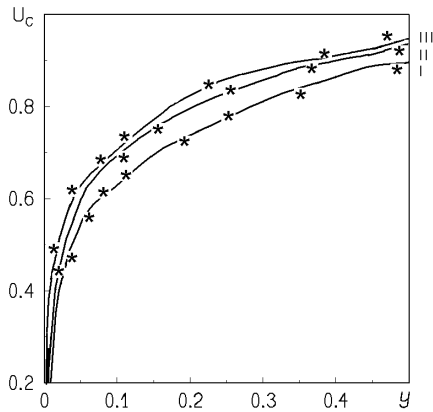


Рис. 7. Зависимость средней скорости U_c от y $0 \leq y \leq 0.5$ для $Tu = \{0; 0.035; 0.07\}$: расчет – сплошная кривая; экспериментальные данные [23] – значки *

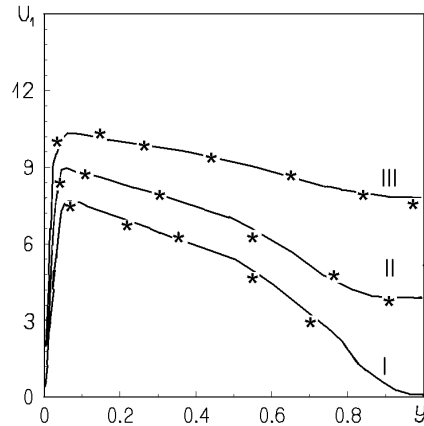


Рис. 9. Зависимость продольной пульсации скорости U_1 от y для $Tu = \{0; 0.035; 0.07\}$: расчет – сплошная кривая; экспериментальные данные [23] – значки *

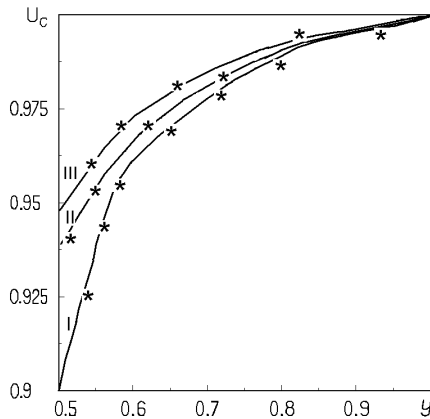


Рис. 8. Зависимость средней скорости U_c от y $0.5 \leq y \leq 1$ для $Tu = \{0; 0.035; 0.07\}$: расчет – сплошная кривая; экспериментальные данные [23] – значки *

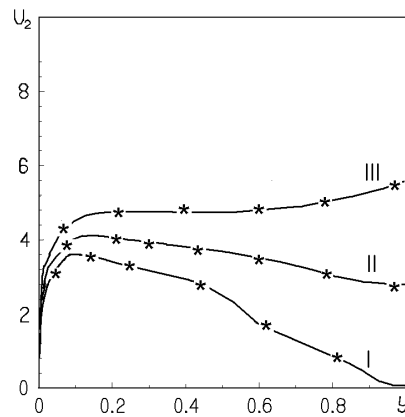


Рис. 10. Зависимость поперечной пульсации скорости U_2 от y для $Tu = \{0; 0.035; 0.07\}$: расчет – сплошная кривая; экспериментальные данные [23] – значки *

$0 < Tu < 0.08$) для предельного случая (отсутствия турбулизатора $Tu = 0$) зависимости и константы будут также универсально справедливы в общей модели для всех видов ПТП при аппроксимации граничных условий на “входе” и верхней грани расчетной области для $5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^6$, $0 < Tu < 0.08$.

Протестируем разработанный в настоящей работе алгоритм численного моделирования турбулентного пограничного слоя с турбулентным внешним потоком и сравним полученные результаты расчета с экспериментальными данными [23], которые очень близки по условиям создания турбулентности внешнего течения для $Re=10^4$ и уда-

лении от начала пластины вдоль по потоку при $x_c = x_1(Tu) + 1$ и $3 \cdot 10^5 \leq Re_x \leq 7 \cdot 10^5$.

На рис. 7–11 представлены изменения основных осредненных безразмерных характеристик турбулентного пограничного слоя вдоль безразмерной координаты y в сечении x_c для случаев:

- I. $Tu=0$; $x_c = 71.118$; $Re_x(x_c) = 604505$;
- II. $Tu=0.035$; $x_c = 42.017$; $Re_x(x_c) = 349798$;
- III. $Tu=0.07$; $x_c = 38.537$; $Re_x(x_c) = 320643$.

На рис. 7, 8 представлена зависимость безразмерной средней скорости U_c от y для случаев I–III и экспериментальные данные [23]. Сравнение численных и экспериментальных результатов показывает, что разработанная модель хорошо описывает изменение средней скорости течения попе-

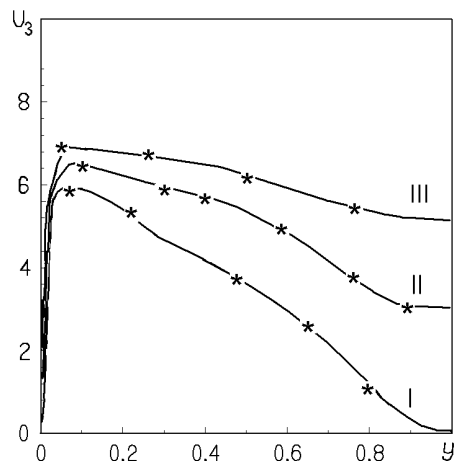


Рис. 11. Зависимость боковой пульсации скорости U_3 от y для $Tu = \{0; 0.035; 0.07\}$: расчет – сплошная кривая; экспериментальные данные [23] – значки *

рек турбулентного пограничного слоя для различных Tu для заданного числа Рейнольдса $Re=10^4$.

На рис. 9–11 представлено изменение продольной, поперечной и боковой пульсации скорости U_1, U_2, U_3 вдоль y для случаев I–III и экспериментальные данные [23]. Расчетные и экспериментальные данные хорошо согласуются. Сравнение рис. 4–6 с рис. 9–11 позволяет нам сделать вывод об общих закономерностях влияния турбулентности внешнего потока на турбулентный пограничный слой. Поэтому в данной работе процесс реконструкции граничных условий на “входе” и на верхней грани вычислительной области в слагаемых с параметром Tu обладает определенной универсальностью, что подтверждается результатами расчетов и экспериментальными данными [4, 23] для всех трех компонент скорости.

ВЫВОДЫ

В данном исследовании разработана LES-технология, которая представляет собой дальнейшее развитие LES-подхода [14–17], но уже с учетом влияния турбулентности внешнего потока в увеличенной расчетной области на измельченной конечно-разностной сетке. Воздействие турбулентности набегающего потока учитывается в граничных условиях при решении фильтрованных трехмерных уравнений Навье-Стокса. В представленном исследовании система уравнений решается численным методом [17].

Впервые развита численная трехмерная модель

турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости в режиме гидродинамически гладкой поверхности с турбулизированным внешним потоком (при $Re=10^4$ и $0 < Tu < 0.08$) на основе LES-технологии. В данной модели все параметры и уравнения имеют безразмерный вид. Численная модель содержит три основных параметра: 1) число Рейнольдса заданной расчетной области Re ; 2) число Re_x ; 3) интенсивность турбулентности набегающего на пластину безграничного потока Tu . Динамическая подсеточная модель имеет расчетный коэффициент C_V .

Впервые на основе LES-технологии для турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости в режиме гидродинамически гладкой поверхности с турбулизированным внешним потоком при $Re=10^4$ и $Tu = \{0; 0.0287; 0.035; 0.0466; 0.07; 0.0754\}$ (с применением численно-аналитической реконструкции поля мгновенной скорости для входных граничных условий LES-подхода) получены численные значения осредненной скорости, кинетической турбулентной энергии, продольной, поперечной и боковой пульсаций скорости. Сравнение наших численных результатов с экспериментальными данными другого автора показало хорошую согласованность. Численно определено, что турбулентность внешнего потока влияет на профили средней скорости и турбулентных пульсаций в пограничном слое, в первую очередь, в его внешней части и особенно сильно на поперечную пульсацию скорости. Увеличение параметра внешней турбулентности Tu ведет к возрастанию поверхностного трения. Расчетами подтверждается экспериментально установленное существование логарифмического участка в профиле средней скорости (записанном в универсальных координатах) в турбулентном пограничном слое у стенки при турбулентном внешнем потоке ($Tu < 0.08$).

Впервые численным решением трехмерных уравнений установлена общая закономерность для характеристик турбулентности в пограничном слое при наличии внешней турбулентности – увеличение параметра Tu ведет к возрастанию значений осредненной скорости, кинетической турбулентной энергии, продольной, поперечной и боковой пульсаций скорости поперек погранслоя при заданном числе Рейнольдса расчетной области $Re=10^4$.

В рамках LES-технологии вклад подсеточной кинетической турбулентной энергии в полную турбулентную энергию составляет около 6–7 процентов (при выбранных шагах фильтра и конечно-разностной сетки).

1. Юдаев Б.Н., Михайлов М.С., Савин В.К. Теплообмен при взаимодействии с преградами.– М.: Машиностроение, 1977.– 234 с.
2. Белов И.А. Взаимодействие неравномерных потоков с преградами.– Л.: Машиностроение, 1983.– 201 с.
3. Романенко П.Н. Гидродинамика и теплообмен в пограничном слое. Справочник.– М.: Энергия, 1974.– 464 с.
4. Гудилин И.В., Ким А.Ю., Шумилкин В.Г. Влияние турбулентности внешнего потока на пограничный слой // Труды ЦАГИ.– 1994.– Вып.2509.– С. 3–23.
5. Гудилин И.В., Ким А.Ю., Шумилкин В.Г. Экспериментальное исследование вырождения турбулентности за диафрагмами и решетками // Труды ЦАГИ.– 1994.– Вып.2509.– С. 24–40.
6. Кузнецов В.К., Левицкий В.И., Репик Е.У., Соседко Ю.П. Влияние турбулентности набегающего потока на поверхностное трение в турбулентном пограничном слое // Изв.РАН,МЖГ.– 1995.– N2.– С. 65–75.
7. Stefes B., Fernholz H. Skin friction and turbulence measurements in a boundary layer with zero-pressure-gradient under the influence of high intensity free-stream turbulence // Eur.J.Mech.B-Fluids.– 2004.– v.23.– P. 303–318.
8. Быстров Ю.А., Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Леонтьев А.И. Численное моделирование вихревой интенсивности теплообмена в пакетах труб.– СПб.: Судостроение, 2005.– 392 с.
9. Vreman B., Geurts B., Kuerten H. On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model // Phys.Fluids.– 1994.– v.6,N12.– P. 4057–4059.
10. Zang Y., Street R., Koseff J. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows // Phys.Fluids A.– 1993.– v.5,N12.– P. 3186–3196.
11. Piomelli U. High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model // Phys.Fluids A.– 1993.– v.5,N6.– P. 1484–1490.
12. Meneveau C., Katz J. Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation // Annu.Rev.Fluid.Mech.– 2000.– v.32.– P. 1–32.
13. Piomelli U., Balaras E. Wall-layer models for Large-Eddy Simulations // Annu.Rev.Fluid.Mech.– 2002.– v.34.– P. 349–374.
14. Кузьменко В.Г. Численное трехмерное моделирование турбулентного пограничного слоя в режиме развитой шероховатости на основе LES-технологии // Прикладна гідромеханіка.– 2002.– 4(76), N3.– С. 31–41.
15. Кузьменко В.Г. Численное трехмерное моделирование турбулентного пограничного слоя в режиме промежуточной шероховатости // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– 5(77), N2.– С. 27–36.
16. Кузьменко В.Г. Численное трехмерное моделирование турбулентного пограничного слоя на основе экономичной LES-технологии // Прикладна гідромеханіка.– 2004.– 6(78), N1.– С. 19–24.
17. Кузьменко В.Г. Динамические подсеточные модели для LES-технологии // Прикладна гідромеханіка.– 2004.– 6(78), N3.– С. 22–27.
18. Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колесников А.В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.– Л.: Судостроение, 1973.– 256 с.
19. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М.: Инлит, 1956.– 528 с.
20. Бабенко В.В., Канарский М.Б., Коробов Б.И. Пограничный слой на эластичных пластинах.– К.: Наукова думка, 1993.– 261 с.
21. Ligrani P., Moffat R. Structure of transitionally rough and fully rough turbulent boundary layers // J.Fluid.Mech.– 1986.– v.162.– P. 69–98.
22. Симонич Д., Бредшоу П. Влияние турбулентности внешнего потока на теплообмен в турбулентном пограничном слое // Теплопередача.– 1978.– Т.100,N4.– С. 16–21.
23. Хэнкок Р., Бредшоу П. Влияние турбулентности невозмущенного потока на характеристики турбулентных пограничных слоев // Теоретические основы инженерных расчетов.– 1983.– Т.105,N3.– С. 126–132.