Всеукраинской научно–методической конференции «Проблемы экономической кибернетики» (11–13 сентября 2002). – с.55–65.
18. Із кожної кризи Росія виходить дедалі більш сировинною країною – О.Аузан / gazeta.ua, 23 вересня 2011 року [електронний ресурс].
19. Росії треба змінити суспільство, аби розвиватися далі – О.Аузан / gazeta.ua, 23 вересня 2011 року [електронний ресурс].
20. http://www.plan.be/desc.php?lang=en&TM=41&IS=57 [електронний ресурс].

УДК 656.13.681.3 **В.Г.Галушко**

Методологические основы экономико-статистического моделирования сложных экономических систем

Описано методологічний підхід до щоденного планування автомобільних перевезень вантажів між вантажоутворюючими пунктами (терміналами) з урахуванням визначення ймовірнісних розподілів з використанням операцій над випадковими величинами об'ємів. Підсумовуваня-добове накопичення обсягів вантажів. Віднімання-обсяги вантажів, які очікують відправки після виконання запланованих добових обсягів. Min-обсяги перевезень без порожнього пробігу автомобіля. Max-обсяги перевезень всіх вантажів без їх простою.

Ключові слова: *автомобільні перевезення, розподілу накопичуваних обсягів вантажів, розподілу обсягів перевезень без порожнього пробігу автомобіля і без простою вантажів.*

Describes the methodological approach to the daily planning of road transport of goods between the freight traffic points (terminals) to determine the probability *distributions using operations over random variables volumes. Build-daily accumulation of cargo volumes. Subtract the volume of cargo, waiting to be sent after the scheduled. Min-traffic volumes, without the empty mileage. Max-volume shipments of goods without downtime.*

Keywords: *road transport, distribution, accumulated volumes of goods, distribution of traffic volumes, without the empty mileage and cargo with no downtime.*

Вступление. Моделирование - это метод исследований, при котором изучаемая система заменяется моделью, которая с достаточной точностью описывает функционирование данной системы. Среди различных методов моделирования особое место занимает метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Этот метод отличается простотой, обладает достаточной универсальностью, позволяет решать широкий класс экономических и технических задач, для которых характерно наличие многих факторов задаваемых вероятностными законами распределения, что затрудняет получение решения в аналитическом виде.

В связи с этим решение сложных экономических задач, какими являются перевозочные транспортные системы на сетях автомобильных дорог региона в условиях влияния многочисленных случайных факторов, требуют разработки методологического подхода, учитывающего использование вероятностных законов распределения случайных факторов, полученных в результате непосредственной статистической обработки используемых показателей так и получения необходимых вероятностных законов распределения с использованием операций со случайными величинами**.**

Анализ последних исследований. Значительный научный вклад в моделировании экономических систем и решении транспортных задач внесли ученые ИК НАНУ Украины Бакаев А.А., Бажан Л.И., Гриценко В.И., Кутах А.П., Пономаренко Л.А., Яровицкий Н.В и др. [1-5].

В настоящее время успешное применение методов моделирования требует, в первую очередь, разработки алгоритма решения задачи с учетом получения псевдослучайных чисел, распределенных по заданному вероятностному закону, для получения которых целесообразно использовать прикладные программы, облегчающих программирование задачи и практическое решение ее с использованием компъютера.

Однако в большинстве решаемых задач используются законы распределения отдельно взятых случайных величин, которые определяются на основании математической обработки статистических данных, а при необходимости получения законов распределения взаимосвязанных случайных величин не всегда представляется возможным или затруднительно по причине отсутствия статистики, что требует разработки моделей с использованием операций над случайными величинами. Примерами таких задач может быть исследование сложных транспортных логистических систем для которых:

- определение законов распределения накапливаемых объемов грузов в терминалах в течении нескольких суток – это сложение случайных величин ежесуточных объемов грузов;

- закон распределения наличия объемов грузов после выполнения запланированных отправок – это вычитание случайных величин;
- закон распределения планируемых объемов перевозок на маятниковом маршруте с загрузкой автомобиля в прямом и обратном направлениях – это минимум из двух случайных величин объемов грузов, формируемых в начальном и конечном пунктах маршрута;
- закон распределения планируемых перевозок на маятниковом маршруте при условии не допущения простоя грузов – это максимум из двух случайных величин объемов грузов, формируемых в начальном и конечном пунктах маршрута.

Целью данной работы является разработка методологического подхода к моделированию сложных систем методом статистических испытаний с учетом определения вероятностных законов распределения показателей взаимосвязанных факторов с использованием операций со случайными величинами (сложение, вычитание, *min*, *max*) и использования полученных распределений при создании общей модели задачи.

Изложение основного материала. Методологический подход включает следующую последовательность:

1. Математическая обработка статистических данных и установление вероятностных законов распределения **(Этап 1):**

-выбор законов распределения;

-установление законов распределения при выполнении различных операций над случайными величинами (при необходимости).

2. Определение законов распределения для суммы и разности двух случайных величин

(Этап 2).

3. Определение законов распределения для минимальной и максимальной из двух случайных величин

(Этап 3).

4. Получение псевдослучайных чисел с заданным законом распределения

(Этап 4)

5. Описание алгоритма моделирования сложной системы, составление программы и проведение расчетов

(Этап 5).

Рассмотрим основные этапы моделирования сложных систем.

Этап 1. **Выбор законов распределения**

При необходимости обработки статистических данных закон распределения может быть установлен с выполнением расчетов по аналитическим зависимостям [7-9] или с использованием программного обеспечения [10].

В настоящее время широкое развитие и использование получили компъютерные технологии статистической обработки данных, реализованные в следующих пакетах прикладных программ:

- профессиональные SAS. BMDP;
- специальные BIOSTAT, DATASCOPE;
- универсальные STADIA, OLIMP, STSTGRAPHICS, SPPS, STATISTICA и др.

Для подбора вероятностных законов распределений может быть использован пакет прикладных программ STATISTICA Release: 6, который достаточно русифицирован для практического использования и включает описание следующих непрерывных и дискретных законов распределений**:**

1. Бернулли. 2. Бета. 3. Биномиальное. 4. Коши. 5. Хи-квадрат. 6. Экспоненциальное.

7. Экстремальных значений. 8. F-распределение.9. Гамма. 10. Гомперца. 11. Лапласса. 12 Логистическое. 13. Логнормальное. 14. Нормальное. 15. Парето. 16. Пуассона. 17. Релея. 18. Равномерное. 19. Стьюдента. 20. Вейбулла.

Этап 2. Определение суммы и разности двух случайных величин

При решении социально-экономических, транспортных задач возникает необходимость сложения и вычитания случайных величин. Так например, при планировании транспортно-логистических систем такими величинами являются ежесуточное поступление объемов грузов (в тоннах, автомобилях, контейнерах) в терминальную систему и его накопление в течение заданого количества дней, а также наличие объемов после плановой суточной отправки грузов.

Рассмотрим общий случай определения плотности распределения суммы двух непрерывных случайных величин [7]

$$Y=X_1 + X_2 \qquad (1)$$

Пусть (X_1, X_2,) является системой непрерывных случайных величин с плотностью $f(x_1,x_2)$. Тогда плотность распределения суммы запишется как

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty}(f\ (x_1,y-x_1))dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y-x_2,x_2).dx_2 \qquad (2)$$

Для независимых случайных величин X_1 и X_2 плотность распределения суммы равна

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\,f_2(y-x_1)dx_1$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y-x_2)\,f_2(x_2)dx_2 \qquad (3)$$

Для разности двух случайных величин X_1 -X_2, то есть

$$Y=X_1 - X_2 \qquad (4))$$

можно рассматривать плотность распределения $f(x_1, -x_2)$ и по аналогии с (3) плотность распределения разности запишется как

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} (f\ (x_1, x_1 - y))dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2 + y, x_2).dx_2 \qquad (5))$$

Если случайные величины X_1 *и* X_2 независимы, то плотность распределения разности X_1 , -X_2 будет равна

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x_1)\, f_2(x_1 - y))dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_2 + y)\, f_2(\, x_2).dx_2 \qquad (6)$$

Этап 3. Определение вероятностных законов распределения минимальной и максимальной из двух случайных величин.

Определение распределений *min* и *max* из двух случайных величин получили практическое использование при решении технических задач [5,6], однако их применение к решению задач перевозки грузов автомобильным транспортом еще недостаточно изучены и находятся в начальной стадии исследования.

Автором впервые было установлено, что при организации перевозок грузов на маятниковом мпршруте транспортной сети между двумя терминалами или грузообразующими пунктами 1 и 2 при известных вероятностных законах формирования грузов (случайные величины X_1,X_2) в этих пунктах, планируемые объемы автомобильных ездок с коэффициентом использования пробега автомобиля равным 1(автомобиль выполняет ездку на маршруте без порожнего пробега) являются случайной величиной, определяемой как $min\ (X_1, X_2)$.

Плотность распределения непрерывной случайной величины

$$Y=min\{X_1,X_2\} \tag{7}$$

определяется формулой [7]

$$g(y)=f_1(y)+f_2(y)-\int_{-\infty}^{y} f(y,x_2))dx_2-\int_{-\infty}^{y} f(x_1,y)dx_1 \tag{8}$$

Если случайные величины X_1 *и* X_2 независимы, то плотность $f(x_1,x_2)=f(x_1)f(x_2)$ и функция распределения $F(x_1,x_2)=F(x_1)F(x_2)$ будут равны

$$g(y)=f_1(y)(1-F_2(y))+f_2(y)(1-F_1(y), \tag{9}$$

$$G(y)=F_1(y)+F_2(y)-F_1(y)F_2(y). \tag{10}$$

Для независимых случайных величин, распределенных по показательному закону с параметрами λ_1 и λ_2 из (10) функция распределения запишется как

$$G(y=1-e^{-\lambda_1 y}+1-e^{-\lambda_2 y}-(1-e^{-\lambda_1 y})(1-e^{-\lambda_2 y})=1-e^{-(\lambda_1 y+\lambda_2 y)} \quad (y>0)$$

Таким образом, минимум двух независимых случайных величин, распределенных по показательному закону с параметрами λ_1 и λ_2, распределены тоже по показательному закону с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

Для системы n независимых случайных величин X_1, $X_2, \ldots X_n$ с плотностями распределения $f_1(x_1), f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$ плотность и функция распределения величины $Y=min\ (X_1, X_2, \ldots X_n)$ запишутся соответственно как

$$g(y)=\sum_{j=1}^{n} f_j(y)\prod_{i=1}^{n}(1-F_i(y))/(1-F_j(y)),$$

$$G(y)=1-\prod_{i=1}^{n} (1-F_i\ (y))$$

$$M[Y]=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}, \qquad \sigma^2\{Y\}=\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)^2}. \qquad (11)$$

Ряд распределений из минимума двух независимых дискретных случайных величин ξ и η равен

$$P\{\min(\xi,\eta)=k\}=p_k\sum_{n=k}^{\infty} q_n+q_k\sum_{n=k+1}^{\infty} p_n, \quad k=0,1,2,\ldots \qquad (12)$$

Если случайные величины ξ и η, распределены по закону Пуассона с параметрами a и b

$$P(\xi=k)=\frac{e^{-a}a^k}{k!}; \quad P(\eta=j)=\frac{e^{-b}b^j}{j!}.,\qquad (13)$$

то математическое ожидание $\zeta=min(\xi,\eta)$

$$M\varsigma=\sum_{n=0}^{\infty}P\{\zeta>n\}=e^{-a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{b^j}{j!}, \quad n\ge 0, \quad k>0, \quad j>0. \qquad (14)$$

Рассмотрим распределение максимальной из двух случайных величин.

При организации перевозок грузов на маятниковом маршруте транспортной сети между двумя терминалами или грузообразующими пунктами 1 и 2 при известных вероятностных законах формирования грузов (случайные величины X_1 ,X_2) в этих пунктах, и необходимости выполнения перевозок без простоя грузов, вероятностное распределение определяется как *max* (X_1, X_2).

Пусть задана непрерывная случайная система случайных величин (X_1,X_2) с плотностью $f(x_1,x_2)$. и требуется найти закон распределения случайной величины

$$Y=max\{X_1 ,X_2). \tag{15}$$

Плотность распределения максимальной случайной величины определяется формулой

$$g(y)=\int_{-\infty}^{y} f(x_1,y))dx_1+\int_{-\infty}^{y} f(y,x_2).dx_2 \tag{16}$$

Если случайные величины X_1 и X_2 независимы, то плотность и функция максимальной из двух случайных величин будут равны

$$g(y)=f_1(y)F_2(y)+f_2(y)F_1(y), \tag{17}$$

$$G(y)=F_1(y)F_2(y) \tag{18}$$

Используя вместо *max* и *min* символы $\vee$ и $\wedge$ для случайных величин объемов перевозимых грузов Q_1 и Q_2, распределенных по нормальным законам с параметрами a_1 , σ_1, a_2 , σ_2 математические ожидания будут равны [11]

$$M[Q1.\vee Q2]=\frac{1}{2}\{M[Q1]+M[Q2]\}+M[|Q1-Q2]\} \tag{19}$$

$$M[Q1.\wedge Q2]=\frac{1}{2}\{M[Q1]+M[Q2]\}-M[|Q1-Q2]\} \tag{20}$$

Из уравнений (19,20) математическое ожидание модуля разности случайных величин будет равно

$$M[|Q_1 - Q_2] = \{M[Q_1] + M[Q_2]\} - 2M[Q_1 \wedge Q_2] = \\ 2M[Q_1 \vee Q_2] - M[Q_1] - M[Q_2] \qquad (21)$$

Если случайные величины объемов грузов независимы и распределены по нормальным законам, то

$$M[|Q_1 - Q_2|] = a\{1 - 2\Phi(-\frac{a}{o})\} + \frac{2o}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2o^2}}, \qquad (22)$$

где $a = a_1 - a_2;$ $\sigma = \sqrt{o_1^2 + o_2^2};$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Этап 4. Получение псевдослучайных чисел с заданным законом распределения. Известны четыре принципа получения случайных чисел [7-9] :

1. Использование таблиц случайных чисел.
2. Применение специального метода Неймана.
3. Использование функциональных соотношений.
4. Использование специального программного обеспечения, составленного на персональном компъютере и оформленного в виде библиотек по генерированию случайных чисел по различным законам распределения [10].

Этап 5. Разработка алгоритма решения задачи, составления программы и проведение расчетов.

На этом этапе разрабатывается подробная блок-схема для составления программы решения конкретной задачи. Выше описанные аналитические зависимости выполнения операций (суммирования, вычитания, *min,max*)над случайными величинами с известными законами распределения с целью определения необходимых законов распределения могут быть использованы при решении различных технико-экономических задач, что не требует проведения трудоемких работ по сбору статистических данных и их математической обработке. Кроме того, в расчет могут быть введены и экономические показатели. Например, при организации перевозок грузов на маршруте целесообразно использовать математические модели, включающие стоимости от простоя грузов и подвижного состава, что позволяет планировать оптимальные объемы перевозок.

Выводы. Представлен методологический подход к моделированию сложных систем (экономических, технических, транспортных) методом статистических испытаний (метод Монте-Карло).

Предложены модели определения распределений случайных величин с использованием суммы, разности, *min* и *max* из двух случайных величин. Показана целесообразность такого подхода при исследовании перевозки грузов автомобилями на маршрутах транспортной сети.

Дальнейшее развитие метода статистических испытаний планируется использовать при исследовании возможности применения в разработке интеллектуальных технологий[12].

Список использованной литературы

1. Бакаев А.А., Костина Н.И., Яровицкий Н.В. Имитационные модели в экономике.-К.: “Наукова думка”,1978.-190с.

2. Бакаєв А.А., Гриценко В.И., Бажан Л.И. и др. Экономико-математическое моделирование развития транспортных систем. –К.: Наукова думка, 2003.-184с.
3. Бакаєв О.О., Гриценко В.І., . Бажан Л.І., Бакаєв Л.О., Мікроекономічне моделювання і інформаційні технології.-К.: Наукова думка, 2003.-184с
4. Бакаєв О.О., Бажан Л.І., .Кайдан Л.І.,.Кравченко Т.Г., Кулик В.В., Сакунова І.С. Методи. моделі і інформаційні технології в управлінні економічними системами різних рівнів ієрархії. – К.: Лотос, 2008.-127с.
5. Бакаєв О.О., Кутах О.П., Пономаренко Л.А. Теоретичні засади логістики. – У 2-х томах. ІІ- том.-К.: Фенікс, 2005.-528с.
6. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: "Высшая школа", 1973.-368с.
7 Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятности и ее инженерные приложения. –М.: Высшая школа, 2000. –480с.
8. Безбородова Г.Б., Галушко В.Г. Моделирование движения автомобиля. — К.: Вища школа, 1978. — 168 с.
9. Галушко В.Г. Статистические распределения в приложениях. –К.:"Зовнішня торгівля", 2011.-104с.
10. Халафян А.А. STATISTICA 6. Статистический анализ данных. — М.: 000 «Бином Пресс», 2008. — 512 с.
1. Галушко В.Г. Моделювання перевезень на маятниковому маршруті при випадковому формуванні вантажів по нормальному закону. –К.: "Автошляховик України", 2006, N4, С.22-23.
12. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. Пер. с англ. -М.: Мир, 1976.-167с.