УДК 519.21:621.86 **В.І. Лісовський, Л.А.Пономаренко**

# Економіко-математична модель логістичного ланцюга поставок

*Запропонована економіко-математична модель логістичного ланцюга поставок у системі матеріально-технічного забезпечення у вигляді мережі масового обслуговування*

***Ключові слова:*** *економіко-математична модель, логістичний ланцюг поставок, теорія масового обслуговування.*

*Queueing networks based economical and mathematical model of logistical supply chain is proposed*

***Keywords**: economical and mathematical model, logistical supply chain, theory of queues.*

**Вступ.** Управління ланцюгами поставок є новим напрямком логістики. Розробка планів зміни ланцюгів поставок і більш ефективного управління ними з метою поліпшення головних показників роботи служб постачання вимагає створення оптимізаційних моделей, котрі розкривають складні взаємозв'язки між окремими ланками таких ланцюгів. Теорія мереж масового обслуговування є одним із найефективніших аналітичних інструментів дослідження ланцюгів поставок. У статті викладені деякі підходи до розв'язання проблем економіко-математичного моделювання таких ланцюгів.

**Аналіз останніх досліджень.** Питанням моделювання ланцюгів поставок присвячено досить багато наукових праць, зокрема, [1, 2]. Багато є й праць, присвячених дослідженню мереж систем масового обслуговування, зокрема [3-6, 8], Але в цих роботах не врахована чинна структура систем матеріально-технічного забезпечення (МТЗ), а застосований математичний апарат не завжди пристосований до розв’язання актуальних проблем управління ланцюгами поставок.

**Метою** даної статті є розробка економіко-математичних моделей на базі адекватного реальним процесам математичного апарату, які допомогли би приймати обґрунтовані рішення щодо оптимізації ієрархічної системи, що складається із логістичних ланцюгів поставок

**Постановка завдання**. Необхідно при заданій мережі ланцюга поставок за допомогою методів теорії масового обслуговування побудувати систему економіко-математичних моделей, які давали б змогу визначати головні характеристики такої мережі та розв’язувати певні завдання оптимізації.

**Основний матеріал.** Мережа ланцюгів поставок у графічному зображенні має структуру, схожу на переплетені лінійні ланцюги, кожний з яких у загальному випадку містить такі ланки: постачальник, виробник, розподільчий центр, споживач. Така схема є характерною для багатьох виробів військової техніки, збирання якої (виробництво) відбувається на території України із компонентів різних постачальників. Для прикладу розглянемо зображену на рис. 1 структуру, подану в [1, с. 26] як ілюстрація поняття мережі ланцюга поставок.

Позначимо множину постачальників як П = {Пi}, i = 1,…,4; множину виробників В = {Вi}, i = 5,…,7; множину розподільчих центрів {Рi}, i = 8,…,10; множину споживачів {Сi}, i = 11,…,15. Легко бачити, повна мережа ланцюга поставок у нашому випадку місить в собі 30 таких лінійних одновимірних ланцюгів: П1В5Р8С11, П1В5Р8С12, П1В5Р9С12, П1В5Р9С13, П1В5Р9С14,

П2В5Р8С11, П2В5Р8С12, П2В5Р9С12, П2В5Р9С13, П2В5Р9С14, П3В5Р8С11, П3В5Р8С12, П3В5Р9С12, П3В5Р9С13, П3В5Р9С14, П3В6Р9С12, П3В6Р9С13, П3В6Р9С14, П3В6Р10С13, П3В6Р10С14, П3В6Р10С15, П3В7Р9С12, П3В7Р9С13, П3В7Р9С14, П3В7Р10С13, П3В7Р10С14, П3В7Р10С15, П4В7Р10С13, П4В7Р10С14, П4В7Р10С15.

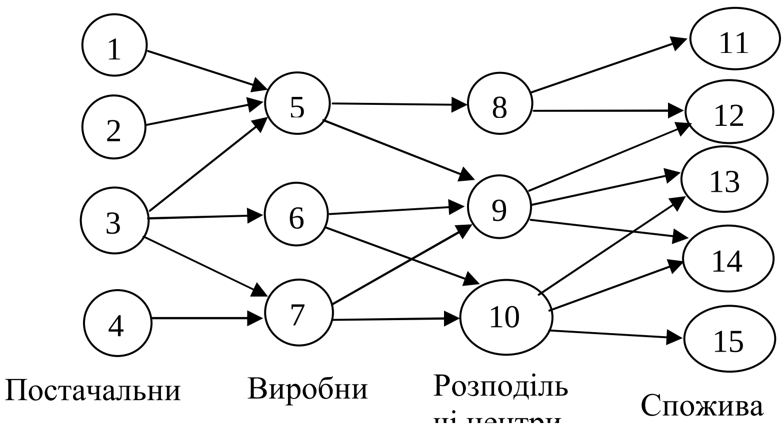


Рис.1. Схема мережі ланцюга поставок

Кожна ланка ланцюга поставок обробляє певний матеріальний потік. Сировина (комплектуючі вироби) переміщується від постачальників до виробників, звідки, перетворившись на готові вироби, потрапляє до розподільчих центрів (оптових і роздрібних складів) і далі до споживачів. Крім того, продукція іноді може переміщуватися «проти течії», коли проміжні продукти повертаються на заводи для переробки або коли продукти багаторазового використання повертаються від споживачів до розподільчих центрів для утилізації. Обсяги і часові графіки надходження сировини, матеріалів і готових виробів до вузлів ланцюга розраховуються, як правило, завчасно, але на ці потоки впливає низка випадкових зовнішніх чинників, що призводить до суттєвих флуктуацій параметрів потоку, який стає за своєю сутністю *випадковим*. Випадковим є й час обробки елементів вхідного матеріального потоку безпосередньо у кожній ланці ланцюга поставок. Це дає нам підстави вважати окремі елементи таких потоків *вимогами*, а самі ланки ланцюга поставок – *системами масового обслуговування*.

Теорія масового обслуговування є одним із важливих розділів економіко-математичного моделювання. Вона служить теоретичною основою комплексу питань ефективного конструювання та експлуатації систем масового обслуговування (СМО). Системи масового обслуговування зустрічаються у багатьох областях економіки (виробництво, техніка, торгівля, побут та ін.) і військової справи й призначені для багаторазового використання при виконанні однотипних завдань [2].

Робота будь-якої СМО полягає у виконанні потоку вимог, що надходить до неї одна за одною у деякі випадкові моменти часу. Обслуговування вимоги продовжується певний час, після чого канал звільняється і знову готовий до приймання наступної вимоги. Кожна СМО залежно від кількості каналів та їх продуктивності має якусь певну пропускну спроможність, що дає їй змогу більш-менш успішно справлятися із потоком вимог. Предмет теорії масового обслуговування – встановлення залежності між характером потоку вимог, продуктивністю окремих каналів, кількістю каналів і успішністю (ефективністю) обслуговування. Як характеристики ефективності обслуговування – залежно від умов задачі та цілей дослідження – можуть застосовуватися різні величини і функції, наприклад: середній відсоток вимог, яким відмовлено в обслуговуванні, після чого вони залишають систему; середній час «простою» окремих каналів і системи в цілому; середній час очікування в черзі; ймовірність того, що вимога, яка надійшла, негайно буде прийнята на обслуговування; середня довжина черги тощо. Кожна з цих характеристик описує з того чи іншого боку ступінь пристосованості системи до виконання обслуговування потоку вимог, іншими словами – її пропускну спроможність.

Мережа масового обслуговування (МеМО) містить кілька взаємодіючих вузлів (станцій) обслуговування. Такі мережі є дуже зручним і прийнятним механізмом для опису роботи складних систем із великою кількістю різнотипних ресурсів [3,4,5,6]. При цьому вузли МеМО є ресурсами реальної системи, і вимоги у мережі переходять від одного вузла до іншого вузла (зокрема, вимога може повернутися до того ж вузла, який вона щойно покинула). Легко переконатися, що мережі масового обслуговування можуть розглядатися як адекватні математичні моделі ланцюгів поставок.

Мережа називається відкритою, якщо вимоги можуть надходити до будь-якого вузла ззовні та також покидати її у будь-якому вузлі. Мережа називається замкненою, якщо кількість вимог, які в ній циркулюють, є постійною, тобто вимоги не надходять ззовні і не покидають мережі. Мережа, зображена на рис. 1, належить до типу відкритих МеМО, але вимоги надходять до мережі лише через будь-який вузол із множини {П}, а покидають мережу лише через вузли із множини {С}.

Для подальшого викладення запровадимо деякі визначення та позначення: $N$ – кількість вузлів; K – постійна кількість вимог у замкненій мережі; $k_i$ – кількість вимог в $i$-му вузлі, для замкненої мережі $\sum_{i=1}^{N} k_i = K$; ($k_1$, $k_2$,…, $k_N$) – вектор, що описує стан мережі; $m_i$ – кількість паралельних каналів обслуговування в $i$-му вузлі; $\mu_i$ – інтенсивність обслуговування вимог в $i$-му вузлі; $1/\mu_i$ – середній час обслуговування вимог в $i$-му вузлі; $p_{ij}$ – імовірності маршрутизації, тобто імовірності того, що вимога після завершення обслуговування у вузлі $i$ буде переходити до вузла $j$ (для відкритих мереж значення $j = 0$ в індексі означає, що вимога виходить у зовнішнє стосовно мережі середовище); $p_{0j}$ – імовірність того, що вимога зовні потрапляє до мережі через вузол $j$; $p_{i0}$ – імовірність того, що після завершення обслуговування у вузлі $i$ вимога покидає мережу ($p_{i0} = 1 - \sum_{i=1}^{N} p_{ij}$); $\lambda_{0i}$ – інтенсивність надходження вимог зовні до вузла $i$; $\lambda$ - сумарна інтенсивність надходження вимог зовні до мережі ($\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{0i}$); $\lambda_i$ – сумарна інтенсивність надходження вимог до вузла $i$.

Величини $p_{ij}$, які для марковських мереж співпадають із ймовірностями переходів відповідного однорідного марковського ланцюга із дискретним часом за один крок, звичайно завдають у вигляді деякої стохастичної матриці, розмірність якої дорівнює кількості вузлів мережі. Для умовного випадку, показаного на рис. 1, матриця імовірностей переходів може виглядати, напри

клад, так, як наведено в табл. 1.

Зауважимо, що в усталеному режимі інтенсивність виходу із будь-якого вузла дорівнює інтенсивності надходження до цього вузла. Тоді для вузла і відкритої мережі отримаємо таку систему рівнянь:

Таблиця 1

Матриця ймовірностей переходів

| **j** / **i** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0,2 | 0,2 | 0,5 | 0,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **7** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,6 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **8** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0,6 | 0 | 0 | 0 |
| **9** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0 |
| **10** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0,3 | 0,5 |
| **11** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **12** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **13** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **14** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_{ij}, i = 1,2,..., N. \qquad (1)$$

Ці рівняння називаються рівняннями трафіку (потоку). Для замкнених мереж відсутній потік вимог зовні, тому для них рівняння трафіку мають такий вигляд:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_{ij}, i = 1,2,..., N. \qquad (2)$$

Іншим важливим параметром мережі є середня кількість звернень вимог до вузла $i$, яка позначається $e_i$ і називається також коефіцієнтом відвідувань або відносною інтенсивністю надходжень:

$$e_i = \lambda_i/\lambda, \ i = 1, 2,\dots, N. \qquad (3)$$

Ці параметри можуть обчислюватися за допомогою (1) або (2). Для відкритих мереж із урахуванням рівності $\lambda_{0i} = \lambda p_{0i}$ із (1) отримаємо:

$$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{N} e_j p_{ji}, \ i = 1,\dots, N, \qquad (4)$$

а для замкнених мереж маємо:

$$e_i = \sum_{j=1}^{N} e_j p_{ji}, \ i = 1,\dots, N. \qquad (5)$$

Оскільки у випадку замкнених мереж маємо $N$-1 рівнянь у системі (5), то $e_i$ можуть визначатися із точністю до постійного множника (звичайно припускають, що $\sum_{i=1}^{N} e_i = 1$). Використовуючи $e_i$ можна обчислити відносну утилізацію каналів $i$-го вузла – $x_i$, яка визначається так:

$$x_i = e_i/\mu_i, \ i = 1,\dots, N. \qquad (6)$$

Можна показати, що $x_i/x_j = \rho_i/\rho_j$, де $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ – коефіцієнт завантаження вузла $i$.

**Мережі з однотипними вимогами**. При дослідженні мереж центральною проблемою є обчислення стаціонарних імовірностей станів $\pi(k_1,\ldots,k_N)$, бо середні значення всіх інших головних характеристик мережі можуть визначатися через ці ймовірності. Разом із тим, існують інші підходи до обчислення цих характеристик, які не використовують згадані ймовірності.

Головними характеристиками мереж із однотипними вимогами є такі.

*Маргінальні ймовірності* - $\pi_i(k)$. Для замкнених мереж маргінальна імовірність $\pi_i(k)$ означає імовірність того, що вузол $i$ містить рівно $k_i = k$ вимог, тобто

$$\pi_i(k) = \sum_{\sum_{j=1}^{N} k_j = K \cap k_i = k} \pi(k_1,...,k_N). \tag{7}$$

Іншими словами, $\pi_i(k)$ є сумою імовірностей всіх можливих станів $(k_1,\ldots,k_N)$, $0 \le k_i \le K$, $\sum_{i=1}^{N} k_i = K$, у яких у вузлі $i$ перебуває рівно $k$ вимог. Умова нормування записується так:

$$\sum_{\sum_{j=1}^{N} k_j = K} \pi(k_1,...,k_N) = 1. \tag{8}$$

Відповідно, для відкритих мереж маємо:

$$\pi_i(k) = \sum_{k_i = k} \pi(k_1,...,k_N) \tag{9}$$

з умовою нормування

$$\sum \pi(k_1,...,k_N) = 1. \tag{10}$$

*Завантаженість* - $\rho_i$. Завантаженість одно канального вузла $i$ визначається так:

$$\rho_i = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(k). \tag{11}$$

Легко бачити, що $\rho_i$ є імовірністю того, що вузол $i$ зайнятий, тобто

$\rho_i = 1 - \pi_i(0)$. (12)

Для багатоканальних вузлів маємо:

$$\rho_i = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\min(m_i, k)\pi_i(k) = 1 - \sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{m_i - k}{m_i}\pi_i(k), \qquad (13)$$

і якщо інтенсивність обслуговування не залежить від завантаження, то

$\rho_i = \lambda_i / m_i\mu_i$. (14)

*Пропускна спроможність* - $\lambda_i$. Ця величина є інтенсивністю виходу вимог із вузла $i$, тобто

$$\lambda_i = \sum_{i=1}^{\infty}\pi_i(k)\mu_i(k), \qquad (15)$$

де інтенсивність обслуговування $\mu_i(k)$ у загальному випадку залежить від навантаження (тобто від кількості вимог у вузлі). Наприклад, багатоканальний вузол $i$ ($m_i > 1$) може розглядатися як одноканальний обслуговуючий центр із інтенсивністю обслуговування $\mu_i(k) = \min(k, m_i)\mu_i$, яка залежить від навантаження. Нагадаємо, що $\mu_i$ – це інтенсивність обслуговування індивідуального каналу. Для випадку, коли інтенсивність не залежить від навантаження, маємо

$\lambda_i = m_i\rho_i\mu_i$. (16)

Зауважимо, що в усталеному режимі інтенсивність надходження і пропускна спроможність однакові. Крім того, важливо знать, що оскільки у вузлах із накопичувачами вимог (місцями для чекання) скінченої величини можливі втрати вимог, то в них пропускна спроможність у загальному випадку менша, ніж інтенсивність обслуговування.

*Сумарна пропускна спроможність* - $\lambda$. Ця величина для відкритих мереж є інтенсивністю виходу вимог із мережі. В усталеному режимі інтенсивність виходу вимог із мережі дорівнює інтенсивності надходження вимог у мережу, тобто

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{0i}. \qquad (17)$$

Для замкнених мереж ця величина визначається так:

$$\lambda = \lambda_i / e_i. \qquad (18)$$

*Середня кількість вимог у і-му вузлі* - $\overline{K}_i$. Ця величина визначається так:

$$\overline{K}_i = \sum_{i=1}^{\infty} k\pi_i(k). \qquad (19)$$

*Середня довжина черги в і-му вузлі* - $\overline{Q}_i$. Ця величина визначається за такою формулою:

$$\overline{Q}_i = \sum_{k=m_i}^{\infty} (k - m_i)\pi_i(k). \qquad (20)$$

*Середній час реакції в і-му вузлі* - $\overline{T}_i$. Ця величина визначається за допомогою теореми Літтла [7] з використанням виразу (19) таким чином:

$$\overline{T}_i = \overline{K}_i / \lambda_i. \qquad (21)$$

*Середній час очікування в черзі в і-му вузлі* - $\overline{W}$. Використовуючи вираз (20) і теорему Літтла, маємо таку залежність для визначення цієї величини:

$$\overline{W}_i = \overline{Q}_i / \lambda_i. \qquad (22)$$

**Мережі з різнотипними вимогами.** У мережах ланцюга поставок вимоги, як правило, відрізняються одна від іншої за різними показниками, наприклад, за часом обслуговування, за маршрутом проходження у мережі тощо. У таких випадках доводиться мати справу із моделями МеМО з різнотипними вимогами. У таких мережах можливі ситуації, коли тип вимоги також змінюється при переході від одного вузла до іншого. Якщо вимоги певного типу не надходять зовні й не змінюють свій тип, то такий тип (клас) вимог називають замкненим. Природно, що клас, який не є замкненим, називатимемо відкритим. Якщо мережа містить вимоги обох типів, то вона називається змішаною.

Для опису МеМО із різнотипними вимогами вводяться додаткові позначення:

$R$ – кількість різних класів вимог у мережі;

$k_{ir}$ – кількість вимог класу $r$ в $i$-му вузлі.

Для замкнених мереж справедливою є рівність

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{R} k_{ir} = K. \tag{23}$$

$K_r$ – кількість вимог типу $r$ у мережі; це число не обов'язково є постійним навіть для замкнених мереж

$$\sum_{i=1}^{N} k_{ir} = K_r. \tag{24}$$

$\boldsymbol{K} = (K_1,\ldots,K_R)$ – вектор популяції вимог у мережі;

$\boldsymbol{S_i} = (k_{i1},\ldots, k_{ir})$ – вектор стану $i$-го вузла для мережі з різнотипними вимогами;

Для останніх двох величин існує така залежність:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{S_i} = \boldsymbol{K}. \tag{25}$$

$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{S_1},\ldots, \boldsymbol{S_N})$ – стан мережі;

$\mu_{ir}$ – інтенсивність обслуговування вимог типу $r$ в $i$-му вузлі;

$p_{ir,js}$ – ймовірність того, що вимога типу $r$ із вузла $i$ переходить до вузла $j$ і стає вимогою типу $s$;

$p_{0,js}$ – ймовірність того, що у відкритій мережі нова вимога надходить зовні до вузла $j$ як вимога типу $s$;

$p_{ir,\ 0}$ – ймовірність того, що у відкритій мережі вимога типу $r$ залишає мережу після завершення її обслуговування в $i$-му вузлі, тобто

$$p_{ir,\,0} = 1 - \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{R} p_{ir,\,js}; \tag{26}$$

$\lambda$ - сумарна інтенсивність надходження вимог іззовні у відкриту мережу;

$\lambda_{0,ir}$ – інтенсивність надходження вимог типу $r$ зовні до вузла $i$,

$\lambda_{0,ir} = \lambda p_{0,ir}$;

$\lambda_{ir}$ – інтенсивність надходження вимог типу $r$ до вузла $i$,

$$\lambda_{ir} = \lambda p_{0,ir} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{R} \lambda_{js}\, p_{ir,\,js}. \tag{27}$$

Для замкнених мереж $p_{0,js} = 0$, $1<i<N$, $1<r<R$, тому

$$\lambda_{ir} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{R} \lambda_{js}\, p_{ir,\,js}. \tag{28}$$

Середня кількість відвідувань $r$-вимогами $i$-го вузла для відкритих мереж визначається аналогічно виразу (4), тобто

$$e_{ir} = p_{0,ir} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{R} e_{js}\, p_{js,ir},\ i = 1,\ldots, N;\ r = 1,\ldots, R. \tag{29}$$

Для замкнених мереж відповідне рівняння має вигляд:

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{R} e_{js}\, p_{js,ir},\ i = 1,\ldots, N;\ r = 1,\ldots, R. \tag{30}$$

При цьому звичайно припускають, що $e_{ir} = 1$ для $r = 1,\ldots, R$.

Головні характеристики для мереж із різнотипними вимогами отримують як узагальнення відповідних характеристик мереж із однотипними вимогами. У цьому випадку стаціонарними ймовірностями станів є величини $\pi(\boldsymbol{S}_1,\ldots, \boldsymbol{S}_N)$, а сума ймовірностей всіх можливих станів дорівнює одиниці (умова нормування).

*Маргінальна ймовірність* - $\pi_i(k)$. Для замкнених мереж маргінальна ймовірність, тобто ймовірність того, що $i$-й вузол перебуває у стані $S_i = k$, визначається так:

$$\pi_i(k) = \sum_{\sum_{j=1}^{N} S_j = K, S_i = k} \pi(S_1, \ldots, S_N). \qquad (31)$$

Для відкритих мереж

$$\pi_i(k) = \sum_{S_i = k} \pi(S_1, \ldots, S_N). \qquad (32)$$

*Завантаження* - $\rho_{ir}$. Завантаження $i$-го вузла вимогами $r$-го типу визначається так:

$$\rho_{ir} = \frac{1}{m_i} \sum_{k:k>0} \pi_i(k) \frac{k_{ir}}{k_i} \min(m_i, k_i), k_i = \sum_{r=1}^{R} k_{ir}. \qquad (33)$$

Якщо інтенсивність обслуговування не залежить від навантаження, то

$$\rho_{ir} = \lambda_{ir} / m_i \mu_{ir}. \qquad (34)$$

*Пропускна спроможність* - $\lambda_{ir}$. Вона фактично співпадає з інтенсивністю виходу вимог типу $r$ після обслуговування із $i$-го вузла, тобто

$$\lambda_{ir} = \sum_{k:k_i>0} \pi_i(k) \frac{k_{ir}}{k_i} \mu_i(k_i). \qquad (35)$$

Якщо інтенсивність обслуговування не залежить від навантаження, то

$$\lambda_{ir} = m_i \rho_{ir} \mu_{ir}. \qquad (36)$$

*Сумарна пропускна спроможність* - $\lambda_r$. Ця величина для вимог типу $r$ визначається так:

для відкритих мереж

$$\lambda_r = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{0,ir}, \qquad (37)$$

для замкнених мереж

$$\lambda_r = \lambda_{ir} / e_{ir}. \qquad (38)$$

*Середня кількість r-вимог в i-му вузлі,* $\overline{K}_{ir}$. Ця величина визначається так:

$$\overline{K}_{ir} = \sum_{k:k_r>0} k_r \pi_i(k). \tag{39}$$

Згідно з теоремою Літтла

$$\overline{K}_{ir} = \lambda_{ir} \overline{T}_{ir}, \tag{40}$$

де $\overline{T}_{ir}$ - середній час реакції на *r*-вимогу в *i*-му вузлі.

*Середня довжина черги r-вимог в i-му вузлі* - $\overline{Q}_{ir}$ також визначається за теоремою Літтла

$$\overline{Q}_{ir} = \lambda_{ir} \overline{W}_{ir}, \tag{41}$$

де $\overline{W}_{ir}$ – середній час очікування в черзі *r*-вимог в *i*-му вузлі,

$$\overline{W}_{ir} = \overline{T}_{ir} - 1/\mu_{ir}. \tag{42}$$

**Задачі оптимізації**. Проектувальники сучасних логістичних ланцюгів (мереж) поставок часто зіштовхуються з проблемою вибору найбільш прийнятних проектів таких мереж із множини альтернативних варіантів. При цьому потрібний проект має відповідати певним умовам (специфікаціям) за різними характеристиками, наприклад, вартістю, надійністю тощо. Проблеми такого типу, які виникають повсюдно, успішно розв'язуються за допомогою методів оптимізації МеМО. розглянемо деякі підходи до розв'язання подібних оптимізаційних задач.

При формулюванні таких задач дуже важливим є визначення керованих параметрів, тобто параметрів, які є залежними змінними. За рахунок вибору їх певних (бажано, оптимальних) значень можна досягти поставленої мети.

Найчастіше зустрічаються такі задачі оптимізації.

1. Мінімізація вартості логістичної системи при заданій пропускній спроможності.

2. Максимізація пропускної спроможності при обмеженні на вартість логістичної системи.

3. Мінімізація часу реакції при обмеженні на вартість логістичної системи.

Найпростішими функціями вартості є лінійні функції. Якщо інтенсивність обслуговування $\mu_i$ $i$-го вузла (ресурсу, каналу) є керованим параметром, то лінійна функція вартості задається так:

$$C(\mu) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu_i, \tag{43}$$

де $c_i$ – вартісний множник, що відповідає інтенсивності обслуговування $\mu_i$, яку забезпечує $i$-й вузол; $N$ – кількість вузлів; $\mu = (\mu_1, ..., \mu_N)$.

Більш реалістичними є нелінійні функції вартості:

$$C(\mu) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu_i^{\alpha_i}, \alpha_i > 1. \tag{44}$$

Інтенсивність обслуговування $\mu_i$ залежить від швидкості ($v_i$) даного вузла та від середньої кількості робіт за одне надходження ($d_i$), тобто $\mu_i = v_i / d_i$. Наприклад, для розподільчого центру (РЦ) $v_i$ завдається кількістю вантажних одиниць за одиницю часу, а $d_i$ визначається середньою кількістю вантажних одиниць у одній партії; для пункту споживання $d_i$ є середньою кількістю товарних одиниць в операціях замовлення-споживання, а $v_i$ – це його швидкість, що має розмірність «товарних одиниць за одиницю часу». Таким чином, якщо $d_i$ (середня кількість робіт у вузлі $i$) задана, то оптимальне значення швидкості ($v_i$) даного вузла визначається однозначно за допомогою використання оптимального значення інтенсивності обслуговування ($\mu_i$).

Розглянемо також варіант функції вартості для складів. Для сучасних логістичних складських систем вартість суттєво залежить від кількості фронтів прийому/видачі вантажів $K$ (тобто від кількості вимог, що можуть паралельно обслуговуватися у відповідній системі масового обслуговування). Тоді функція вартості завдається так:

$$C(\mu, K) = C(K) + \sum_{i=1}^{N} c_i \mu_i^{\alpha_i}, \qquad (45)$$

де $C(K)$ є вартістю складу, що задовольняє вимогам виконання $K$ паралельних робіт з прийому/видачі вантажів.

Наступним етапом є вибір моделі. Як уже зазначалося, часто-густо при оптимізації використовуються аналітичні моделі у вигляді мереж масового обслуговування (МеМО), ланцюгів Маркова із дискретним або безперервним часом (відповідно, ЛМДЧ або ЛМБЧ) та ієрархічні моделі.

Найчастіше як моделі окремих вузлів МеМО зустрічаються чотири типи систем масового обслуговування [8].

Тип 1 – СМО із пуассонівським (марковським) законом надходження вимог, експоненціально розподіленим випадковим часом обслуговування, $m$ обслуговуючими пристроями, що працюють паралельно, та дисципліною обслуговування *FCFS* (першим надійшов – першим обслуговується), або у символічному записі за Кендаллом – $M|M|m|FGFS$;

Тип 2 – СМО із пуассонівським законом надходження вимог і довільним законом обслуговування, одним обслуговуючим пристроєм і дисципліною обслуговування із розділенням часу обслуговування на кванти малої величини – *PS* (Processor Sharing), або у символічному записі – $M|G|1|PS$;

Тип 3 – СМО із пуассонівським законом надходження вимог і довільним законом обслуговування, нескінченою кількістю обслуговуючих пристроїв і довільною дисципліною обслуговування, або у символічному записі $M|G|\infty$;

Тип 4 – СМО із пуассонівський законом надходження вимог і довільним законом обслуговування, одним обслуговуючим пристроєм і дисципліною обслуговування *LCFS* (останнім надійшов – першим обслуговується), причому якщо обслуговування вимоги не закінчилося протягом певного інтервалу (кванту) часу, то воно переривається, вимога повертається до черги, де прийнята дисципліна *LCFS*, або у символічному записі – $M|G|1|LCFS\text{-}RR$, де *RR* (Round Robin) – циклічне опитування.

**Висновки.** Описаний в цій статті підхід, заснований на застосуванні методів теорії мереж систем масового обслуговування, дає змогу розв'язувати завдання оптимальної за різними критеріями організації можливих ланцюгів поставок матеріальних ресурсів. Знайдені закономірності при різних схемах постачання матеріальних ресурсів служать підставою для прийняття управлінських рішень стосовно визначення стратегії й тактики постачання.

### Список використаних джерел

1. Шапиро Дж. Моделирование цепи поставок / Пер. с англ. под ред. В.С.Лукинского. – СПб.: Питер, 2006. – 720 с. – (Серия «Теория менедмента»).
2. Бакаєв О.О., Кутах О.П., Пономаренко Л.А. Теоретичні засади логістики: Підручник. – У 2-х томах. – ІІ том. – К.: Фенікс, 2005. – 328 с.
3. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1998 192 с.

4. Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. М.: Наука, 1989. – 336 с.
5. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели: Уч. пособие. – К.: Лыбедь, 1992. – 208 с.
6. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. – М.: Мир, 1965. – 303 с.
7. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания: Изд-е 4-е переработ. – М.: КомКнига, 2005. – 397 с.
8. Bolch G., Greimer S., De Meer H., Trivedi K.S. Queueing networ0ks and Markov chains. – N.Y.: Wiley, 1998. – 464 p.

УДК 330:652:519.2
**Л.І. Бажан**

# Формування підходу до інтелектуалізації моделювання транспортно-логістичної системи

*Викладено основні теоретичні положення системного підходу та системного аналізу транспортно-логістичної системи. Наводиться порядок прийняття ефективних рішень при розгляді руху матеріального потоку. Вперше розглядаються проблеми прийняття рішень в управлінні транспортно-логістичною системою в контексті інтелектуалізації моделювання*

***Ключові слова:*** *транспортно-логістична система, матеріальний потік, прийняття рішень, інтелектуалізації моделювання*

*The basic theoretical principles of system approach and systematic analysis of transportation and logistics system. Given an order to take effective decisions in the movement of material flow. First, issues of decision making in the management of transport and logistics system in the context of intellectualization modeling*