УДК 539.37

Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщение 1. Построение определяющих соотношений

П. П. Лепихин

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Для простых по Ноллу твердых деформируемых материалов постулирована обратимость определяющих соотношений. В традиционной и обратной форме построены варианты представления общих физических уравнений таких тел, в том числе и с упругопластическим поведением. Для конечных и бесконечно малых деформаций последних детально моделируется пропорциональное активное нагружение, в первую очередь изотропных материалов.

Ключевые слова: простой упругопластический материал, пропорциональное нагружение, конечные и бесконечно малые деформации, определяющие соотношения.

В работе Нолла [1] предложена общая теория определяющих соотношений. Она основана на принципах детерминизма, локального действия и материальной независимости от системы отсчета. Эти принципы представляют собой те непреложные ограничения, которым должны удовлетворять физические уравнения, чтобы они могли служить математическим описанием наблюдаемого в природе поведения материалов [2]. Частным случаем общей теории определяющих соотношений Нолла является теория простых материалов [1–3], которая охватывает практически все известные чисто механические модели сплошной среды. В настоящее время общая теория определяющих соотношений [1] и теория простых материалов получили существенное развитие [2–12 и др.]. В традиционной форме определяющие соотношения [1–12] позволяют, по крайней мере в принципе, при задании истории деформирования определить напряжения.

В целом ряде практически важных задач, зная историю нагружения, необходимо найти деформацию. Определяющие соотношения [1–12] не удобны для решения такой проблемы. В работе [13] последняя решается с использованием предположения о существовании физического уравнения, обратного определяющему соотношению простого материала [1]. При этом посредством специализации полученной зависимости построена модель упруговязкопластического материала. Анализ возможности подобного обращения подчиняющихся принципу детерминизма в форме [1] определяющих соотношений был проведен в [2, 6]. Установлено, что это не всегда допустимо. В частности, в эйлеровой гидродинамике обратного соотношения, выражающего деформацию через историю нагружения, не существует.

В этой статье обратимость физических уравнений общей теории определяющих соотношений [1] в отмеченном выше смысле постулируется только для твердых тел. В традиционной и обращенной формах построены варианты представления общих определяющих соотношений простых твердых материалов, в том числе и с упругопластическим поведением. Для конечных и бесконечно малых деформаций упругопластических материалов детально моделируется пропорциональное активное нагружение, в первую очередь изотропных материалов.

Согласно принципу детерминизма [2, 6], напряженное состояние в конфигурации тела-точки X в момент времени t определяется историей χ^t движения (деформирования) тела B вплоть до момента t:

$$\mathbf{T}(\chi(X,t),t) = \Im(\chi^t; X,t). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{T}$ – тензор напряжений Коши; $\Im$ – однозначное отображение историй $\chi^t = \chi^t(s) = \chi(t-s)$, где t – фиксировано; $s = t - t'$, $t \geq t'$, $0 \leq s < \infty$, тел-точек X и времени t на симметричные тензоры; $\chi(X,t)$ – место, занимаемое телом-точкой X в момент t.

Далее ограничимся рассмотрением твердых материалов, для которых соотношение (1) предполагаем обратимым в смысле [2, 6]. При этом движение χ тела в свою очередь определяется историей $\mathbf{T}^t$ определенного на нем поля напряжений. Тогда

$$\chi(X,t) = \Re(\mathbf{T}^t; X,t), \tag{2}$$

где $\Re(.)$ – однозначное отображение историй $\mathbf{T}^t$ тел-точек X и времен t на симметричные тензоры.

Все процессы будем считать начинающимися в некоторый отсчетный момент времени t_0 из ненапряженной и недеформированной отсчетной конфигурации $\kappa_0(X)$. При этом предположим, что и при $t < t_0$ материал находился в $\kappa_0(X)$. Тогда отображение

$$\mathbf{X} = \kappa_0(X) \tag{3}$$

определяет место $\mathbf{X}$, занимаемое телом-точкой X в конфигурации $\kappa_0(B)$. Это отображение, по предположению [2, 6], обратимо:

$$X = \kappa_0^{-1}(\mathbf{X}), \tag{4}$$

причем обе функции κ_0 и κ_0^{-1} – непрерывны. Следовательно, движение (2) можно описать соотношением

$$\mathbf{x} = \chi(X,t) = \chi(\kappa_0^{-1}(\mathbf{X}),t) \equiv \chi_{\kappa_0}(\mathbf{X},t). \tag{5}$$

Зависимостью (5) движение описывается как отображение χ_{κ_0} отсчетной конфигурации $\kappa_0(B)$ на актуальную конфигурацию $\chi(B,t)$.

Градиент функции χ_{κ_0} называется градиентом деформации (градиентом деформации первого порядка):

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_{\kappa_0}(\mathbf{X},t) \equiv \nabla\chi_{\kappa_0}(\mathbf{X},t). \tag{6}$$

В соответствии с принципом материальной независимости от системы отсчета, уравнения состояния инвариантны относительно преобразования наблюдателя [2, 6]. Используя этот принцип для частного случая такого преобразования (временного сдвига), можно показать [12], что определяющий функционал (1) не зависит явно от времени.

Согласно принципу локального действия [2, 6], движение тел-точек, находящихся в некоторой конфигурации на любом фиксированном расстоянии от X, можно не учитывать при подсчете напряжений в X. Приняв в качестве преобразования наблюдателя – жесткий перенос системы координат и применив принципы материальной независимости от системы отсчета и локального действия, в работе [12] показано, что определяющий функционал (1) не зависит от истории самого движения, а определяется историями градиентов деформации первого, второго и т.д. порядков. Далее ограничимся рассмотрением только таких материалов, для которых истории градиента деформации достаточно для определения напряжений. Для таких материалов, принимая во внимание отмеченные результаты [12] и зависимости (5), (6), уравнения (1) и (2) можно соответственно переписать так:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{T}(\chi_{\kappa_0}(\mathbf{X},t),t) = \aleph_{\kappa_0}(\mathbf{F}^t_{\kappa_0}(\mathbf{X}),\mathbf{X}); \tag{7}$$

$$\mathbf{F}_{\kappa_0}(\mathbf{X},t) = \Re_{\kappa_0}(\mathbf{T}^t;\mathbf{X}), \tag{8}$$

где $\mathbf{F}^t_{\kappa_0}(\mathbf{X})$ – история градиента деформации вплоть до момента времени t.

Если считать, что отсчетная конфигурация κ_0 раз и навсегда выбрана, то определяющее уравнение (7) можно представить в сокращенной форме [2, 6]:

$$\mathbf{T}(t) = \Im(\mathbf{F}^t). \tag{9}$$

Тогда соотношение (8) примет вид

$$\mathbf{F}(t) = \aleph(\mathbf{T}^t). \tag{10}$$

Еще одно приложение принципа материальной независимости от системы отсчета для подчиняющихся (9), (10) материалов связано с рассмотрением частного случая преобразования наблюдателя – произвольной непрерывной истории жестких вращений [12]. Оно приводит к построению так называемой приведенной (независящей от системы отсчета) формы определяющего соотношения [2, 6]. Существует бесконечное множество приведенных форм соотношения (9). В частности, одна из них, согласно [1], может быть представлена таким образом:

$$\mathbf{T}^R(t) = \aleph_1(\mathbf{C}^t), \tag{11}$$

где $\mathbf{T}^R = \mathbf{R}^T\mathbf{T}\mathbf{R}$; $\mathbf{R}$ – тензор поворота в полярном разложении градиента деформации [2, 6]; $\mathbf{R}^T$ – транспонированный тензор $\mathbf{R}$; $\mathbf{C}^t$ – история правого тензора Коши–Грина $\mathbf{C}$ вплоть до t.

Уравнение (11), как следует из изложенного выше, получено в предположении справедливости принципов детерминизма, локального действия, материальной независимости от системы отсчета и условия, что истории градиента деформации достаточно для определения напряжения в материале. Подчиняющийся всем этим условиям материал по предположению является простым [1].

Как следует из (2) и (5), задания $\mathbf{T}^t$ достаточно для описания движения $\chi_{\kappa_0}(\mathbf{X},t)$, а не только, как в соотношении (10), линейного приближения последнего, т.е. градиента деформации. Однако в классе простых материалов $\mathbf{F}^t$ полностью определяет тензор напряжений $\mathbf{T}(t)$ и, следовательно, естественно историю нагружения $\mathbf{T}^t$ использовать для задания градиента деформации.

Если, как сделано ранее авторами [13], принять справедливым условие обратимости функционального преобразования (11), то приходим к соотношению, приведенному в [13], т.е.

$$\mathbf{C}(t) = \aleph_2((\mathbf{R}^T)^t\mathbf{T}^t\mathbf{R}^t). \tag{12}$$

Уравнение (12) можно получить непосредственно из (10).

Согласно [2], при произвольном жестком вращении системы отсчета $\mathbf{F}(t), \mathbf{T}(t)$ и $\mathbf{T}^t$ преобразуются соответственно следующим образом:

$$\mathbf{F}^*(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t); \quad \mathbf{T}^*(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(t)\mathbf{Q}(t)^T; \quad (\mathbf{T}^t)^* = \mathbf{Q}^t\mathbf{T}^t(\mathbf{Q}^T)^t, \tag{13}$$

где звездочкой обозначен соответствующий объект, относящийся к повернутой системе отсчета; $\mathbf{Q}^t$ и $\mathbf{Q}(t)$ – история жесткого вращения системы отсчета и значение ортогонального тензора $\mathbf{Q}$ в истории $\mathbf{Q}^t$ в момент времени t соответственно.

Тогда, учитывая данные [2] и применяя принцип независимости от системы отсчета к (10), получим

$$\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t) = \aleph(\mathbf{Q}^t\mathbf{T}^t(\mathbf{Q}^T)^t) \tag{14}$$

для любой истории ортогонального тензора $\mathbf{Q}^t$ и невырожденного тензора $\mathbf{F}^t$. Если же выполняется соотношение (14), то справедлив и принцип материальной независимости от системы отсчета.

Используя теорему о полярном разложении, получаем $\mathbf{F}(t)=\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{F}^t=\mathbf{R}^t\mathbf{U}^t$. Здесь $\mathbf{U}(t)$ и $\mathbf{U}^t$ – правый тензор растяжения в момент времени t и его история.

Теперь можно выбрать историю ортогонального тензора $\mathbf{Q}^t$ таким образом, чтобы $\mathbf{Q}^t(s)=\mathbf{R}^t(s)^T$. Следовательно, $\mathbf{Q}(t)=\mathbf{R}(t)^T$, и соотношение (14) принимает вид

$$\mathbf{U}(t)=\aleph((\mathbf{R}^t)^T\mathbf{T}^t\mathbf{R}^t). \tag{15}$$

Поскольку $\mathbf{C}=\mathbf{U}^2$, то, учитывая (15), получаем

$$\mathbf{C}(t)=\aleph_2((\mathbf{R}^t)^T\mathbf{T}^t\mathbf{R}^t). \tag{16}$$

Уравнение (16) совпадает с (12), что и требовалось показать.

Соотношения (9)–(12) описывают поведение простых твердых материалов, реакция которых зависит как от пути деформирования (нагружения), так и временной истории его прохождения.

Рассмотрим простые материалы с упругопластическим поведением [9–11], которые обладают поверхностью нагружения и реакция которых не зависит от времени. Время t в определяющих соотношениях таких материалов можно заменить параметром τ', который изменяется в пределах $0\ldots1$ ($\tau'=0$ соответствует началу, а $\tau'=\tau=1$ – концу процесса). Тогда соотношения (9)–(12) преобразуются так:

$$\mathbf{T}(\tau)=\Im(\mathbf{F}^\tau); \tag{17}$$

$$\mathbf{F}(\tau)=\aleph(\mathbf{T}^\tau); \tag{18}$$

$$\mathbf{T}^R(\tau)=\aleph_1(\mathbf{C}^\tau); \tag{19}$$

$$\mathbf{C}(\tau)=\aleph_2((\mathbf{R}^T)^\tau\mathbf{T}^\tau\mathbf{R}^\tau). \tag{20}$$

Отметим, что, согласно [9–11], принятая в этой работе ненапряженная и недеформированная отсчетная конфигурация является частным случаем используемой при определении твердого тела неискаженной конфигурации.

Далее будем рассматривать процессы пропорционального нагружения, т.е. процессы, в которых компоненты тензора напряжений Коши увеличиваются таким образом, что отношение их сохраняется постоянным [14]. Для указанных процессов

$$\mathbf{T}(\tau')=\tau'\mathbf{T}(\tau),\ 0\le\tau'\le\tau=1, \tag{21}$$

где τ' – монотонно увеличивающийся параметр, определяющий значение τ в прошлом; $\mathbf{T}(1) = \mathbf{T}(\tau)$ – тензор напряжений Коши в конце процесса нагружения.

Как следует из (21), при пропорциональном нагружении главные оси тензора напряжений не изменяются.

Возьмем в качестве исходного определяющее соотношение (18). Обозначив $\tau' = \tau - \eta$, $0 \leq \eta \leq \tau$ и использовав принятые здесь обозначения [2], уравнение (21) можно переписать в виде

$$\mathbf{T}^{\tau} = (\tau - \eta)\mathbf{T}(\tau). \tag{22}$$

Из (22) следует, что $\mathbf{T}^{\tau}$ в процессах пропорционального нагружения полностью определяется значением тензора напряжений в конце процесса. Этот вывод не противоречит данным работы [14]. Тогда определяющее соотношение (18) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{g}(\mathbf{T}(\tau)), \tag{23}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{T}(\tau))$ – тензорная функция тензорного аргумента.

Для произвольного жесткого вращения системы наблюдателя, используя принцип независимости от системы отсчета, уравнение (23) можно переписать в виде

$$\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{g}(\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{T}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)^{T}). \tag{24}$$

Соотношение (24) справедливо для любых ортогональных тензоров $\mathbf{Q}(\tau)$ и всех симметричных тензоров $\mathbf{T}(\tau)$. В частности, оно должно выполняться, если примем $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{R}(\tau)^{T}$. Тогда, используя последнее предположение и полярное разложение градиента деформации, уравнение (24) можно представить так:

$$\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{g}(\mathbf{R}(\tau)^{T}\mathbf{T}(\tau)\mathbf{R}(\tau)). \tag{25}$$

Учитывая, что $\mathbf{C} = \mathbf{U}^{2}$, из соотношения (25) получаем

$$\mathbf{C}(\tau) = \mathbf{g}_{1}(\mathbf{R}(\tau)^{T}\mathbf{T}(\tau)\mathbf{R}(\tau)). \tag{26}$$

Уравнение (26), как следует из методики его построения, справедливо для любого пропорционального нагружения произвольных допускающих обращение определяющих соотношений простых материалов с упругопластическим поведением как внутри начальной поверхности нагружения (упругий процесс), так и после ее достижения (активный процесс). Поскольку упругое деформирование изучено ранее [15], будем рассматривать только активные процессы.

Для изотропных материалов, согласно данным [2, 6], значение тензора напряжений Коши в конце процесса нагружения не изменится, если заменить $\mathbf{F}^{\tau}$ на $\mathbf{F}^{\tau}\mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ – любой постоянный ортогональный тензор. В частности, можем заменить $\mathbf{F}^{\tau}$ на $\mathbf{F}^{\tau}\mathbf{R}(\tau)^T$, не изменив значения $\mathbf{T}(\tau)$. Применим это преобразование к определяющему соотношению в форме (26). При этом преобразовании $\mathbf{R}(\tau)\mathbf{U}(\tau)$ заменяется на $\mathbf{R}(\tau)\mathbf{U}(\tau)\mathbf{R}(\tau)^T$. Последнее произведение является положительно определенным и симметричным, поэтому в его полярном разложении множитель, отвечающий повороту, равен $\mathbf{1}$, т.е. $\mathbf{R}(\tau)=\mathbf{1}$. При этом $\mathbf{C}(\tau)$ заменяется на $\mathbf{R}(\tau)\mathbf{C}(\tau)\mathbf{R}(\tau)^T=\mathbf{B}(\tau)$. Таким образом, из (26) в качестве приведенной формы определяющего соотношения изотропного материала получаем

$$\mathbf{B}(\tau)=\bar{\mathbf{g}}_1(\mathbf{T}(\tau)), \tag{27}$$

где $\bar{\mathbf{g}}_1(\mathbf{T}(\tau))$ – тензорная функция; $\mathbf{B}(\cdot)$ – левый тензор Коши–Грина.

Далее значение того или иного объекта в конце процесса будем обозначать без параметра в круглых скобках, например, вместо $\mathbf{T}(\tau)$ будем писать $\mathbf{T}$.

Если в изотропном материале $\mathbf{F}^{\tau}$ заменить на $\mathbf{Q}\mathbf{F}^{\tau}\mathbf{Q}^T$, то, согласно [2], при произвольном $\mathbf{Q}$ тензор напряжений $\mathbf{T}$ заменяется на $\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$. При такой замене $\mathbf{B}$ заменяется на $\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T$. Следовательно, функция $\bar{\mathbf{g}}_1(\mathbf{T})$ в (27) должна удовлетворять тождеству

$$\bar{\mathbf{g}}_1(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T)=\mathbf{Q}\bar{\mathbf{g}}_1(\mathbf{T})\mathbf{Q}^T \tag{28}$$

для любого ортогонального $\mathbf{Q}$ и симметричного $\mathbf{T}$ тензоров.

Функция, удовлетворяющая этому требованию, называется изотропной. Если же функция $\bar{\mathbf{g}}_1$ удовлетворяет тождеству (28), то соотношение (27) есть определяющее соотношение изотропного простого материала, отнесенное к используемой при определении изотропного тела неискаженной отсчетной конфигурации [2, 6]. Отметим, что частным случаем последней является принятая в работе для пропорционального нагружения ненапряженная и недеформированная отсчетная конфигурация [2]. Согласно данным [2, 6], если используется отсчетная конфигурация, не являющаяся неискаженной, то уравнение состояния изотропного материала не может иметь вида (27) и в общем случае не выделяется заметной простотой.

Согласно теореме о представлении Ривлина–Эриксена [2], соотношение (27) в общем случае можно записать в виде

$$\mathbf{B}=\varphi_1\mathbf{1}+\varphi_2\mathbf{T}+\varphi_3\mathbf{T}^2, \tag{29}$$

где $\mathbf{1}$ – единичный тензор; φ_i $(i=1,\dots,3)$ зависят от инвариантов

$$T_0 = tr\,\mathbf{T},\; tr\,\mathbf{T}^2,\; tr\,\mathbf{T}^3 \tag{30}$$

($tr\,\mathbf{T}$ – след тензора $\mathbf{T}$).

Поскольку при пропорциональном нагружении главные оси тензора $\mathbf{T}$ не изменяются, из (29) можно сделать вывод, что при таком нагружении в простом упругопластическом изотропном материале главные оси тензора $\mathbf{B}$ также не изменяются, совпадают с главными осями тензора напряжений и $\mathbf{C} = \mathbf{B}$.

Уравнение (29), как следует из методики его получения, позволяет описать все без исключения эффекты, которые имеют место в произвольном допускающем обращение определяющих соотношений простом изотропном упругопластическом материале при пропорциональном активном нагружении.

В рамках теории бесконечно малых деформаций в смысле [16] уравнение (29) принимает вид

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \varphi_1 \mathbf{1} + \varphi_2 \mathbf{T} + \varphi_3 \mathbf{T}^2, \tag{31}$$

где $\widetilde{\mathbf{E}}$ – тензор бесконечно малых деформаций, при этом коэффициенты в уравнении (31) зависят от инвариантов (30).

Соотношение (31), несмотря на выполнение условия бесконечной малости деформаций в смысле [16], с учетом данных [15] сохранено нелинейным в связи с физической нелинейностью поведения рассматриваемых здесь упругопластических материалов при активном нагружении.

Определим из (31) первый инвариант и девиаторную составляющую тензора $\widetilde{\mathbf{E}}$:

$$\widetilde{E}_0 = 3\varphi_1 + \varphi_2 T_0 + \varphi_3 tr\mathbf{T}^2 = \frac{1}{3\widetilde{K}} T_0; \tag{32}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}_D = \overline{\varphi}_2 \mathbf{T}_D + \varphi_3 (\mathbf{T}_D^2 - \frac{1}{3} tr\mathbf{T}_D^2 \mathbf{1}), \tag{33}$$

где $\widetilde{K} = \dfrac{T_0}{3\widetilde{E}_0} = \dfrac{T_0}{3(3\varphi_1 + \varphi_2 T_0 + \varphi_3 tr\mathbf{T}^2)}$ – обобщенный модуль объемного сжатия; $\overline{\varphi}_2 = \varphi_2 + \dfrac{2}{3} T_0 \varphi_3$; $\varphi_1, \varphi_2, \overline{\varphi}_2, \varphi_3$ зависят от инвариантов (30); $\widetilde{E}_0 = tr\widetilde{\mathbf{E}}$; $\widetilde{\mathbf{E}}_D = \widetilde{\mathbf{E}} - \dfrac{1}{3} tr\widetilde{\mathbf{E}}\mathbf{1}$; $\mathbf{T}_D = \mathbf{T} - \dfrac{1}{3} tr\mathbf{T}\mathbf{1}$. Здесь и далее нижний индекс D обозначает, что соответствующий объект относится к девиаторным составляющим.

Представим соотношение (33) в ином виде. Поскольку девиаторы $\widetilde{\mathbf{E}}_D$ и $\mathbf{T}_D$, как следует из (33), соосны, то, использовав уравнение связи, для соосных девиаторов запишем [17]

$$\frac{\widetilde{\mathbf{E}}_D}{\xi_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}} = \frac{1}{\sin 3\alpha_{\mathbf{T}_D}} \left\{ \frac{\sin(2\alpha_{\mathbf{T}_D} + \alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D})}{\xi_{\mathbf{T}_D}} \mathbf{T}_D + \sqrt{3} \sin(\alpha_{\mathbf{T}_D} - \alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}) \left[\frac{\mathbf{T}_D^2}{\xi_{\mathbf{T}_D}^2} - \frac{2}{3}\mathbf{1} \right] \right\}, \quad (34)$$

где

$$\begin{cases} \xi_{\mathbf{T}_D}^2 = tr(\mathbf{T}_D^2)/2 = I_{2_{T_D}}; \\ \cos 3\alpha_{\mathbf{T}_D} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \dfrac{I_{3_{\mathbf{T}_D}}}{(I_{2_{\mathbf{T}_D}})^{3/2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \dfrac{I_{3_{\mathbf{T}_D}}}{\xi_{\mathbf{T}_D}^3}; \\ \xi_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}^{\mathbf{2}} = tr(\widetilde{E}^2)/2 = I_{2_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}}; \\ \cos 3\alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \dfrac{I_{3_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}}}{(I_{2_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}})^{3/2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \dfrac{I_{3_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}}}{\xi_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}^3}; \\ I_{3_{\mathbf{T}_D}} = tr(\mathbf{T}_D)^3/3; \\ I_{3_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}} = tr(\widetilde{\mathbf{E}}_D)^3/3. \end{cases} \quad (35)$$

При этом $\alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}$, $\xi_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}$ в (34), а также $\widetilde{K}$ в (32) зависят от инвариантов (30):

$$\begin{cases} \alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D} = f_1(T_0, tr\mathbf{T}^2, tr\mathbf{T}^3); \\ \xi_{\widetilde{\mathbf{E}}_D} = f_2(T_0, tr\mathbf{T}^2, tr\mathbf{T}^3); \\ \widetilde{K} = f_3(T_0, tr\mathbf{T}^2, tr\mathbf{T}^3). \end{cases} \quad (36)$$

Введя понятия интенсивности напряжений σ_i и деформаций ε_i [18]

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3tr(\mathbf{T}_D^2)}{2}} = \sqrt{3}\,\xi_{\mathbf{T}_D}; \quad (37)$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} tr(\widetilde{\mathbf{E}}_D^2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \xi_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}, \quad (38)$$

соотношение (34) перепишем следующим образом:

$$\frac{\widetilde{\mathbf{E}}_D}{\varepsilon_i} = \frac{3}{2\sin 3\alpha_{\mathbf{T}_D}} \left\{ \frac{\sin(2\alpha_{\mathbf{T}_D} + \alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D})}{\sigma_i} \mathbf{T}_D + \sqrt{3} \sin(\alpha_{\mathbf{T}_D} - \alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}) \left[\frac{3\mathbf{T}_D^2}{\sigma_i^2} - \frac{2}{3}\mathbf{1} \right] \right\}. \quad (39)$$

Приняв во внимание (35)–(38) и разложив тензор напряжений Коши на шаровую и девиаторную составляющие, после преобразований $\alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}$, ε_i и $\widetilde{K}$ в уравнениях (32) и (39) представим так:

$$\begin{cases} \alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D} = \bar{f}_1(T_0 / \sigma_i, \sigma_i, \alpha_{\mathbf{T}_D}); \\ \varepsilon_i = \bar{f}_2(T_0 / \sigma_i, \sigma_i, \alpha_{\mathbf{T}_D}); \\ \widetilde{K} = \bar{f}_3(T_0 / \sigma_i, \sigma_i, \alpha_{\mathbf{T}_D}). \end{cases} \tag{40}$$

Для заданного процесса пропорционального активного нагружения, в котором, как следует из (21), (30), $(35)_{1,2,5}$ и (37), T_0 / σ_i и $\alpha_{\mathbf{T}_D}$ неизменны, уравнения (40) принимают вид

$$\begin{cases} \alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D} = f_1(\sigma_i); \\ \varepsilon_i = f_2(\sigma_i); \\ \widetilde{K} = f_3(\sigma_i). \end{cases} \tag{41}$$

Отметим, что в общем случае для различных процессов T_0 / σ_i и $\alpha_{\mathbf{T}_D}$ – разные.

Из (41) следует, что если задать процесс пропорционального активного нагружения, а следовательно, T_0 / σ_i и $\alpha_{\mathbf{T}_D}$, то ε_i, $\alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}$ и $\widetilde{K}$ полностью определяются значением σ_i.

Соотношения (32) и (39) при задании тензора напряжений и трех функций (41) полностью определяют бесконечно малую деформацию произвольного простого изотропного тела с упругопластическим поведением в процессах пропорционального активного нагружения. Три функции (41) находятся опытным путем.

Для упругой твердой сплошной среды подобное по форме уравнению (39) соотношение получил и проанализировал Новожилов [15, 19].

Когда тензор **T** в процессах пропорционального активного нагружения имеет одну и только одну пару равных главных значений, подобно тому как это сделано в [20] для пропорционального активного деформирования, в рассматриваемом случае можно получить

$$\widetilde{E}_0 = 3\varphi_1 + \varphi_2 T_0 = \frac{1}{3\widetilde{K}} T_0; \tag{42}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}_D = \varphi_2 \mathbf{T}_D, \tag{43}$$

где

$$\varphi_2 = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}.$$

При этом $\alpha_{\mathbf{T}_D} = \alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}$, а $\widetilde{K}$ и ε_i определяются в том или ином процессе пропорционального активного нагружения соответственно по формулам $(41)_3$ и $(41)_2$.

Полученные данные позволяют сделать следующий вывод: если тензор **T** при пропорциональном активном нагружении имеет одну и только одну пару равных главных значений, то для произвольных простых тел с упругопластическим поведением имеет место и простое деформирование, когда $\alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D} = \text{const}$, а главные оси $\widetilde{\mathbf{E}}_D$ неизменны в процессе деформирования [20, 21]. Это прямо следует из того, что в этом случае главные оси $\widetilde{\mathbf{E}}_D$ в силу (43) и неизменности направления главных осей тензора напряжений при пропорциональном нагружении не изменяются в процессе деформирования, $\alpha_{\mathbf{T}_D} = \alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D}$, а при $\alpha_{\mathbf{T}_D} = \text{const}$, что соблюдается при пропорциональном нагружении и $\alpha_{\widetilde{\mathbf{E}}_D} = \text{const}$.

Для получения уравнений (32) и (39) использованы предположения теории бесконечно малых деформаций и условие пропорциональности процесса активного нагружения. Никакие дополнительные ограничения, кроме возможности обращения определяющих соотношений и изотропии свойств, на материал не накладывались. Следовательно, соотношения (32) и (39) позволяют описать все без исключения эффекты в произвольном допускающем обращение определяющих соотношений простом изотропном материале с упругопластическим поведением при пропорциональном активном нагружении и весьма малых значениях деформаций.

Для описания поведения любого наблюдаемого в природе материала теми или иными определяющими соотношениями необходимо их конкретизировать на основе базовых опытов.

Поскольку для полной конкретизации определяющих соотношений (32), (39) следует задать три функции (41), то опыты, позволяющие реализовать пропорциональное нагружение в требуемом диапазоне изменения параметров этих функций и, следовательно, построить вид зависимостей (41), и будут строго обоснованными базовыми опытами для конкретизации уравнений (32), (39).

Р е з ю м е

Для простих за Нолом твердих деформівних матеріалів постульована можливість оборотності визначальних співвідношень. В традиційній та оборотній формі побудовано варіанти подання загальних фізичних рівнянь таких тіл, у тому числі й тіл із пружнопластичною поведінкою. Для скінченних і нескінченно малих деформацій останніх детально вивчено пропорційне активне навантаження, в першу чергу ізотропних матеріалів.

1. *Noll W.* A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1958. – **2**. – P. 197 – 226.

2. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. – Baltimore: Johns Hopkins University, 1972.
3. *Noll W.* A new mathematical theory of simple materials // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1972. – **48**. – P. 1 – 50.
4. *The Foundations* of Mechanics and Thermodynamics / Selected papers by W. Noll. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1974. – 324 p.
5. *Truesdell C., Noll W.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1992. – 600 p.
6. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. – General Concepts. Second Edition. Corrected, Revised, and Augmented. – Boston: Academic Press, Inc., 1991. – Vol. 1. – 391 p.
7. *Murakami S., Sawczuk A.* On description of rate-independent behavior for prestrained solids // Arhives of Mech. – 1979. – **31**, N 2. – P. 251 – 264.
8. Haupt P. On the mathematical modeling of material behavior in continuum mechanics // Acta Mechanica. – 1993. – **100**, N 3–4. – P. 129 – 154.
9. *Lucchesi M., Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part 1 // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1988. – **102**. – P. 23 – 43.
10. *Lucchesi M., Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part 2 // Ibid. – 1990. – **110**. – P. 9 – 42.
11. *Lucchesi M., Owen D. R., Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part 3. Approximate constitutive relations // Ibid. – 1992. – **117**. – P. 53 – 96.
12. *Oden J. T.* Finite Elements of Nonlinear Continua. – New York; San Francisco; Düsseldorf: McGraw–Hill Book Company, 1972.
13. *Ольшак В., Пэжина П.* Общие определяющие уравнения для упруго-вязкопластических материалов // Механика. Сб. перев. иностр. статей. – 1967. – № 4 (104). – С. 119 – 123.
14. *Budiansky B.* A reassessment of deformation theories of plasticity // J. Appl. Mech. – 1959. – **26**, N 2. – P. 259 – 264.
15. *Новожилов В. В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
16. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу континуумов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Пробл. прочности. – 1998. – № 5. – С. 59 – 70.
17. *Ohashi Y.* Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behavior of metals // Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University. – 1982. – **34**, N 1. – P. 1 – 76.
18. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
19. *Новожилов В. В.* О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной упругой среде // Прикл. математика и механика. – 1951. – **15**, вып. 2. – С. 183 – 194.

20. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу континуумов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Анализ определяющих соотношений и сопоставление их с экспериментами // Пробл. прочности. – 1998. – № 6. – С. 43 – 55.
21. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Упругопластические деформации. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – Ч. 1. – 376 с.

Поступила 26. 04. 99