УДК 539.3

Схема змішаного методу скінченних елементів для дослідження задачі про міжшаровий контакт в уточненій постановці. Повідомлення 1. Основні співвідношення й загальна методика побудови розрахункових схем у рамках {*m*, *n*}-апроксимації

М. В. Марчук, М. М. Хом'як

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України ім. Я. С. Підстригача, Львів, Україна

Розглянуто задачу про міжшаровий контакт при врахуванні дискретності тонких шарів структури в рамках {m,n}-апроксимації. Змішаний метод скінченних елементів у формі переміщень–контактних напружень апробовано на задачах циліндричного згину дво- і тришарових пластин. Приведено загальну методику побудови аналогічних схем методу скінченних елементів, вказано їх особливості.

Вступ. Одна з характерних особливостей сучасних технологій і виробництв – інтенсивне застосування композиційних, у тому числі шаруватих матеріалів із необхідними проблемно орієнтованими властивостями. Шаруватість, як якість матеріалу чи об'єкта, часто використовується з конструктивних або (і) експлуатаційних міркувань, але інженерний розрахунок у цьому випадку зумовлений необхідністю побудови адекватних математичних моделей та використання потужних обчислювальних ресурсів. Врахування стану міжшарової взаємодії, насамперед визначення міжшарових контактних напружень (КН), є актуальною проблемою механіки композиційних матеріалів.

Відомо, що суттєвий вплив на напружений стан шаруватих матеріалів мають анізотропія властивостей, низька зсувна жорсткість і стиснення, а особливо концентрація КН біля вільних країв та пошкоджень типу розшарувань (непроклеїв), що може привести до руйнування структури в цілому при значно нижчих навантаженнях, ніж для однорідних середовищ в аналогічних умовах [1].

Окрім того, фізико-механічні й геометричні властивості шарів можуть різнитися на порядок і більше, а пакет – мати складну несиметричну структуру (із накладками і фасками) і вимагати для адекватного моделювання дискретного розгляду шарів в умовах об'ємного характеру напружено-деформованого стану (НДС).

Одним із найбільш відомих чисельних методів дослідження об'єктів складної геометрії, при достатньо загальному виді навантажень і граничних умов (ГУ), є метод скінченних елементів (МСЕ). Однак у зв'язку з незначною товщиною шару в порівнянні з іншими лінійними розмірами розрахункові схеми (РС) на базі співвідношень теорії пружності привели б до дискретних моделей з дуже великою кількістю вузлових параметрів (ступенів свободи), а тому вони практично неприйнятні для розрахунків, орієнтованих на застосування персональних комп'ютерів. Мета роботи – побудова ефективного і достатньо універсального чисельного методу розрахунку шаруватих структур при дискретному розгляді шарів, а також його апробація на типових задачах для дво- і тришарових структур.

Диференціально-матрична і варіаційна постановка задачі в рамках $\{m, n\}$-апроксимації. В умовах коректності застосування до опису окремих шарів рівнянь теорії оболонок (пластин) перехід від об’ємної теорії пружності до двомірних теорій можна здійснити, розкладаючи всі величини в ряди по поліномах Лежандра $P_k(t)$ від нормальної координати $z^{(j)}, t = z^{(j)} / h^{(j)} \in [-1; +1]$, де $h^{(j)}$ – товщина j-го шару. Такий аналітичний підхід до отримання уточнених рівнянь анізотропних пластин і оболонок використовувався в багатьох роботах [2, 3]. Відмітимо одну з основних його переваг: можливість точного задоволення ГУ у напруженнях на лицьових поверхнях (ЛП) $z = \pm h$ оболонки. $\{m, n\}$-апроксимація в теорії тонкостінних елементів конструкцій грунтується на результаті апроксимації функції та її першої похідної поліномами Лежандра [4, 5] і дозволяє підвищити точність наближення (по z) для напружень при заданій точності наближення переміщень. Вибір конкретних $m = 1$ і $n = \{0, 1, 2\}$ (необхідне виконання умови $m \le n + 1$)

$$U_\alpha = u_\alpha + P_1(z / h)\gamma_\alpha(\alpha, \beta), \ \alpha \to \beta, \ \ U_z = \sum_{k=0}^{n} P_k(z / h) w_k(\alpha, \beta) \qquad (1)$$

дозволяє врахувати деформації зсуву й обтиснення та їх вплив на розподіл напружень $\sigma_{iz}, i \in \{\alpha, \beta, z\}$. Тут U_α, U_β, U_z – переміщення шару; $\vec{u}_0 = (u_\alpha, \gamma_\alpha, u_\beta, \gamma_\beta, w_0, ...)^T$ – вектор узагальнених переміщень на серединній поверхні (СП) (коефіцієнтів розкладу в ряди Лежандра); (α, β) – система криволінійних координат на СП, верхній індекс належності до шару опущено.

Припустимо, що кожен із тонких шарів постійної товщини адекватно описується однією з цих моделей, обмежень на порядок розміщення і загальну товщину шарів не накладається. Диференціально-матрична постановка контактної задачі для N-шарового композита (без врахування об’ємних сил) включає:

а) геометричні співвідношення:

$$\vec{\varepsilon}^{(j)} = C_u^{(j)} \vec{u}_0^{(j)}; \qquad (2)$$

б) співвідношення пружності:

$$\vec{\sigma}^{(j)} = D_\varepsilon^{(j)} \vec{\varepsilon}^{(j)} + D_+^{(j)} \vec{\sigma}^{(j, j+1)} + D_-^{(j)} \vec{\sigma}^{(j-1, j)}; \qquad (3)$$

в) рівняння рівноваги в “напруженнях” (4) або в “переміщеннях” (5):

$$L_\sigma^{(j)} \vec{\sigma}^{(j)} + F_-^{(j)} \vec{\sigma}^{(j-1, j)} + F_+^{(j)} \vec{\sigma}^{(j, j+1)} = 0; \qquad (4)$$

$$L_u^{(j)} \vec{u}^{(j)} + \widetilde{D}_-^{(j)} \vec{\sigma}^{(j-1, j)} + \widetilde{D}_+^{(j)} \vec{\sigma}^{(j, j+1)} = 0, \qquad (5)$$

де

$$L_u^{(j)} = L_\sigma^{(j)} D_\varepsilon^{(j)} C_u^{(j)}, \quad \widetilde{D}_\pm^{(j)} = F_\pm^{(j)} + L_\sigma^{(j)} D_\pm^{(j)}; \tag{6}$$

г) граничні умови на контурі СП:

$$G_{n,\sigma}^{(j)} \vec{\sigma}_n^{(j)} = \vec{N}_{n,0}^{(j)}, G_{n,u}^{(j)} \vec{u}_n^{(j)} = \vec{u}_{n,0}^{(j)}; \tag{7}$$

д) умови ідеального механічного контакту на ЛП:

$$\vec{u}_+^{(j)} = \vec{u}_-^{(j+1)}; \tag{8}$$

$$\vec{\sigma}_+^{(j)} = -\vec{\sigma}_-^{(j+1)} = \vec{\sigma}^{(j,j+1)}; \tag{9}$$

е) умови в напруженнях на ЛП шарів, що не є контактними поверхнями (КП):

$$\vec{\sigma}^{(0,1)} = \vec{\sigma}_-^{(0)} = -\vec{\sigma}_0, \quad \vec{\sigma}^{(N,N+1)} = \vec{\sigma}_+^{(N)} = \vec{\sigma}_N; \tag{10}$$

є) апроксимації для переміщень ЛП шарів:

$$\vec{u}^{(j)}(\pm h^{(j)}) = \vec{u}_\pm^{(j)} = B_\pm^{(j)} \vec{u}^{(j)} + C_1^{\pm(j)} \vec{\sigma}^{(j-1,j)} + C_2^{\pm(j)} \vec{\sigma}^{(j,j+1)}. \tag{11}$$

Тут шари пронумеровані від 1 до N вздовж осі z, спрямованої вверх по нормалі на поверхні $z^{(1)} = +h^{(1)}$. Для j-го шару введено позначення: $\vec{u}_0^{(j)} = (u_{\alpha k}^{(j)}, \ldots, u_{\beta k}^{(j)}, \ldots, u_{zk}^{(j)})$ – вектор компонент переміщень; $\vec{\varepsilon}^{(j)} = (\varepsilon_{\alpha k}^{(j)}, \ldots, \varepsilon_{\alpha\beta k}^{(j)}, \ldots, \varepsilon_{\alpha zk}^{(j)}, \ldots, \varepsilon_{zk}^{(j)})^T$ – деформації; $\vec{\sigma}^{(j)} = (N_{\alpha k}^{(j)}, \ldots, S_{\alpha\beta k}^{(j)}, \ldots, Q_{\alpha zk}^{(j)}, \ldots, R_{zk}^{(j)})^T$ – напруження (зусилля-моменти); $C_u^{(j)}$ – матриця диференціальних операторів не вище першого порядку; $D_\varepsilon^{(j)}$ – матриця пружних констант (в загальному випадку – для анізотропного матеріалу); $D_\pm^{(j)}$ – матриці констант для врахування обтиснення; $L_\sigma^{(j)}, L_u^{(j)}$ – матриці диференціальних операторів рівноваги відповідно першого і другого порядку; $G_{n,\sigma}^{(j)}, G_{n,u}^{(j)}$ – матриці комбінацій напрямних косинусів зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до контура СП відносно системи координат (α, β) для граничних значень компонент переміщень $\vec{u}_{n,0}^{(j)}$ і напружень, проінтегрованих по товщині на торцях шару $\vec{N}_{n,0}^{(j)}$; $\vec{\sigma}_\pm^{(j)} = (\sigma_{\alpha z}^{(j)}, \sigma_{\beta z}^{(j)}, \sigma_z^{(j)})^T$, $z^{(j)} = \pm h^{(j)}$ – вектор напружень на лицьовій поверхні шару; $B_\pm^{(j)}, C_1^{\pm(j)}, C_2^{\pm(j)}$ – відповідно матриці впливу компонент переміщень СП шару, а також напружень на інших ЛП сусідніх шарів на переміщення $\vec{u}^{(j)}(\pm h^{(j)})$ даної ЛП шару.

Введемо сумарний для пакета шарів вектор переміщень $\vec{u}=(u^{(1)}, \ldots, u^{(N)})^T$ і КН $\vec{\sigma}=(\vec{\sigma}^{(1,2)}, \ldots, \vec{\sigma}^{(N-1,N)})^T$. Не обмежуючи загальність постановки, розглянемо тільки випадок однорідних головних ГУ для кожного шару:

$$G_{n,u}^{(j)} \vec{u}_n^{(j)} = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_u^{(j)} \neq \varnothing. \tag{12}$$

На множині допустимих функцій, що задовольняють умови (12), виходячи з (4), (8), (10) і (11), запишемо еквівалентне (за Ейлером) варіаційне рівняння задачі у вигляді

$$\delta J^L(\vec{u}, \vec{\sigma}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} \int_{S^{(j)}} (L_u^{(j)} \vec{u}^{(j)} + \widetilde{D}_-^{(j)} \vec{\sigma}^{(j-1,j)} + \widetilde{D}_+^{(j)} \vec{\sigma}^{(j,j+1)}) \delta \vec{u}^{(j)} dS +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \int_{S^{(j,j+1)}} (\vec{u}_-^{(j+1)} - \vec{u}_+^{(j)}) \delta \sigma^{(j,j+1)} dS - \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_\sigma^{(j)}} (G_{n,\sigma}^{(j)} \vec{\sigma}_n^{(j)} - \vec{N}_{n,0}^{(j)}) \delta \vec{u}_n^{(j)} d\Gamma = 0, \tag{13}$$

де

$$\vec{u}_-^{(j+1)} - \vec{u}_+^{(j)} = B_-^{(j+1)} \vec{u}^{(j+1)} - B_+^{(j)} \vec{u}^{(j)} + (C_1^{-(j+1)} - C_2^{+(j)}) \vec{\sigma}^{(j,j+1)} +$$

$$+ C_2^{-(j)} \vec{\sigma}^{(j+1,j+2)} - C_1^{+(j)} \vec{\sigma}^{(j-1,j)}. \tag{14}$$

Застосовуючи до (13) формулу Гріна при врахуванні умов (7), понизимо порядок похідних (другий) і в результаті отримаємо симетричний відносно $\vec{u}, \vec{\sigma}$ змішаний квадратичний функціонал:

$$J_{(m,n)}^L = \sum_{j=1}^{N} (A_j \vec{u}^{(j)}, \vec{u}^{(j)})_{\mathrm{I}} + \sum_{j=1}^{N} (\vec{u}^{(j)}, \widetilde{D}_j^+ \vec{\sigma}^{(j,j+1)})_{\mathrm{I}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} (\vec{u}^{(j+1)}, \widetilde{D}_{j+1}^- \vec{\sigma}^{(j,j+1)})_{\mathrm{I}} + \sum_{j=1}^{N} (\vec{\sigma}^{(j,j+1)}, B_-^{(j+1)} \vec{u}^{(j+1)})_{\mathrm{II}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} (\vec{\sigma}^{(j,j+1)}, B_j^{(j)} \vec{u}^{(j)})_{\mathrm{II}} - \sum_{j=2}^{N-1} (\vec{\sigma}^{(j,j+1)}, C_-^{(j,j+1)} \vec{\sigma}^{(j-1,j)})_{\mathrm{II}} -$$

$$- \sum_{j=1}^{N-1} (\vec{\sigma}^{(j,j+1)}, [C_+^{(j,j+1)} - C_-^{(j+1,J+2)}] \vec{\sigma}^{(j,j+1)})_{\mathrm{II}} -$$

$$- \sum_{j=2}^{N-1} (\vec{\sigma}^{(j-1,j+1)}, C_+^{(j,j+1)} \vec{\sigma}^{(j,j+1)})_{\mathrm{II}} - l(\vec{u}, \vec{\sigma}), \tag{15}$$

де (.,.) – означає інтегрування по поверхні; індекс I відноситься до СП шару; індекс II – до КП; $l(\vec{u}, \vec{\sigma})$ – лінійна частина.

У випадку тонких шарів різницею між інтегруванням типу I і II по сусідніх поверхнях можна знехтувати. Враховуючи це, для $\{m, n\}$-апроксимації оператори типу D і B, а також типу C симетричні, а саме:

$$[\widetilde{D}_{-}^{(j+1)}]^T = B_{-}^{(j+1)}, \quad [\widetilde{D}_{+}^{(j)}]^T = B_{+}^{(j)}, \quad j = \overline{1, N}; \tag{16}$$

$$\begin{gathered} C_{-}^{(j,j+1)} = C_{+}^{(j-1,j)}, \quad j = \overline{2, N-1}, \\ C^{(j,j+1)} = C_{+}^{(j,j+1)} - C_{-}^{(j+1,j+2)}, \quad j = \overline{1, N-1}, \end{gathered} \tag{17}$$

де $C^{(j,j+1)}$ – симетрична (і навіть діагональна) матриця з усіма додатніми коефіцієнтами на діагоналі, що є особливістю вказаних моделей.

Функціонал (15) служить базовим для побудови РС змішаного МСЕ у формі методу в переміщеннях–контактних напруженнях. Такий підхід має ряд особливостей і переваг перед іншими схемами змішаного та гібридного МСЕ [6–8]. Суттєво, що виконується умова неперервності напружень (9) при переході через КП. Відмітимо також симетричність даної постановки, яка виявляється в тому, що кожен із функціоналів $J^L_{(m,n)}(\vec{u}) = J^L_{(m,n)}(\vec{u}, \vec{\sigma}_{fix})$ та $-J^L_{(m,n)}(\vec{\sigma}) = -J^L_{(m,n)}(\vec{u}_{fix}, \vec{\sigma})$ є неперервним і випуклим квадратичним функціоналом, якому притаманна коерцетивність [9, 10]. У припущенні додатньої визначеності $\{m, n\}$-апроксимації квадратичної форми (КФ) енергії деформації кожного з шарів і застосуванні формул типу (11) позитивно вирішується питання про існування та єдиність розв'язку поставленої контактної задачі. Зауважимо, що формула (11), отримана аналітичним шляхом, фізично може бути трактована як введення в розгляд тонкого проміжного шару з деякими усередненими відносно сусідніх шарів властивостями. Аналогічні формули типу

$$\vec{u}(z = \pm h) = \vec{u}(z = 0) + k\sigma(z = \pm h), \tag{18}$$

які враховують залежність переміщень від КН (обтиснення – для прогинів), у роботах [6, 11] вводилися з феноменологічних міркувань. Наступна особливість даного підходу полягає в наявності від'ємно визначених блоків типу C, що характерно для задач на екстремум типу "сідлової точки". Справді, КН в функціоналі (15) є множниками Лагранжа для врахування додаткових умов "склейки" (8) розв'язків у переміщеннях для окремих шарів. Оскільки вимоги до гладкості КН не вищі, ніж до переміщень шарів, то зручно, з точки зору програмної реалізації, апроксимацію як переміщень, так і КН здійснювати однотипними скінченними елементами, наприклад квадратичними ізопараметричними елементами, що показали свою ефективність в теорії оболонок і пластин [9].

Загальна методика побудови РС змішаного МСЕ для шару. Схема МСЕ для функціонала (15) з врахуванням (16), (17) повністю визначається КФ $(A_j u^{(j)}, u^{(j)}), (C^{(j,j+1)}\vec{\sigma}^{(j,j+1)}, \vec{\sigma}^{(j,j+1)})$ та білінійними формами (БЛФ) $(\vec{u}^{(j)}, \widetilde{D}_j^{\pm}\vec{\sigma}^{(j,j\pm1)})$ і $(\vec{\sigma}^{(j-1,j+1)}, C_+^{(j,j+1)}\vec{\sigma}^{(j,j+1)})$ для кожного шару структури. Зауважимо, що вклади в лінійну частину функціонала $l(\vec{u}, \vec{\sigma})$ від навантажень на зовнішніх ЛП шарів теж обчислюються за схемою БЛФ з матрицями типу $\widetilde{D}_j^{\pm}$ і $C_{\pm}^{(j,j+1)}$ (вклади від навантажень на торцях шару з контуром $L_{\sigma}^{(j)}$ – за стандартною процедурою МСЕ в переміщеннях). Під РС тут будемо розуміти підінтегральні вирази для вказаних КФ і БЛФ функціонала (15), представлені у вигляді (індекс належності до шару опущено)

$$\sum_{i,j=1}^{n_u} \sum_{k,l=0}^{2} a_{ij}^{kl} u_{i,k} u_{j,l} = \{\vec{u}^*\}^T [A] \{\vec{u}^*\}; \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_\sigma} \sum_{k,l=0}^{2} d_{ij}^{k0} u_{i,k} \sigma_{j,l} = \{\vec{u}^*\}^T [D_{\pm}] \{\vec{\sigma}\}; \\ \sum_{i,j=1}^{n_\sigma} (c_{1,2}^{\pm})_{ij} \sigma_i \sigma_j = \{\vec{\sigma}\}^T [C_{1,2}^{\pm}] \{\vec{\sigma}\}, \end{gathered} \tag{20}$$

де $\{\vec{u}^*\}$ – вектори компонент переміщень, розширені своїми похідними; $\{\vec{\sigma}\}$ – КН. Тут $[A]$ – $(n_u \times n_u)$, $[D_{\pm}]$ – $(n_u \times n_\sigma)$, $[C_{1,2}^{\pm}]$ – $(n_\sigma \times n_\sigma)$ – блочні матриці коефіцієнтів, що залежать від механічних властивостей і геометрії шару; n_u – розмірність вектора $\vec{u}$; n_σ – розмірність вектора КН $\vec{\sigma}$ ($n_\sigma = 3$ для загального випадку). Компоненти векторів позначені нижнім індексом, індекс після коми, крім нуля, означає диференціювання по відповідній координаті. Кожен із блоків цих матриць задає взаємовплив відповідних компонент переміщень і КН у довільній точці області інтегрування. Внутрішня структура блоків зумовлює вимоги гладкості до компонент відповідних векторів.

Для конкретної уточненої теорії шару, системи координат і геометрії оболонки, записавши систему рівнянь рівноваги (5) (або (4) з подальшим врахуванням (2) і (3)) і варіаційне рівняння (13), після застосування формули Гріна отримаємо необхідні розрахункові формули. У зв'язку з громіздкістю подібних викладок можна вважати доцільним розробку загальної методики, придатної для використання не тільки в рамках $\{m, n\}$-апроксимації в теорії оболонок, але й при поширенні на теорії з врахуванням немеханічних полів, наприклад термопружності, електродинаміки тощо. Ідея полягає в структурному аналізі вихідних диференціальних співвідношень еліптичної системи рівнянь (як правило, другого порядку) і їх табличному представленні з подальшими формульними операціями над стовпцями таблиці, які можна реалізувати програмно в рамках аналітичних обчислень.

Продемонструємо методику на одному з рівнянь рівноваги, наприклад для прогинів w_0 у рамках $\{1, 2\}$-апроксимації:

$$l_{51}u_\alpha + l_{52}u_\beta + l_{53}\gamma_\alpha + l_{54}\gamma_\beta + l_{55}w_0 + l_{56}w_1 + l_{57}w_2 + l(\vec{\sigma}) = 0, \quad (21)$$

де

$$\vec{u} = (u_\alpha, u_\beta, \gamma_\alpha, \gamma_\beta, w_0, w_1, w_2)^T; \qquad \vec{\sigma} = (\tau_{\alpha z}, \tau_{\beta z}, \sigma_{zz})^T;$$

$$l_{51} = (B^\lambda_{\alpha\beta}k_\alpha + B^\lambda_\beta k_\beta)\Delta_1 + (B^\lambda_\alpha k_\alpha + B^\lambda_{\alpha\beta}k_\beta)\partial_1(\cdot) + k_\alpha\Lambda_\alpha(\Delta_1 + \partial_1(\cdot)) =$$

$$= l^{00}_{51} + l^{01}_{51} + l^{10}_{51};$$

$$l_{52} = (B^\lambda_\alpha k_\alpha + B^\lambda_{\alpha\beta}k_\beta)\Delta_2 + (B^\lambda_{\alpha\beta}k_\alpha + B^\lambda_\beta k_\beta)\partial_2(\cdot) + k_\beta\Lambda_\beta(\Delta_2 + \partial_2(\cdot)) =$$

$$= l^{00}_{52} + l^{02}_{52} + l^{20}_{52};$$

$$l_{53} = -\Lambda_\alpha(\Delta_1 + \partial_1(\cdot)) = l^{10}_{53}; \qquad l_{54} = -\Lambda_\beta(\Delta_2 + \partial_2(\cdot)) = l^{20}_{54};$$

$$l_{55} = (B^\lambda_\alpha k^2_\alpha + B^\lambda_\beta k^2_\beta + 2B^\lambda_{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta) - \Lambda_\alpha(\Delta_1 + \partial_1(\cdot))\partial_1(\cdot) -$$

$$- \Lambda_\beta(\Delta_2 + \partial_2(\cdot))\partial_2(\cdot) = l^{00}_{55} + l^{11}_{55} + l^{22}_{55};$$

$$l_{56} = (\lambda_\alpha k_\alpha + \lambda_\beta k_\beta)\Omega' h^{-1} = l^{00}_{56};$$

$$l_{57} = \frac{1}{14}(\Lambda_\alpha(\Delta_1 + \partial_1(\cdot))\partial_1(\cdot) + \frac{1}{14}\Lambda_\beta(\Delta_2 + \partial_2(\cdot))\partial_2(\cdot) = l^{11}_{57} + l^{22}_{57}.$$

Тут введено оператори диференціювання в ортогональних криволінійних координатах (α, β):

$$\partial_1(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{A_\alpha \partial\alpha}; \ \partial_2(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{A_\beta \partial\beta}; \ \Delta_1 = \frac{\partial_1 A_\beta}{A_\beta}; \ \Delta_2 = \frac{\partial_2 A_\alpha}{A_\alpha}, \quad (22)$$

де A_α, A_β – параметри Ламе СП.

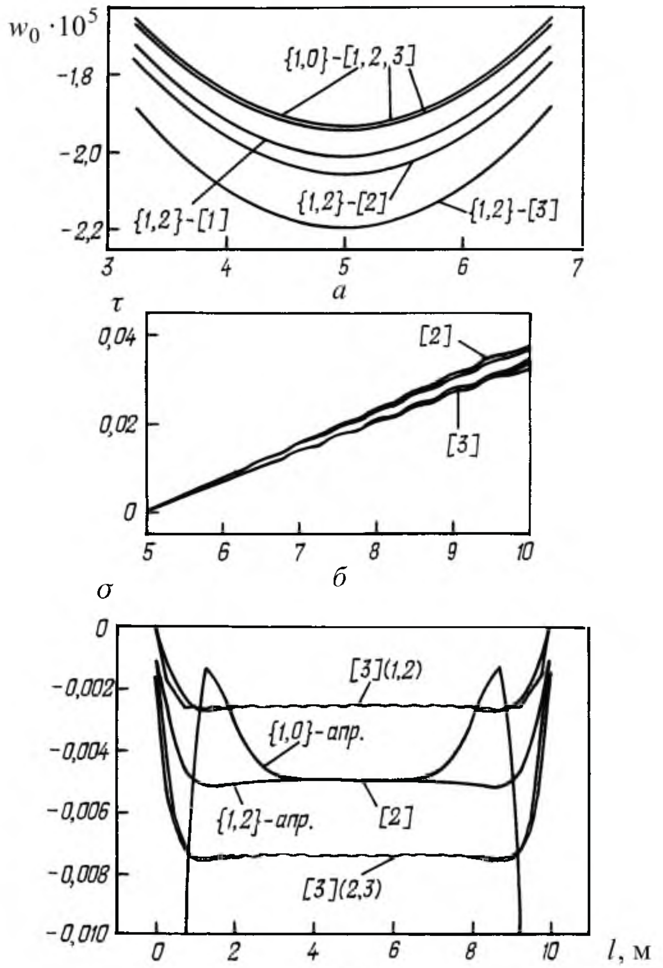
У випадку декартових координат на площині (плоского шару)

$$A_\alpha = A_\beta = 1; \ \partial_1(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial x; \ \partial_2(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial y; \ \Delta_1 = \Delta_2 = 0. \quad (23)$$

Таблиця для побудови РС повинна містити принаймні чотири основні стовпці: перший – ненульові оператори l^{kl}_{ij}; другий – їх значення (зі знаком "–"); третій і четвертий – відповідні їм компоненти матриці квадратичної форми α_{ij}^{kl} та їх значення (зі знаком "+"). Перші два стовпці заповнюються на основі структурного аналізу рівнянь рівноваги, записаних у вигляді, аналогічному (21). Третій стовпець міститиме компоненти матриці типу A, відповідно до першого стовпця. Останній стовпець зі значеннями α_{ij}^{kl} отримуємо з другого стовпця наступним чином: 1) якщо присутній оператор $\Delta_i + \partial_i(\cdot)$, то відкидаємо його, інакше, якщо присутній лише оператор $\partial_i(\cdot)$, то відкидаємо його і змінюємо знак, інакше просто міняємо знак; 2) отриманий вираз домножаємо на коефіцієнти Ламе СП A_i і A_j, $i, j \in \{\alpha, \beta\}$, що відповідають нульовим верхнім індексам коефіцієнтів α_{ij}^{kl}, наприклад вираз для α_{ij}^{01} – на A_α, α_{ij}^{20} – на A_β, а α_{ij}^{00} – на $A_\alpha A_\beta$. Зворотний порядок виконання вказаних операцій – еквівалентний побудові рівнянь Ейлера функціонала J^L (15). Побудована таким чином таблиця міститиме розгорнуте доведення еквівалентності класичної та варіаційної постановок. Аналогічно можна отримати співвідношення для матриць типу D і C. Зауважимо, що в практичних розрахунках найчастіше використовується $\{1, 0\}$-апроксимація (теорія типу Тимошенка), вектор переміщень шару для якої має п'ять компонент: $\vec{u} = (u_\alpha, u_\beta, \gamma_\alpha, \gamma_\beta, w_0)^T$.

Чисельний приклад. Для апробації викладеного варіанта змішаного МСЕ розглянемо задачі про циліндричний згин дво- і тришарових шарнірно підкріплених на краях пластин. Числові параметри приймалися наступними: відношення довжини до загальної товщини пластини $l/2h = 5$. Пластина складається з $N = 2$ або $N = 3$ ідентичних шарів із модулем Юнга матеріалу E і коефіцієнтом Пуассона ν, постійне навантаження на ЛП верхнього N-го шару $\sigma_{zz}^{(N)+}/E = -0{,}001$. В силу лінійності розглянутих задач відносно параметра σ_{zz}/E можливе масштабування результатів, тому тут не прив'язуємося до конкретного матеріалу та одиниць навантаження і довжини. СП і КП рівномірно розбивалися на 20 квадратичних елементів кожна, 41 вузол на поверхні, 2 невідомих КН (τ, σ) і 3/5 невідомих переміщень шару $(u, \gamma, w_0, w_1, w_2)$ у вузлі, загальна кількість ступенів вільності рівна 329/492 – для двошарової і 533/779 для тришарової структури (чисельник/знаменник: $\{1, 0\}/\{1, 2\}$-апроксимація). Застосовувалися співвідношення зв'язаної теорії з врахуванням поздовжніх переміщень СП. Вважалося, що умови шарнірного підкріплення виконуються для кожного із шарів, хоча можливий більш тонкий розрахунок, з умовами тільки для нижнього шару. На рисунку,*а* для порівняння представлені прогини окремих шарів структури (в центральній частині, де вони найбільше різняться), на рисунку,*б* – дотичні напруження (в силу симетрії задачі відносно центру $l = 5$ – тільки права частина, для лівої – слід поміняти знак), на рисунку,*в* – нормальні КН.

Аналіз прогинів показує, що при збільшенні числа шарів жорсткість структури зменшується, а прогини зростають. Для $\{1, 2\}$-апроксимації (тобто при врахуванні деформацій стиснення $e_{zz} \neq 0$) це явище чітко виражене, для $\{1,0\}$-апроксимації прогини шарів практично співпадають, що відповідає гіпотезі про недеформованість нормалі $e_{zz} = 0$. Дотичні КН розподілені лінійно по довжині й практично не залежать від вибору моделі, нормальні ж співпадають для тришарової пластини, в той час як у випадку двох шарів є суттєва якісна різниця. Врахування обтиснення ({1, 2}-апроксимація) "знімає" концентрацію на краю пластини згідно з {1, 0}-апроксимацією. Аналогічні ефекти відмічено й в інших роботах (наприклад, в [11]), вони відображають специфіку моделі, хоча при збільшенні шарів до трьох ефект знімається. Очевидно, що вплив моделі є фактором малодослідженим, і запропонований нами чисельний метод має хороші перспективи, зокрема, при нарощуванні числа шарів.



Прогини w_0 (*а*), дотичні (*б*) і нормальні (*в*) контактні напруження N-шарової (N =2, 3) шарнірно підкріпленої пластини в рамках {1, 0}- і {1, 2}-апроксимації. (У фігурних дужках вказано порядок апроксимації, у квадратних – кількість шарів, у круглих – міжшарова поверхня.)

Таким чином, відмітимо адекватність моделей {1, 0}- та {1, 2}-апроксимації реальним процесам деформування і ефективність змішаного МСЕ при розв'язуванні задач для шаруватих структур.

Р е з ю м е

Рассмотрено задачу о межслойном контакте с учетом дискретности тонких слоев структуры в рамках $\{m, n\}$-аппроксимации. Смешанный метод конечных элементов в форме перемещений – контактных напряжений апробирован на задачах цилиндрического изгиба двух- и трехслойных пластин. Приведено общую методику построения аналогичных схем метода конечных элементов, указано их особенности.

1. *Гузь А. Н., Коханенко Ю. В.* Краевые эффекты в композитах // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 3. – С. 3 – 23.
2. Алексеев А. Е. Двухпараметрическое семейство последовательных $\{M, N\}$-приближений уравнений упругого слоя переменной толщины // Прикл. механика и теорет. физика. – 1996. – **37**, № 3. – С. 133 – 144.
3. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
4. *Пелех Б. Л., Лазько В. А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – Киев.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
5. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Про один новий підхід до побудови теорії оболонок з врахуванням граничних умов на поверхнях. – Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1978. – № 5. – С. 441 – 444.
6. *Голованов А. И., Паймушин В. Н.* Напряженно-деформируемое состояние и устойчивость трехслойных оболочек из КМ, имеющих зону расслоения заполнителя с несущим слоем // Механика композитных материалов. – 1993. – № 5. – С. 640 – 652.
7. *Еременко С. Ю.* Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Изд-во “Основа “ при Харьк. ун-те, 1991. – 272 с.
8. *Григоренко Я. М., Кокошин С. С.* Численный анализ напряженного состояния слоистых анизотропных оболочек на базе смешанной модели МКЭ // Прикл. механика. – 1985. – **18**, № 2. – С. 3 – 6.
9. *Марчук М. В.* Решение задач уточненной теории слоистых анизотропных пластин методом конечных элементов: Автореф. дис… канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1984. – 19 с.
10. *Вагін П. П., Іванова Н. В., Шинкаренко Г. А.* Аналіз зсувних оболонок: коректність варіаційних задач динаміки // Математичні студії. – 1998. – **10**, № 2. – С. 188 – 198.
11. *Кит Г. С., Максимук А. В.* Метод интегральных уравнений Вольтерра в контактных задачах для тонкостенных элементов конструкций // Теорет. и прикл. механика. – 1997. – **27**. – С. 29 – 35.

Поступила 22. 12. 98