УДК 539.37

Строгое решение задач теории течения с изотропно-кинематическим упрочнением. Сообщение 2. Задание траектории деформирования в пространствах полных и пластических деформаций

В. А. Ромащенко, П. П. Лепихин, К. Б. Иващенко

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Для произвольного изотропного и линейного кинематического упрочнения и путей деформирования, заданных в виде произвольных многозвенных ломаных в пятимерном девиаторном пространстве полных деформаций, аналитически исследован первоначально изотропный упругопластический материал с условием текучести Мизеса и ассоциированным законом течения. Полученные решения справедливы для произвольных зависимостей изменения шаровой части тензора напряжений.

Для произвольных изотропного и кинематического упрочнения также получено аналитическое решение упругопластической задачи для произвольной траектории деформирования, заданной в девиаторном пространстве пластических деформаций.

Для модели поведения материалов, описанной в сообщении 1 [1], рассматривается случай, когда путь нагружения является многозвенной ломаной в девиаторном пространстве деформаций. Также приведены решения для случая, когда путь нагружения представляет собой произвольную кривую с изломами в пространстве пластических деформаций, причем как изотропное, так и кинематическое упрочнение произвольны.

Постановка исследуемой в данном сообщении задачи, принятая система обозначений и используемая система уравнений приведены в сообщении 1. В обоих сообщениях используется сквозная нумерация формул.

Определение напряжений по заданному пути деформирования в пространстве полных деформаций. Будем рассматривать процесс деформирования, проекция которого в пятимерном девиаторном пространстве полных деформаций представляет собой многозвенную ломаную, а шаровая часть тензора деформации изменяется произвольным образом. Положение точки, характеризующей конкретное деформированное состояние, принадлежащее пути деформирования, задается неотрицательным параметром x, который интерпретируется как длина траектории девиатора полных деформаций.

Рассмотрим произвольный линейный отрезок многозвенной ломаной в девиаторном пространстве полных деформаций:

$$e_{kj}(x) = e_{kj}^{0} + E_{kj}^{0}(x - x_0), \quad x_0 \le x \le x_1, \tag{64}$$

где x_0, x_1 – заданные точки начала и конца отрезка; $e_{kj}^{0} = e_{kj}(x_0)$; $e_{kj}^{1} = e_{kj}(x_1)$;

$$E_{kj}^0 = \frac{e_{kj}^1 - e_{kj}^0}{x_1 - x_0}. \qquad (65)$$

Как и в [1], величины G, K, η и $\Phi(q)$ полагаются известными. Можно заметить, что

$$E_{kj}^0 E_{kj}^0 = 1. \qquad (66)$$

Шаровая часть тензора напряжений может быть вычислена непосредственно из (2), следовательно, исследуемая задача сводится к определению девиаторных напряжений, так как известные полные деформации нетрудно разделить на пластическую и упругую части, если определены напряжения. Таким образом, нам необходимо найти только значения s_{kj} в произвольной точке отрезка $(x_0 < x \le x_1)$ при условии, что все параметры материала в точке x_0 известны.

Поскольку, как и в сообщении 1, рассматриваемый отрезок полагается пластическим, то функция $\lambda(x)$ в (8) монотонно возрастает и, значит, является взаимно однозначной на всем интервале $x_0 \le x \le x_1$. При подстановке закона упрочнения (5) в ассоциированный закон течения (4) с учетом разложения (1) и закона Гука (2) получаем

$$de_{kj} - \frac{ds_{kj}}{2G} = \frac{d\lambda}{2G}\left[s_{kj} - 2G\eta\left(e_{kj} - \frac{s_{kj}}{2G}\right)\right]. \qquad (67)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{ds_{kj}}{d\lambda} + (1+\eta)s_{kj} = 2G\left(\frac{de_{kj}}{d\lambda} + \eta e_{kj}\right). \qquad (68)$$

Вводя функцию

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} e^{(1+\eta)\lambda(x')}dx', \qquad (69)$$

для которой

$$z(x_0) = 0,\ z(x) \ge 0,\ \dot z = \frac{dz}{dx} = e^{(1+\eta)\lambda} \ge 1,\ \lambda = \frac{1}{1+\eta}\ln \dot z \ge 0, \qquad (70)$$

и принимая обозначение

$$b_{kj}^0 = e^{(1+\eta)\lambda(x_0)}(s_{kj}^0 - \rho_{kj}^0), \qquad (71)$$

с учетом начальных условий решение (68) можно записать следующим образом:

$$s_{kj} = \frac{1}{(1+\eta)}\left[2G\eta e_{kj} + \frac{1}{\dot{z}}(b_{kj}^0 + 2GE_{kj}^0 z)\right]. \tag{72}$$

Из (72) и линейного закона упрочнения (5) следует

$$s_{kj} - \rho_{kj} = \frac{1}{\dot{z}}(b_{kj}^0 + 2GE_{kj}^0 z). \tag{73}$$

подстановки (73) в (3), (6) имеем

$$\frac{\Phi(q)}{\sqrt{6G}}\dot{z} = \sqrt{z^2 + 2Iz + J^2}, \tag{74}$$

где

$$I = \frac{b_{kj}^0 E_{kj}^0}{2G}; \; J = \frac{\sqrt{b_{kj}^0 b_{kj}^0}}{2G} > 0. \tag{75}$$

Как и в [1], можно показать, что $I \geq 0$ и квадратный трехчлен под корнем в (74) всегда положителен при $z \geq 0$.

Из (17) получаем

$$\lambda = F(q) = \lambda_0 + 3G\eta \int_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\Phi(q')}. \tag{76}$$

учетом (70) отсюда следует, что

$$q = F^{-}\left(\frac{1}{1+\eta}\ln \dot{z}\right), \tag{77}$$

из (74) можно получить

$$L(\dot{z}) = \sqrt{z^2 + 2Iz + J^2}, \tag{78}$$

где

$$L(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{6G}}\Phi\left[F^{-}\left(\frac{1}{1+\eta}\ln \xi\right)\right]. \tag{79}$$

начальные условия, интеграл (78) запишем в виде

$$x = H(z) = x_0 + \int_0^z \frac{dz'}{L^{-}\left(\sqrt{(z')^2 + 2Iz' + J^2}\right)}, \tag{80}$$

в результате имеем

$$z = H^{-}(x). \tag{81}$$

Теперь последовательно можно определить s_{kj} из (72),

$$e_{kj}^{p} = e_{kj} - s_{kj}/2G \tag{82}$$

– из (1), (2), ρ_{kj} – из (73),

$$\lambda(x) = \frac{1}{1+\eta} \ln \frac{dH^{-}(x)}{dx} \tag{83}$$

– из (70) и

$$q(x) = F^{-}\left(\frac{1}{1+\eta} \ln \frac{dH^{-}(x)}{dx} \right) \tag{84}$$

– из (77).

Как и в сообщении 1, условий (45) достаточно для взаимной обратимости функций F, G и H. В отличие от сообщения 1, предложенный подход к решению применим также для предельных случаев: когда $\eta = 0$ и даже когда $\frac{d\Phi}{dq} = \eta = 0$. Таким образом, рассматриваемая пластическая задача является хорошо обусловленной, если путь нагружения задан в пространстве полных деформаций.

Решения для частных случаев могут быть получены, как и в сообщении 1. В частности, для чисто кинематического упрочнения имеем формулу, аналогичную (63):

$$H^{-}(x) = J \operatorname{sh} 2G\Omega(x) + I[\operatorname{ch} 2G\Omega(x) - 1]. \tag{85}$$

Определение напряжений по заданному пути пластического деформирования. В заключение рассмотрим произвольный криволинейный путь деформирования, включающий конечное число точек излома, заданный в пятимерном девиаторном пространстве пластических деформаций. Теперь необходимо определить напряжение в каждой точке пути деформирования при условии, что все параметры материала в исходной точке известны.

В этом разделе будем использовать более общую теорию Кадашевича–Новожилова [2], в которой пластическая реакция материала, кроме системы (1)–(13), описывается также уравнением (16).

Сначала рассмотрим гладкие активные участки заданного пути пластического деформирования, для которых напряжения могут быть определены однозначно в любой точке. Действительно, просуммировав возведенные в квадрат уравнения (5), после подстановки в (16) запишем

$$\bar{\rho} = 3G\eta(\bar{\rho})\overline{e^p}, \tag{86}$$

где

$$\overline{e^p} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{kj}^p e_{kj}^p} \tag{87}$$

– эквивалентная пластическая деформация. Так как в данном случае предполагается, что e_{kj}^p заданы для любой точки пути деформирования, то последовательно можно определить величины

$$\bar{\rho} = Y^{-}(\bar{e}^p); \tag{88}$$

$$\rho_{kj} = 2G\eta(\bar{\rho})e_{kj}^p; \tag{89}$$

$$s_{kj} = \rho_{kj} + \frac{2}{3}\frac{\Phi(q)}{\overline{\dot{e}^p}}\dot{e}_{kj}^p, \tag{90}$$

где

$$Y(\zeta) = \frac{\zeta}{3G\eta(\zeta)}. \tag{91}$$

Уравнение (90) получено путем подстановки $d\lambda$ из (17) в ассоциированный закон течения (4) с использованием равенства

$$\frac{de_{kj}^p}{dq} = \frac{\dot{e}_{kj}^p}{\overline{\dot{e}^p}}, \tag{92}$$

которое следует из определения параметра Удквиста q (7).

Формула (90) также применима для траекторий, включающих точки излома. Действительно, рассмотрим точку x, в которой имеется излом траектории пластической деформации. Перемещение из точки $x-0$ в точку $x+0$ в девиаторном пространстве полных деформаций соответствует перемещению из одной точки на поверхности текучести в другую по произвольной допустимой траектории, которая является либо упругой, либо нейтральной, либо частично упругой – частично нейтральной и вырождается в точку x в девиаторном пространстве пластических деформаций. Поскольку в этом случае пластическая деформация не изменяется, значения e_{kj}^p, ρ_{kj} и, следовательно, функции $q, \Phi(q), \overline{e^p}$ и $\bar{\rho}$ также остаются неизменными, в то время как $\dot{e}_{kj}^p$ и $\overline{\dot{e}^p}$ претерпевают скачкообразное изменение при переходе от $x-0$ до $x+0$, которое приводит к скачку величины s_{kj}. Однако ранее проведенный анализ [3] показал, что, если траектория деформирования дифференцируема в обеих точках $x-0$ и $x+0$, то напряжения в них могут быть определены однозначно по формулам (90) с использованием значений двух односторонних производных $\dot{e}^p_{kj}$. Решение для гладкой траектории деформирования, начинающейся в точке $x+0$, также может быть найдено из (90).

Таким образом, получено полное решение поставленной задачи для произвольной кусочно-гладкой траектории пластического деформирования.

Заметим, что зависимость решений (90) от параметра Удквиста q обусловлена только функцией $\Phi(q)$. Для предельного случая, когда $\Phi(q)=\sigma_y=\text{const}$, решения (90) не зависят от указанного параметра и полностью определяются значениями пластических деформаций и их первых производных в рассматриваемой точке траектории.

Решение для другого предельного случая, когда $\eta=0$, также может быть получено из (90), если принять $Y^-(\zeta)=\eta=0$.

Заметим, что из (90) также следует, что переместившийся центр гиперсферы текучести будет всегда размещаться внутри другой гиперсферы:

$$\rho_{kj}\rho_{kj}\le\frac{2}{3}R^2, \tag{93}$$

где

$$R=\sqrt{6}\,G\max_x\left|\overline{e^p}\eta\left(Y^-\left(\overline{e^p}\right)\right)\right|. \tag{94}$$

Радиус (94) не зависит от $\Phi(q)$ и определяется только траекторией пластического деформирования и характеристиками кинематического деформационного упрочнения.

Кроме того, из (90) вытекает, что в случае циклических пластических деформаций $(q\to\infty,\ e^p_{kj}<\infty)$ и неограниченно возрастающей функции деформационного упрочнения $\Phi(q)$ абсолютное значение максимального напряжения будет стремиться к бесконечности при неограниченном увеличении числа циклов:

$$\max_{k,j}\left|s_{kj}\right|\underset{q\to\infty}{\to}\infty. \tag{95}$$

Чтобы доказать это, достаточно принять во внимание, что

$$\frac{\max\limits_{k,j}\left|\dot{e}^p_{kj}\right|}{\overline{\dot{e}^p}}=\frac{\max\limits_{k,j}\left|\dot{e}^p_{kj}\right|}{\sqrt{\frac{2}{3}\sum\limits_{l,m}\dot{e}^p_{lm}\dot{e}^p_{lm}}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{\sqrt{6}}. \tag{96}$$

В случае, когда изотропная функция упрочнения ограничена $(\Phi(q)\le M)$, активные напряжения всегда будут ограничены гиперсферой

$$(s_{kj} - \rho_{kj})^2 \le \frac{2}{3} M^2. \tag{97}$$

Для доказательства этого заметим, что

$$\frac{\left|\dot{e}^p_{kj}\right|}{\overline{\dot{e}^p}} = \frac{\left|\dot{e}^p_{kj}\right|}{\sqrt{\frac{2}{3}\sum\limits_{l,m}\dot{e}^p_{lm}\dot{e}^p_{lm}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{\substack{l\neq k\\ m\neq j}}(\dot{e}^p_{lm}/\dot{e}^p_{kj})^2}} \le \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \forall \dot{e}^p_{kj} \neq 0. \tag{98}$$

Предельный радиус $\sqrt{\frac{2}{3}}M$ в (97) не зависит от траектории и определяется только функцией изотропного деформационного упрочнения $\Phi(q)$.

Заключение. Аналитически исследован первоначально изотропный упругопластический материал с условием текучести Мизеса и ассоциированным законом течения для случаев произвольного изотропного и линейного кинематического упрочнения и произвольных кусочно-линейных путей нагружения, заданных в пятимерном девиаторном пространстве напряжений либо деформаций.

соответствующие точные решения в явной форме для неко- торых важных частных случаев поведения материала.

Получено аналитическое решение упругопластической задачи при произвольном кинематическом упрочнении и произвольной траектории деформирования, заданной в девиаторном пространстве пластических деформаций.

Приложение.

данном приложении приведены решения для упругого линейного отрезка траектории нагружения, а также детали построения общего решения для всей многозвенной ломаной, заданной в девиаторном пространстве.

А. Пространство напряжений.

Соотношения для упругого отрезка следующие:

$$\begin{cases} \varepsilon(x) = \sigma(x)/K; \; e^e_{kj}(x) = s_{kj}(x)/2G; \; e^p_{kj}(x) = e^p_{kj}(x_0); \\ \rho_{kj}(x) = \rho_{kj}(x_0); \; \Lambda(x) = \Lambda(x_0); \; q(x) = q(x_0); \\ \overline{\sigma}_\rho = \sqrt{\frac{3}{2}[s_{kj}(x_0) - \rho_{kj}(x_0) + S^0_{kj}(x - x_0)]^2}. \end{cases} \tag{A1}$$

Решение для всей траектории. В сообщении 1 исследовано нагружение, соответствующее условию (10). Чтобы получить полное решение задачи, мы должны также рассмотреть нагружения, которые соответствуют оставшимся условиям (11)–(13). Начнем с условия (13):

$$\overline{\sigma}_\rho(x_0) < \Phi(q(x_0)). \tag{A2}$$

Оно означает, что начальная точка данной траектории находится в упругой области (строго внутри поверхности текучести). Чтобы определить, пересекает ли рассматриваемый отрезок смещенную поверхность текучести $\Phi(q(x_0))$, необходимо записать уравнение

$$\sum_{k,j=1}^{3}[s_{kj}(x_0)-\rho_{kj}(x_0)+S_{kj}^0(x-x_0)]=\frac{2}{3}\Phi^2(q(x_0)) \tag{A3}$$

и найти его больший корень

$$x_*=x_0-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \tag{A4}$$

где

$$\alpha=\sum_{k,j=1}^{3}S_{kj}^0[s_{kj}(x_0)-\rho_{kj}(x_0)];\ \beta^2=\frac{2}{3}[\Phi^2(q(x_0))-(\overline{\sigma}_\rho(x_0))^2]. \tag{A5}$$

Если $x_*\geq x_1$, значит, весь рассматриваемый отрезок находится в упругой области и в этом случае применимы соотношения (A1). В противном случае, если $x_*<x_1$, это означает, что вдоль отрезка $[x_0,x_*]$ деформирование является упругим, а вдоль отрезка $[x_*,x_1]$ – пластическим, и к каждому из этих отрезков нужно применять соответствующие формулы, учитывая, что упругое решение для точки x_*, полученное из (A1), определяет начальные условия для пластического решения в каждой точке отрезка $[x_*,x_1]$.

Теперь рассмотрим случай, когда начальная точка данного отрезка, являющаяся одновременно конечной точкой предыдущего отрезка, расположена точно на поверхности текучести, т.е. выполняется условие (11):

$$\overline{\sigma}_\rho(x_0)=\Phi(q(x_0)), \tag{A6}$$

однако, в отличие от (31), здесь

$$B<0. \tag{A7}$$

Это подразумевает, что существует такое $\delta>0$, что весь отрезок $[x_0,x_0+\delta]$, кроме самой точки x_0, находится строго внутри упругой области. Тогда уравнение (A3) может быть переписано в виде

$$(x-x_0)(x-x_0+2\alpha)=0, \tag{A8}$$

где, как следует из (A7), $\alpha<0$. Больший корень уравнения (A8)

$$x_*=x_0-2\alpha>x_0, \tag{A9}$$

поэтому, как уже отмечалось, мы должны либо использовать совершенно упругое решение, когда $x_* \geq x_1$, либо сочетать упругое и пластическое решения, когда $x_* < x_1$.

Таким образом, рассмотрены все случаи (10)–(13), и теперь можно получить решение для произвольной многозвенной ломаной в девиаторном пространстве напряжений.

В. Пространство деформаций

Соотношения для упругого отрезка таковы:

$$\begin{cases} \sigma(x) = K\varepsilon(x); \; e_{kj}^{p}(x) = e_{kj}^{p}(x_0); \; \rho_{kj}(x) = \rho_{kj}(x_0); \\ \lambda(x) = \lambda(x_0); \; q(x) = q(x_0); \; \overline{\sigma}_\rho(x) = \sqrt{\frac{3}{2}[s_{kj}(x) - \rho_{kj}(x_0)]^2}; \\ s_{kj}(x) = e_{kj}(x_0) + 2GE_{kj}^0(x - x_0). \end{cases} \tag{A10}$$

Решение для всей траектории. Аналогично случаю, когда задана траектория нагружения в пространстве напряжений, мы должны рассмотреть уравнение

$$\sum_{k,j=1}^{3}[s_{kj}(x_0) - \rho_{kj}(x_0) + 2GE_{kj}^0(x - x_0)] = \frac{2}{3}\Phi^2(q(x_0)) \tag{A11}$$

для отрезка, начальная точка которого расположена внутри поверхности текучести, и уравнение

$$(x - x_0)(x - x_0 + 2\alpha') = 0 \tag{A12}$$

для отрезка, начальная точка которого расположена точно на поверхности текучести. После определения большего корня

$$x_* = x_0 - \alpha' + \sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}, \tag{A13}$$

или

$$x_* = x_0 - 2\alpha' > x_0, \tag{A14}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha' = \frac{1}{2G}\sum_{k,j=1}^{3}E_{kj}^0[s_{kj}(x_0) - \rho_{kj}(x_0)]; \\ (\beta')^2 = \frac{1}{6G^2}[\Phi^2(q(x_0)) - (\overline{\sigma}_\rho(x_0))^2], \end{gathered} \tag{A15}$$

можно принять решение, использовать для рассматриваемого отрезка только упругие соотношения (A10) или упругие и пластические выражения.

Резюме

Для довільного ізотропного і лінійного кінематичного зміцнення та шляхів деформування, що задані у вигляді довільних багатоланцюгових ломаних у п'ятимірному девіаторному просторі повних деформацій, аналітично досліджено початково ізотропний пружнопластичний матеріал з умовою текучості Мізеса та асоційованим законом течения. Отримані розв'язки справедливі для довільних залежностей зміни кульової частини тензора напружень.

Для довільних ізотропного і кінематичного зміцнення також одержано аналітичний розв'язок пружнопластичної задачі для довільної траєкторії деформування, що задана у девіаторному просторі пластичних деформацій.

1. *Ромащенко В. А., Лепихин П. П., Иващенко К. Б.* Строгое решение задач теории течения с изотропно-кинематическим упрочнением. Сообщ. 1. Задание траектории нагружения в пространстве напряжений // Пробл. прочности. – 1999. – № 6. – С. 81 – 92.
2. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // Прикл. математика и механика. – 1958. – **22**, вып. 1. – С. 78 – 89.
3. *Лепихин П. П.* Моделирование упругопластических процессов деформирования по траекториям в виде двузвенных ломаных // Пробл. прочности. – 1989. – № 7. – С. 7 – 12.

Поступила 18. 02. 99